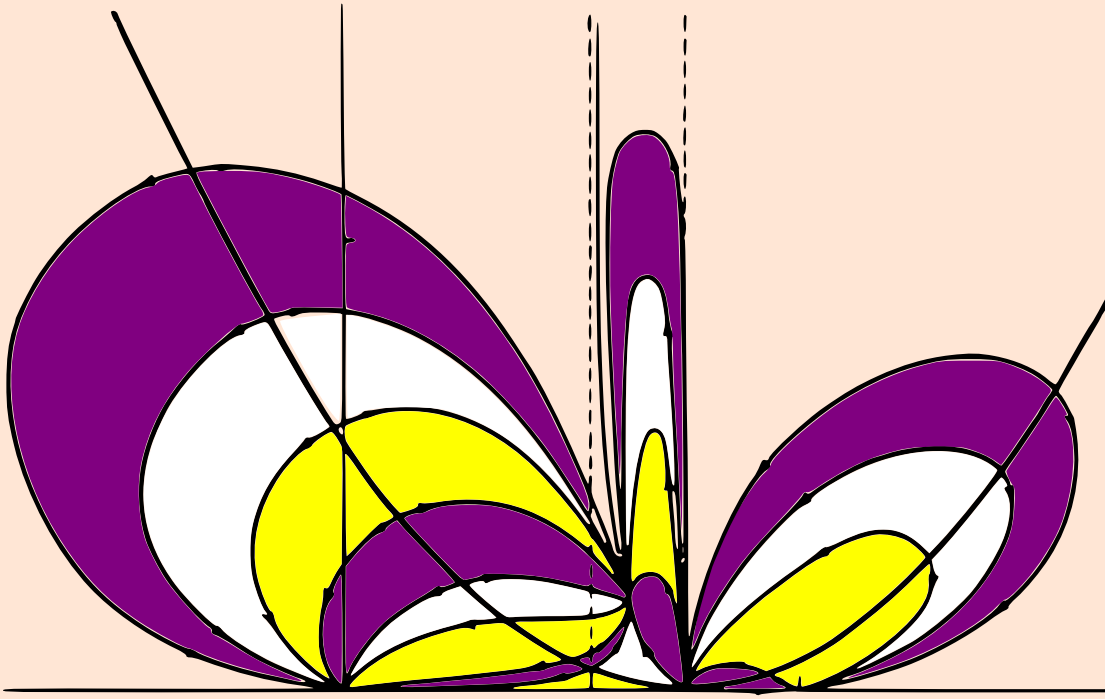
L. Sedov

SIMILITUDE ET DIMENSIONS EN MÉCANIQUE



Éditions Mir Moscou

Л. СЕДОВ

МЕТОДЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ В МЕХАНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1972

L. SÉDOV

SIMILITUDE ET DIMENSIONS EN MÉCANIQUE

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe
par V. PLATONOV
et revu par V. PARTON

На французском языке

© Издательство « Наука » • 1972, с изменениями и дополнениями

© Traduction française • Editions Mir • 1977

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos à la première édition russe 7
Extrait de l'avant-propos à la troisième édition russe 9
Avant-propos à la sixième édition russe 10
Avant-propos à l'édition française 10

Chapitre premier. THÉORIE GÉNÉRALE DES DIMENSIONS POUR DIVERSES GRANDEURS 11

§ 1. Introduction 11
§ 2. Grandeurs dimensionnées et adimensionnées 12
§ 3. Unités de mesure de base et unités dérivées 14
§ 4. Formule de dimension 19
§ 5. Principe fondamental de la dynamique 20
§ 6. Structure des liaisons fonctionnelles entre les grandeurs physiques 26
§ 7. Paramètres définissant une classe de phénomènes 30

Chapitre II. SIMILITUDE, SIMULATION ET QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA THÉORIE DIMENSIONNELLE 34

§ 1. Mouvement du pendule simple 34
§ 2. Ecoulement d'un fluide pesant par un déversoir 36
§ 3. Ecoulement du fluide dans un tube 38
§ 4. Mouvement d'un corps dans un fluide 43
§ 5. Transmission de la chaleur du corps au courant fluide 50
§ 6. Similitude dynamique et simulation des phénomènes 53
§ 7. Mouvement stationnaire d'un corps solide dans un fluide compressible ... 63
§ 8. Mouvement non stationnaire au sein d'un fluide 67
§ 9. Mouvement d'un navire 72
§ 10. Hydroplanage 79
§ 11. Choc sur l'eau 86
§ 12. Immersion uniforme d'un cône et d'un coin dans un liquide 93
§ 13. Petites ondes sur une nappe de liquide incompressible 95
§ 14. Mouvements spatiaux automodèles des milieux continus 103

Chapitre III. APPLICATIONS À LA THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX ET À LA THÉORIE DE LA TURBULENCE 106

§ 1. Diffusion des tourbillons dans un fluide visqueux 106
§ 2. Solutions exactes des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible 108

§ 3. Couche limite lors de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une plaque plate 115
§ 4. Ecoulements turbulents isotropes d'un fluide incompressible 119
§ 5. Ecoulements turbulents stationnaires 153

Chapitre IV. ÉCOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS NON STATIONNAIRES DU GAZ 166

§ 1. Ecoulements automodèles du gaz par ondes sphériques, cylindriques et planes 166
§ 2. Equations différentielles ordinaires et les conditions aux sauts pour les mouvements automodèles 174
§ 3. Intégrales algébriques pour les mouvements automodèles 187
§ 4. Ecoulements tendant vers des écoulements automodèles 196
§ 5. Analyse des champs de courbes intégrales dans le plan z, V 199
§ 6. Problème du piston 208
§ 7. Problème de la convergence du gaz dans un point et de la divergence à partir d'un point 212
§ 8. Détonation sphérique 214
§ 9. Propagation de la flamme 222
§ 10. Décomposition d'une discontinuité arbitraire dans un mélange de combustion 227
§ 11. Problème de l'explosion forte 232
§ 12. Explosion ponctuelle et contre-pression 263
§ 13. Simulation et formules de pression et d'impulsion maximales lors des explosions 277
§ 14. Problème de l'explosion forte dans un milieu de densité variable 286
§ 15. L'écoulement non stationnaire du gaz au cas où les vitesses sont proportionnelles à la distance au centre de symétrie 298
§ 16. Sur la théorie des écoulements gazeux unidimensionnels 309
§ 17. Lois asymptotiques d'amortissement des ondes de choc 322

Chapitre V. INTRODUCTION À LA THÉORIE DES MACHINES À GAZ 330

§ 1. La mise en moyenne des flux de gaz irréguliers dans les conduites 330
§ 2. Les critères de similitude et les paramètres abstraits définissant les caractéristiques des compresseurs 344
§ 3. Le rendement de propulsion d'une hélice parfaite et d'un réacteur parfait 355

Chapitre VI. APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DE L'ASTROPHYSIQUE ... 362

§ 1. Quelques données empiriques 362
§ 2. Les équations d'équilibre et de mouvement d'une masse de gaz simulant une étoile 371
§ 3. Formules théoriques des lois luminosité — masse et rayon — masse 377
§ 4. Quelques solutions simples du système d'équations d'équilibre des étoiles 381
§ 5. Relation entre la période de variation de l'éclat et la densité massique moyenne des céphéides 387
§ 6. Sur la théorie de l'explosion des novae et des supernovae 389

Index des noms 414
Index alphabétique des matières 417

AVANT-PROPOS À LA PREMIÈRE ÉDITION RUSSE

En procédant aux expériences et aux calculs pratiques dans la physique et la technique il faut toujours tenir compte de divers facteurs relevant de la similitude physique des phénomènes et des dimensions des grandeurs envisagées. La réalisation des avions, des navires, des barrages et de nombreuses autres constructions complexes présuppose de vastes recherches parmi lesquelles les essais sur modèles jouent un rôle important. La théorie de la dimension et de la similitude établit les critères qui s'imposent dans les essais sur modèles et permet de dégager les paramètres caractéristiques décrivant les effets et les régimes essentiels des processus. En outre la théorie de la dimension et de la similitude, jointe à l'analyse qualitative générale des phénomènes physiques, peut se révéler, dans nombre de cas, une méthode de recherche théorique fructueuse.

Certaines notions de la théorie de la dimension et de la similitude sont déjà abordées dès les premiers cours de physique dans les lycées et l'on y fait appel d'emblée dès que l'on pose un nouveau problème dans la recherche scientifique. Ajoutons-y encore l'extrême simplicité et le caractère élémentaire de cette théorie. Cependant les principes de la similitude des phénomènes n'ont été universellement reconnus et n'ont été appliqués de manière consciente qu'à une époque relativement récente; pour la mécanique des fluides, par exemple, cela remonte à 30-40 ans.

Il est universellement connu que l'exposition de cette théorie dans les manuels et dans la pratique pédagogique des écoles supérieures souffre généralement de nombreux défauts; ces questions sont habituellement traitées en passant et très superficiellement. Même des notions fondamentales comme les notions de grandeurs dimensionnées ou adimensionnées, le nombre d'unités de mesure fondamentales, etc., n'y sont pas élucidées de manière satisfaisante. Par ailleurs, les idées confuses et intuitives touchant à la notion de dimension ont souvent donné lieu à un état d'esprit où les formules de dimension revêtent un sens mystique ou une signification physique secrète. Dans certains cas ces imprécisions ont amené à des paradoxes qui ont provoqué ces malentendus. Nous analysons en détail l'exemple d'un tel malentendu à propos des résultats obtenus par Rayleigh concernant l'émission de la chaleur par le corps dans un courant de fluide. Fréquents sont les cas où en exposant la théorie de la similitude on se sert

de relations mathématiques sans rapport avec l'essence de cette théorie. Il est donc souhaitable qu'on élabore la théorie de la dimension et de la similitude — comme d'ailleurs toute théorie — à l'aide de méthodes et d'hypothèses compatibles avec l'essence de la théorie. Ce n'est qu'ainsi qu'on parviendra à prendre conscience des limites et des possibilités de la théorie. Cela est d'autant plus nécessaire quand il s'agit de la théorie de la dimension et de la similitude où l'on se heurte souvent à des opinions diamétralement opposées : d'une part, on parle de sa toute-puissance et, d'une autre, de sa trivialité. Ces deux points de vue sont également incorrects.

Il est à noter cependant qu'on arrive aux résultats les plus notables et les plus utiles en utilisant simultanément les notions de la théorie de la dimension et les hypothèses physiques d'ordre général, celles-ci n'aboutissant pas à elles seules à des conclusions tant soit peu intéressantes. Voilà pourquoi, pour illustrer plus largement les diverses applications, nous envisageons un certain nombre de problèmes mécaniques et des exemples où les méthodes dimensionnelles se trouvent combinées avec diverses autres considérations qualitatives mécaniques et physiques.

La même raison nous a incité à décrire plus en détail les problèmes des écoulements turbulents. Dans la théorie de la turbulence, la similitude représente la méthode de travail de base, étant donné qu'il n'existe pas encore dans ce domaine de système complet d'équations susceptible de réduire les problèmes de mécanique à des problèmes mathématiques. Le chapitre consacré aux écoulements turbulents inclut de nouvelles données complétant et élucidant certaines questions de la turbulence. Outre les exemples d'application des méthodes de similitude et de dimension, nous avons tenté d'élucider un certain nombre de problèmes mécaniques, d'importance fondamentale pour la technique, parmi lesquels certains sont nouveaux et encore peu élaborés.

En liaison avec des considérations générales sur la nature des diverses relations mécaniques, pour sa valeur intrinsèque aussi, nous avons traité d'une manière plus détaillée l'équation fondamentale de la mécanique (2ème loi de Newton). Notre point de vue à ce sujet n'est pas nouveau mais la manière dont nous avons traité cette question fondamentale de la mécanique diffère notablement de celles adaptées par certains manuels de mécanique rationnelle courants.

Il existe un grand nombre d'applications de la théorie de la dimension et de la similitude à la mécanique. L'auteur espère que le présent livre donnera au lecteur l'idée des techniques typiques et des possibilités de ces méthodes et l'aidera dans la résolution de nouveaux problèmes, dans la réalisation et l'interprétation de nouvelles expériences.

La lecture du livre n'exige pas de connaissances spéciales sauf certaines notions générales de la mécanique des fluides.

Moscou, 1943. *L. Sédov*

EXTRAIT DE L'AVANT-PROPOS À LA TROISIÈME ÉDITION RUSSE

On voit actuellement les recherches scientifiques s'enrichir de théories et de méthodes toujours plus nombreuses fondées sur l'invariance de lois mathématiques et physiques par rapport au choix des unités de mesure et des échelles physiques pour les caractéristiques employées pour décrire les phénomènes naturels.

La valeur pratique et théorique de ces méthodes est incontestable.

Dans un certain sens, on peut parler d'une analogie entre la théorie de la dimension et de la similitude, d'une part, et la théorie géométrique des invariants par rapport au changement de coordonnées, d'autre part, théorie fondamentale de la physique et des mathématiques modernes.

Après la parution de la première édition de ce livre, on a vu surgir beaucoup de nouvelles applications de la théorie de la dimension et de la similitude à divers problèmes de physique, de mécanique des milieux continus, ainsi qu'à certains problèmes mathématiques employant la théorie des groupes pour la solution des équations différentielles*) et des problèmes statistiques de contrôle de la qualité des marchandises et des produits industriels**).

Pour mieux souligner les principes de la théorie de la dimension et de la similitude on a apporté certaines corrections et certains suppléments à la troisième édition, c'est le cas par exemple de la démonstration du théorème des produits de puissances. On a précisé et détaillé la définition de la similitude dynamique et physique en général des phénomènes. Cette nouvelle définition n'est pas encore entrée dans l'usage universel, toutefois du point de vue pratique elle embrasse les particularités essentielles des processus physiquement semblables. En outre, cette définition est très souple et satisfait paraît-il aux applications les plus diverses.

Le chapitre IV est complété de certains problèmes d'explosion et d'amortissement des ondes de choc ainsi que de quelques considérations concernant la théorie générale des écoulements unidimensionnels du gaz. Dans le chapitre V***) écrit pour la nouvelle édition sont traitées les applications de la théorie des écoulements unidimensionnels non stationnaires du gaz, ainsi que celles des méthodes dimensionnelles à certains problèmes d'astrophysique.

La théorie développée dans le supplément au chapitre IV et dans le chapitre V est, dans sa plus grande partie, parfaitement nouvelle. Les positions et les solutions des problèmes de la dynamique des fluides que nous proposons peuvent être considérées comme des exemples de l'application des méthodes dimensionnelles à l'astronomie. Ce sont aussi des mouve-

---

*) Citons à ce propos G. Birkhoff, *Hydrodynamics. A study in logic, fact and similitude*. Princeton Univ. Press, 1950.

**) Voir S. Drobot, M. Warmus, *Dimensional analysis in sampling inspection of merchandise*. Rozprawy Matematyczne, V. Warszawa, 1954.

***) Chapitre VI dans la sixième édition.

ments parfaits simples auxquels on peut s'adresser en analysant les problèmes de cosmogonie. Nombre de ces résultats ont été obtenus par l'auteur et ses jeunes disciples au cours des seminaires sur la mécanique des fluides à l'Université de Moscou en 1952-1953.

Le § 14, ch. IV, a été écrit en collaboration avec N. Melnikova et S. Sidorkina, le § 16, l'alinéa 1°, ch. IV, avec V. Vassiliev et M. Lidov et le § 6, ch. V, avec I. Javorskaïa.

Je leur exprime ma sincère gratitude.

Moscou, mars 1954. *L. Sédov*

AVANT-PROPOS À LA SIXIÈME ÉDITION RUSSE

La sixième édition comporte le chapitre V et quelques suppléments aux chapitres I, IV et VI. Le texte primitif des éditions précédentes a été revu et les erreurs relevées ont été corrigées.

Quelques références aux ouvrages parus au cours des dernières années ont été ajoutées. Signalons notamment le livre de V. Korobeinikov, N. Melnikova et E. Riazanov, *Théorie de l'explosion ponctuelle* où est développée la théorie de l'explosion.

J'exprime ma profonde gratitude à N. Melnikova qui s'est aimablement chargée de la rédaction générale, de l'amélioration du texte et qui a dirigé les calculs supplémentaires et la construction des nouveaux diagrammes.

Moscou, février 1967. *L. Sédov*

AVANT-PROPOS À L'ÉDITION FRANÇAISE

Le présent ouvrage est la traduction de la septième édition russe, augmentée et remaniée, du cours *Similitude et dimensions en mécanique* paru dans les Editions « Naouka » en 1972.

Les modifications concernent surtout les chapitres consacrés à la théorie de la turbulence isotrope, ébauchée il y a une trentaine d'années et exposée dans la première édition russe de notre ouvrage en 1944.

De nombreuses données expérimentales recueillies depuis cette date viennent confirmer la validité de cette théorie dont les éléments de base sont la similitude et les dimensions.

Notons que les méthodes dimensionnelles et celles de la gazodynamique ainsi que leurs nombreuses applications traitées dans les chapitres IV et VI sont de plus en plus largement utilisées dans l'astrophysique moderne et dans plusieurs autres domaines de la science.

De nos jours la similitude physique et les considérations concernant la dimension de différentes variables et constantes physiques trouvent une large application dans les problèmes les plus divers.

Moscou, mai 1976 *L. Sédov*

CHAPITRE PREMIER

THÉORIE GÉNÉRALE DES DIMENSIONS POUR DIVERSES GRANDEURS

§ 1. Introduction

L'étude des phénomènes mécaniques exige l'introduction d'un certain nombre de notions telles que l'énergie, la vitesse, la contrainte, etc., caractérisant l'essence du phénomène et qui peuvent être définies ou données à l'aide de nombres.

Tous les problèmes concernant le mouvement ou l'équilibre du corps se ramènent à la recherche de certaines fonctions et valeurs numériques des grandeurs caractérisant le phénomène étudié. Dans ces problèmes on énonce les lois de la nature et diverses relations géométriques sous forme d'équations, le plus souvent différentielles.

Dans une étude purement théorique ces équations permettent de se représenter le mouvement du point de vue qualitatif et de calculer les relations fonctionnelles au moyen d'opérations mathématiques appropriées. Or, il arrive qu'un problème de mécanique ne soit pas toujours résoluble à l'aide de raisonnements et de calculs mathématiques. Dans nombre de cas des difficultés mathématiques insurmontables rendent ces problèmes insolubles. Bien souvent il n'existe pas de formulation mathématique du problème, le phénomène mécanique étant tellement complexe qu'on n'est pas encore arrivé à le schématiser ni donner les équations de son mouvement. Cette situation est typique pour beaucoup de problèmes importants de l'aéromécanique, de l'hydromécanique, de ceux de la rigidité et de la déformation de diverses structures, etc. C'est aux méthodes empiriques qu'on s'adresse alors, car elles permettent d'établir les faits empiriques fondamentaux. En général, toute étude des phénomènes naturels débute par l'établissement des faits empiriques les plus simples, à partir desquels seront formulées ensuite les lois régissant le phénomène étudié sous forme de relations mathématiques.

Pour monter correctement une expérience et en tirer les conclusions qui s'imposent et qui permettraient de dégager des lois générales applicables aux cas où l'on n'a pas fait expérience directe, il est indispensable d'étudier à fond la question en ayant recours à une analyse qualitative générale. Par ailleurs, l'exécution même d'une expérience dont les résultats sont un ensemble de nombres caractérisant les aspects étudiés du phénomène ne peut être menée à bien qu'à partir d'une analyse théorique préalable. Au cours d'une expérience ou dans la pratique en général, on ne saurait trop

insister sur l'importance du choix correct des paramètres adimensionnés. Ceux-ci doivent être en nombre le plus petit possible et tels qu'ils traduisent sous la forme la plus commode les effets principaux.

La théorie de la similitude et de la dimension permet de faire cette analyse théorique préalable d'ordre qualitatif et de choisir l'ensemble de paramètres de définition adimensionnés. Elle peut s'appliquer à l'étude de phénomènes d'une grande complexité et facilite notablement le dépouillement des données expérimentales. Qui plus est, il est impensable de nos jours de monter une expérience et de faire un dépouillement compétent des données expérimentales sans tenir compte de la similitude et de la dimension. Il arrive qu'au stade initial des recherches sur certains phénomènes complexes la théorie de la similitude et des dimensions se révèle le moyen opérationnel théorique unique. Cependant, on ne doit pas surestimer les possibilités de cette méthode. Les résultats que fournit la théorie des dimensions sont de portée limitée et bien souvent triviaux. Mais gardons-nous de nous joindre à une opinion courante selon laquelle la théorie des dimensions est en principe incapable de fournir des résultats importants. Une combinaison rationnelle des considérations de similitude avec les données expérimentales et les résultats mathématiques peut conduire à des conclusions rien moins que triviaux. En règle générale, la théorie de la similitude et des dimensions s'avère très utile tant en pratique que dans l'étude théorique. Tous les résultats obtenus au moyen de cette théorie sont trouvés sans peine. Toutefois, l'application des méthodes de la théorie de la similitude et des dimensions exige du chercheur une certaine maîtrise et une profonde connaissance du phénomène étudié*).

Cette théorie est surtout efficace dans l'étude de phénomènes dépendant d'un grand nombre de paramètres dont beaucoup ne sont pas dans certains cas essentiels. On en donnera par la suite des exemples. Les méthodes de la théorie de la similitude et des dimensions jouent un rôle particulièrement important dans la simulation de divers phénomènes.

§ 2. Grandeurs dimensionnées et adimensionnées

Les grandeurs dont les valeurs numériques dépendent des échelles choisies, c'est-à-dire du système d'unités de mesure, sont dites dimensionnées. Les grandeurs dont les valeurs numériques sont indépendantes du système d'unités de mesure utilisé sont dites adimensionnées**) ou abstraites. La longueur, le temps, l'énergie, le moment d'une force, etc. sont autant des exemples de grandeurs dimensionnées. Les angles, le quotient de deux longueurs, le rapport du carré d'une longueur à une aire, le rapport de l'énergie au moment d'une force, etc. sont des exemples de grandeurs non dimensionnées.

---

*) Sur la position des problèmes voir L. Sédov, *Mécanique des milieux continus*, tt. I et II, Ed. « Mir », Moscou, 1975.

**) On les appelle aussi *sans dimension*, *non dimensionnelles*, etc.

Toutefois, cette division des grandeurs en grandeurs dimensionnées et grandeurs non dimensionnées est dans une certaine mesure une question de convention. Ainsi, par exemple, on vient de nommer l'angle parmi les grandeurs adimensionnées. Or, on sait que les angles peuvent s'exprimer en radians, en degrés, en fractions de l'angle droit, bref, en diverses unités. C'est dire que le nombre définissant l'angle dépend du choix de l'unité de mesure. On en conclut que l'angle peut être considéré comme une grandeur dimensionnée. Définissons l'angle comme le rapport de l'arc de circonférence qu'il intercepte au rayon; de cette manière on définit univoquement l'unité de mesure de l'angle : le radian. Si maintenant on convient d'exprimer les angles uniquement en radians dans tous les systèmes d'unités de mesure, on peut envisager l'angle comme une grandeur adimensionnée. De même, si l'on fixe l'unité de longueur pour tous les systèmes d'unités, alors la longueur sera aussi une grandeur sans dimension. Mais s'il est commode de fixer l'unité de mesure de l'angle, il n'en est pas ainsi pour les longueurs. La raison en est que pour les figures géométriquement semblables les angles correspondants sont les mêmes, tandis que les longueurs correspondantes ne le sont pas, de sorte qu'il est avantageux, dans certains cas, de choisir comme longueur fondamentale diverses distances.

L'accélération est considérée d'ordinaire comme une grandeur dimensionnée dont la dimension est la longueur divisée par le carré du temps. Dans nombre de cas l'accélération de la pesanteur g, accélération de la chute libre (dans le vide), peut être considérée comme une grandeur constante (9,81 m/s^2). Cette accélération constante g peut servir d'unité de mesure fixée de l'accélération dans tous les systèmes d'unités. Dès lors toute accélération sera exprimée par le rapport de sa valeur à celle de l'accélération de la pesanteur. Ce rapport s'appelle surcharge*); sa valeur numérique ne varie pas lors des changements d'unités de mesure. Par ailleurs, la surcharge peut être considérée également comme une grandeur dimensionnée, notamment comme l'accélération si l'on a pris comme unité de mesure une accélération égale à celle de la pesanteur. On suppose que dans ce dernier cas on peut choisir comme unité de mesure de la surcharge — accélération — une accélération qui n'est pas égale à celle de la pesanteur.

D'autre part, les grandeurs abstraites (adimensionnées) dans le sens conventionnel du terme peuvent s'exprimer au moyen de nombres. En effet, le rapport de deux longueurs peut être exprimé non seulement sous forme de quotient arithmétique ordinaire, mais aussi en pourcentage, etc.

En résumé, les notions de grandeurs dimensionnées et non dimensionnées sont relatives. Nous introduisons une certaine collection d'unités de mesure. Alors, on appellera non dimensionnées les grandeurs dont les unités de mesure sont les mêmes dans tous les systèmes d'unités adoptés. Les grandeurs pour lesquelles on admet des unités de mesure différentes, dans les expériences ou dans les études théoriques, explicitement ou implicitement,

*) Si $a/g > 1$, et apesanteur si $a/g < 1$.

seront dites dimensionnées. D'après cette définition certaines grandeurs peuvent parfois être considérées comme dimensionnées et dans d'autres cas comme adimensionnées. On en a donné ci-dessus des exemples; par la suite on en rencontrera d'autres.

§ 3. Unités de mesure de base et unités dérivées

Les différentes grandeurs physiques sont liées entre elles par des relations déterminées. C'est pourquoi si certaines de ces grandeurs sont considérées comme fondamentales et si l'on convient d'établir pour elles des unités de mesure, les unités de mesure des autres grandeurs s'exprimeront de façon déterminée au moyen de celles des grandeurs fondamentales. Convenons d'appeler les unités de mesure des grandeurs fondamentales, unités de base ou primaires, celles des autres grandeurs, unités dérivées ou secondaires.

En pratique, il suffit d'établir les unités de mesure pour trois grandeurs, le choix de ces dernières étant dicté par les conditions concrètes du problème. Ainsi dans une étude physique il est commode de prendre comme unités de base les unités de longueur, de temps et de masse, tandis qu'en technique on choisira les unités de longueur, de temps et de force. On serait en droit de prendre les unités de vitesse, de viscosité et de densité, etc., comme unités de base.

Actuellement, on utilise largement les systèmes d'unités de mesure physique et technique. Les unités de mesure de base du système physique sont le centimètre, le gramme-masse et la seconde (d'où l'abréviation : système d'unités C. G. S.); celles du système technique sont le mètre, le kilogramme-force et la seconde (abréviation : système d'unités MK_fS).

Les unités de longueur — le mètre (=100 cm), de masse — le kilogramme (=1000 g) et celle de temps — la seconde, sont établies expérimentalement sur la base d'une convention spéciale. Jusqu'à 1960 on adoptait comme mètre la longueur de l'étalon en platine iridié déposé au pavillon de Breteuil à Sèvres; comme kilogramme, la masse du prototype en platine iridié déposé également au pavillon de Breteuil. La seconde est la fraction $\frac{1}{24 \cdot 3600}$-ième du jour solaire moyen*).

Le système international**) d'unités de mesure (SI) est adopté en Union Soviétique depuis le 1 janvier 1963. Les unités de mesure mécaniques de base du système SI sont : le mètre, le kilogramme-masse et la seconde;

*) La XIe Conférence générale des poids et mesures (Paris, 1960) a précisé les définitions des étalons des unités fondamentales. Le *mètre* est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde, dans le vide, de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton 86. La *seconde* est la fraction 1/31 556 925,9747 de l'année tropique pour 1900 janvier zéro, à 12 heures du temps des éphémérides.

L'unité de masse, le *kilogramme*, est conservée comme la masse du prototype en platine iridié déposé au pavillon de Breteuil à Sèvres.

**) Voir : Journal officiel de la République Française, 93, n° 119, 20 mai 1961, pp. 4584-4593.

l'unité d'intensité du courant électrique est l'ampère, l'unité de température, le degré Kelvin, l'unité d'intensité lumineuse, la candela*).

Une fois les unités de mesure de base établies, les unités des autres grandeurs mécaniques telles que la force, l'énergie, la vitesse, l'accélération, etc. s'obtiennent immédiatement à partir de leurs définitions.

L'expression d'une unité de mesure dérivée au moyen des unités de base est dite dimension. La dimension est symbolisée par une formule dans laquelle le symbole de l'unité de longueur est figuré par la lettre L, celui de l'unité de masse par la lettre M, celui de l'unité de temps par la lettre T (dans le système d'unités MK_fS le symbole de l'unité de force est figuré par la lettre K). On ne peut parler de dimension que relativement à un système d'unités de mesure. Par exemple, la dimension de la surface sera L^2, la dimension de la vitesse L/T, la dimension de la force ML/T^2 dans le système d'unités physique et K dans le système MK_fS.

Dans ce qui suit on désignera par $[a]$ la dimension d'une grandeur a, d'après Maxwell. Par exemple, la dimension de la force F en unités physiques s'écrira ainsi :

$$[F]=\frac{ML}{T^2} \quad \text{ou} \quad \frac{ML}{T^2}=K.$$

Les formules de dimension permettent de convertir les valeurs numériques d'une grandeur dimensionnée lorsqu'on change de système d'unités de mesure. Par exemple, en mesurant l'accélération de la pesanteur en centimètres et en secondes, on a $g=981$ cm/s². Pour trouver la valeur numérique de l'accélération de la pesanteur exprimée en kilomètres et en heures, il faut se servir des relations suivantes :

$$1 \text{ cm}=\frac{1}{10^5}\text{km}, \quad 1 \text{ s}=\frac{1}{3600}\text{heure}.$$

Ainsi,

$$g=981 \text{ cm/s}^2=981\frac{\frac{1}{10^5}\text{ km}}{\left(\frac{1}{3600}\right)^2 \text{h}^2}=98{,}1\cdot 36^2\,\frac{\text{km}}{\text{h}^2}.$$

*) Les prototypes des unités de base d'intensité de courant, de température et d'intensité lumineuse ont été définis à la IXe Conférence générale des poids et mesures en 1948. L'unité de courant, l'ampère, est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre, dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force égale à $2\cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur. (Le newton est l'unité de force mécanique du système international, 1 kgf=9,8 N.)

Le degré Kelvin est l'unité de mesure de température à l'échelle thermodynamique où la température du point triple de l'eau prend la valeur 273,15 °K.

La candela est l'unité d'intensité lumineuse équivalant à l'intensité lumineuse, dans une direction déterminée, d'une ouverture perpendiculaire à cette direction ayant une aire de $\frac{1}{60}$ de centimètre carré, rayonnant comme un radiateur intégral à la température de solidification du platine.

D'une façon générale, si dans un nouveau système d'unités de mesure l'unité de longueur est α fois, l'unité de masse β fois et l'unité de temps γ fois inférieures aux anciennes unités, alors la valeur numérique de la grandeur physique a de dimension $[a]=\mathrm{L}^l\mathrm{M}^m\mathrm{T}^n$ augmente de $\alpha^l\beta^m\gamma^n$ fois dans le nouveau système.

Le nombre d'unités de base n'est pas obligatoirement fixé à trois. On peut en prendre d'avantage. Ainsi par exemple on peut établir expérimentalement, indépendamment les unes des autres, les unités de mesure de quatre grandeurs : la longueur, le temps, la masse et la force. L'équation fondamentale s'écrit alors

$$F=cma,$$

où F est la force, m la masse, a l'accélération, c une constante dont la dimension est

$$[c]=\frac{\mathrm{KT}^2}{\mathrm{ML}}.$$

Ces unités de base fixeront en général quatre arguments dans la formule de dimension des grandeurs mécaniques. Le facteur c dans l'équation ci-dessus est une constante physique semblable à l'accélération de la pesanteur g ou à la constante gravitationnelle γ de la loi d'attraction universelle :

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2},$$

où m_1 et m_2 sont les masses de deux points matériels, r leur distance. La valeur numérique du facteur c dépendra du choix des unités de mesure de base.

Si l'on suppose que c est un nombre abstrait (donc c aura la même valeur numérique dans tous les systèmes d'unités de mesure), égal ou non à l'unité, on définit ainsi la dimension de la force au moyen de la masse, de la longueur et du temps. L'unité de mesure de force se définira donc univoquement en fonction des unités de mesure de masse, de longueur et de temps.

En général, en introduisant les constantes physiques complémentaires on peut choisir, à partir de l'expérience, les unités de mesure pour n grandeurs ($n>3$) indépendamment l'une de l'autre, mais parallèlement on doit introduire $n-3$ constantes physiques dimensionnées complémentaires. Les formules des grandeurs dérivées contiendront alors, dans le cas général, n arguments.

Pour l'étude des phénomènes mécaniques trois unités de mesure de base indépendantes suffisent : celle de longueur, de masse (ou de force) et de temps. On s'en tire également avec ces unités dans les études des phénomènes thermiques et même électriques. On sait par la physique que les dimensions des grandeurs thermiques et électriques peuvent s'exprimer par L, M et T. Par exemple la quantité de chaleur et la température ont la dimension de l'énergie mécanique. Toutefois, dans nombre de problèmes pratiques posés par la thermodynamique et la gazodynamique on convient de choisir

les unités de mesure de quantité de chaleur et de température indépendamment de l'unité d'énergie mécanique. L'unité de mesure de température y est le degré Celsius, celle de quantité de chaleur, la calorie. Ces unités sont établies par la voie expérimentale indépendamment des unités de mesure des grandeurs mécaniques.

Lorsqu'on traite des phénomènes où l'on observe la transformation de l'énergie mécanique en énergie calorifique, l'on doit envisager, en outre, deux constantes physiques dimensionnées; l'équivalent mécanique de la chaleur $J=427$ kgfm/kcal et soit le coefficient de la chaleur spécifique c cal/m^3·degré, soit la constante des gaz parfaits R m^2/s^2·degré, soit la constante de Boltzmann $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ erg/degré. Si l'on mesure la quantité de chaleur et la température en unités mécaniques, l'équivalent mécanique de la chaleur et la constante de Boltzmann entrent dans les formules comme simples constantes adimensionnées absolues, analogues aux coefficients de conversion des mètres en pieds, des ergs en kilogrammètres, etc.

On voit sans peine que le nombre d'unités de base peut être inférieur à trois. En effet, toutes les forces peuvent être comparées à la force de l'attraction universelle, quoique cela soit incommode et illogique dans les questions où celle-ci n'est pas présente. Dans un système d'unités physiques la force se définit par l'égalité

$$F=ma,$$

quant à la force de l'attraction, elle se définit par

$$F'=\gamma\,\frac{m_1m_2}{r^2},$$

où γ est la constante gravitationnelle dont la dimension est $[\gamma]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$. De même que la constante dimensionnée de l'équivalent mécanique de la chaleur peut être remplacée par une constante adimensionnée si l'on mesure la quantité de chaleur en unités mécaniques, on peut considérer la constante gravitationnelle comme constante adimensionnée absolue. Cela fixe la dimension de la masse en fonction de L et T : $[m]=\mathrm{M}=\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$. Par conséquent, la variation de l'unité de masse est dans ce cas entièrement définie par la variation des unités de longueur et de temps. Ainsi, en prenant la constante gravitationnelle pour une constante adimensionnée absolue on pourra se contenter de deux unités de mesure indépendantes.

On parvient à réduire le nombre d'unités de mesure indépendantes à un si l'on prend comme constante adimensionnée absolue une autre constante physique dimensionnée, à savoir le coefficient de viscosité cinématique de l'eau ν ou la vitesse de la lumière dans le vide c.

Enfin, on peut considérer toutes les grandeurs physiques comme adimensionnées si l'on prend comme constantes adimensionnées absolues les constantes physiques convenables. Dans ce cas il devient impossible d'utiliser divers systèmes d'unités de mesure. On n'a alors qu'un, et un seul, système d'unités de mesure, déterminé par le choix des constantes physiques (par exemple, la constante gravitationnelle, la vitesse de la lumière et le coefficient

de viscosité de l'eau), dont les valeurs sont prises comme constantes absolues universelles.

L'histoire de la science connaît les tentatives d'adopter un système d'unités de ce genre, qui permet d'établir les unités de mesure que l'on ne craint pas de perdre comme le prototype du kilogramme ou celui du mètre, grandeurs dont le choix est plutôt hasardeux et qui ne se fondent pas sur les phénomènes principaux de la nature*).

Introduire un système d'unités de mesure unique excluant tous les autres systèmes d'unités équivaut à l'élimination complète de la notion de dimension. Dans un système d'unités unique et universel les valeurs numériques de toutes les caractéristiques quantitatives sont définies univoquement par leur grandeur physique.

D'un certain point de vue, l'application d'un système d'unités de mesure unique et universel, c'est-à-dire l'utilisation des mesures identiques, des modes de mesure de temps identiques, etc., représenterait un avantage pratique indéniable, car ce serait l'une des étapes dans la standardisation des méthodes de mesure.

Cependant les constantes spéciales telles que la constante gravitationnelle, la vitesse de la lumière dans le vide ou le coefficient de viscosité cinématique de l'eau ne jouent aucun rôle dans bien des phénomènes. On voit donc qu'un système d'unités de mesure unique et universel faisant appel à la loi de l'attraction, à la propagation de la lumière et aux frottements visqueux dans l'eau ou à d'autres phénomènes physiques serait dans nombre de cas un outil difficile à manier. Au contraire, l'application de systèmes d'unités de mesure dont les unités fondamentales correspondent à l'essentiel des grandeurs physiques décrivant les phénomènes étudiés et permettent leur évaluation comparative, s'avère commode dans divers chapitres de physique.

En mécanique les grandeurs fondamentales désignées sont la force, la longueur et le temps, les unités de force et de longueur n'étant pas les mêmes en mécanique rationnelle qu'en mécanique céleste pour des raisons de commodité; en électrotechnique il est avantageux de prendre l'intensité de courant, la résistance, la longueur et le temps (leurs unités de mesure sont respectivement l'ampère, l'ohm, le centimètre et la seconde) en tant que grandeurs fondamentales, etc.

Qui plus est, dans une étude concrète de classes spéciales de phénomènes il s'avère souvent plus commode d'exprimer les valeurs numériques des

---

*) La première idée de la commission de l'Académie des Sciences de France qui fut chargée d'instituer le système métrique des poids et mesures était de définir le mètre comme une longueur égale à la dix millionième du quart du méridien de Paris et le kilogramme, comme le poids d'un décimètre cube d'eau distillée à 4 °C et sous pression atmosphérique. Le caractère imprécis de la notion de méridien ainsi que les erreurs de mesure inévitables ont conduit à abandonner cette définition pour l'autre, actuellement en vigueur, que l'on a vue dans la note au bas de la page 14. Le prototype du kilogramme est un cylindre en platine iridié de masse égale, selon la première idée, à la masse d'un décimètre cube d'eau distillée à 4 °C et sous pression atmosphérique.

caractéristiques quantitatives sous forme de quotients par les grandeurs données ou par les grandeurs les plus caractéristiques, selon le problème traité. Les grandeurs fondamentales caractéristiques peuvent être différentes selon les cas.

§ 4. Formule de dimension

La relation entre l'unité de mesure d'une grandeur dérivée et les unités de mesure des grandeurs fondamentales peut être mise en formule dite formule de dimension. C'est en quelque sorte une définition condensée et une caractéristique physique de la grandeur dérivée.

On ne peut parler de dimension sans faire référence à un système d'unités de mesure déterminé. Selon le système d'unités de mesure, la formule de dimension pour une même grandeur peut contenir un nombre différent d'arguments et revêtir des formes différentes. Dans le système d'unités C. G. S. les formules de dimension de toutes les grandeurs physiques ont la forme d'un monôme de puissance

$$L^l M^m T^t.$$

Montrons que cet aspect de la formule de dimension est une conséquence de la condition physique suivante : le rapport de deux valeurs numériques d'une grandeur dérivée quelconque ne doit pas dépendre de l'échelle choisie pour les unités de mesure fondamentales. Par exemple, que nous mesurions l'aire en mètres carrés ou en centimètres carrés, le rapport de deux aires en mètres carrés sera exactement le même que le rapport des mêmes aires en centimètres carrés. Pour les grandeurs fondamentales cette condition fait partie de la définition de l'unité de mesure et se satisfait d'elle-même.

Soit y une grandeur dimensionnée dérivée quelconque; pour simplifier, prenons pour y une grandeur géométrique, donc ne dépendant que des longueurs, de sorte que

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des distances. Désignons par y' la valeur de y correspondant aux valeurs $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ des arguments. La valeur numérique de y ainsi que celle de y' dépend de l'unité de mesure des distances $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Diminuons cette unité — échelle des distances — de α fois. Alors, conformément à la condition énoncée ci-dessus, on doit avoir

$$\frac{y'}{y}=\frac{f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{f(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \ldots, x'_n\alpha)}{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \ldots, x_n\alpha)}, \tag{4.1}$$

c'est-à-dire le rapport y'/y doit être le même quelle que soit la valeur de l'échelle des longueurs α. Il vient de l'égalité (4.1) que

$$\frac{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \ldots, x_n\alpha)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{f(x'_1\alpha, x'_2\alpha, \ldots, x'_n\alpha)}{f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}$$

soit

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)}=\frac{y'(\alpha)}{y'(1)}=\varphi(\alpha). \tag{4.2}$$

On en conclut que le rapport des valeurs numériques d'une grandeur géométrique dérivée mesurée en échelles des longueurs différentes ne dépend que du rapport des échelles des longueurs.

La relation (4.2) permet aisément d'établir la forme de la fonction $\varphi(\alpha)$. En effet, on a

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(1)}=\varphi(\alpha_1), \quad \frac{y(\alpha_2)}{y(1)}=\varphi(\alpha_2).$$

D'où l'on obtient

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)}=\varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \tag{4.3}$$

car pour $x_1'=x_1\alpha_2$, $x_2'=x_2\alpha_2$, ..., $x_n'=x_n\alpha_2$ on a

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)}=\frac{y_1'\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{y_1'(1)}=\varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).$$

En dérivant l'équation (4.3) par rapport à α_1 et en posant $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, il vient

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)}\frac{d\varphi}{d\alpha}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=1}=\frac{m}{\alpha}.$$

En intégrant, on trouve

$$\varphi=C\alpha^m.$$

Comme pour $\alpha=1$ on a $\varphi=1$, alors $C=1$; donc

$$\varphi=\alpha^m. \tag{4.4}$$

Ce résultat est valable pour toute grandeur dimensionnée qui est fonction de plusieurs grandeurs fondamentales, à condition de ne varier qu'une seule échelle. On comprend aisément que lorsqu'on change les échelles α, β, γ de trois grandeurs fondamentales, la fonction φ a la forme

$$\varphi=\alpha^m\beta^n\gamma^l.$$

Ce qui démontre que les formules de dimension des grandeurs physiques doivent être les monômes de puissances.

§ 5. Principe fondamental de la dynamique

Dans l'étude des phénomènes mécaniques ou physiques en général, on introduit en premier lieu un système de notions, grandeurs caractérisant les différents aspects des processus étudiés (appelons-les tout simplement caractéristiques), et en second lieu un système d'unités de mesure à partir duquel se définissent les valeurs numériques des caractéristiques introduites. Les caractéristiques d'un phénomène sont liées entre elles par certain nombre de relations. Quelques-unes de ces relations ne sont valables que pour un système concret ou un processus particulier, d'autres peuvent l'être pour plusieurs classes de systèmes ou de processus. Ces dernières relations

sont d'une importance fondamentale et elles constituent un objet de premier plan dans les recherches physiques.

L'un des moyens permettant d'établir les relations entre les caractéristiques est fourni par la théorie de la similitude et des dimensions. L'objectif que poursuit cet ouvrage est de montrer comment appliquer et utiliser ces méthodes. Avant d'exposer ces méthodes, envisageons quelques exemples de relations mécaniques et les procédés caractéristiques généraux qui permettent de les obtenir. Nous choisirons à cet effet la relation fondamentale de la mécanique connue sous le nom de principe fondamental de la mécanique.

Quelques-unes des relations entre les caractéristiques sont des conséquences simples découlant de la définition de ces grandeurs. Par exemple, la valeur de la vitesse v est égale au rapport du chemin parcouru au temps employé à le parcourir; la valeur de l'énergie cinétique d'un point matériel E est égale à $mv^2/2$, où m est la masse du point matériel, etc.

Outre ces relations triviales, on peut mettre en évidence par la voie expérimentale ou théorique les relations fonctionnelles entre les valeurs numériques des caractéristiques découlant de la nature et des particularités du phénomène ou de la classe de phénomènes étudiés. Les exemples en sont fournis par les lois de Kepler régissant le mouvement des planètes et par le principe de l'attraction universelle. Elucidons brièvement la liaison entre ces lois.

A partir d'observations systématiques effectuées durant de longues années Kepler énonça en 1609 et 1619 les lois générales suivantes du mouvement des planètes :

I. Les orbites planétaires sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.

II. Les aires balayées par les rayons vecteurs allant du centre du Soleil au centre de la planète sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

III. Les carrés des temps des révolutions planétaires sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

Si l'on définit la force d'interaction entre le Soleil et la planète comme la masse multipliée par l'accélération, il est possible de déduire mathématiquement, des lois de Kepler, le principe de l'attraction universelle :

$$F=\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{5.1}$$

où F est la force d'attraction, r la distance des points matériels, m_1 et m_2 leurs masses. Ce principe fut établi par Newton en 1682. Il fut vérifié et confirmé par la suite tant sur la base de multiples observations de la nature qu'au cours d'expériences spéciales.

Un autre exemple est donné par la loi de Hooke traduisant la dépendance entre la force de traction F et l'allongement x d'un ressort.

Cette loi caractérise l'équilibre et le mouvement d'un poids suspendu au ressort. On la déduit en définissant la grandeur de la force comme le

produit de la masse par l'accélération et en faisant appel, dans certains cas, aux règles de la composition des forces.

Mathématiquement cette loi est donnée par la formule

$$F=kx, \tag{5.2}$$

où k est le coefficient de proportionnalité (la rigidité du ressort).

En utilisant cette loi, on peut dans quelques cas particuliers (le poids est accroché à plusieurs ressorts, la masse ou la rigidité variables, les conditions initiales du mouvement variables, etc.) déterminer théoriquement la loi du mouvement, c'est-à-dire toutes les grandeurs mécaniques en fonction du temps, déterminer la période d'oscillations, etc.

Pour résoudre les problèmes mentionnés ainsi que d'autres problèmes semblables de la mécanique on part de l'étude de l'équation du mouvement d'une particule matérielle

$$\bar{F}=m\bar{a}, \tag{5.3}$$

où $\bar{a}$ est le vecteur accélération, m la masse du point matériel et $\bar{F}$ le vecteur force. Dans nombre de cas la force $\bar{F}$ représente la résultante vectorielle de plusieurs forces :

$$\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\ldots, \tag{5.4}$$

occasionnées par des effets variés. La possibilité de remplacer l'action simultanée de plusieurs forces par une seule d'après la formule (5.4) est un fait expérimental.

Examinons maintenant les grandeurs entrant dans l'équation (5.3). L'accélération $\bar{a}$ est une grandeur cinématique pouvant être déterminée expérimentalement indépendamment de l'équation (5.3). La masse m est la mesure de l'inertie du corps. La notion de masse d'un point matériel peut être introduite à partir de la loi de l'action et de la réaction (toute action représente une interaction entre des forces égales et de sens opposé). En effet, à chaque point matériel peut être associée une grandeur constante, sa masse, de sorte que tout couple mobile de points matériels isolés en interaction, M_1 et M_2 ou M_1 et M_3, vérifiera les relations

$$m_1\bar{a}_1+m_2\bar{a}_2=0, \quad m_1\bar{a}_1+m_3\bar{a}_3=0. \tag{5.5}$$

D'où on conclut que le rapport des masses peut être établi par expérience, indépendamment de l'équation (5.3), en mesurant le rapport des accélérations lors du mouvement des corps en interaction.

La constance de la masse définie par la relation (5.5), dans tous les mouvements possibles, est un fait expérimental traduisant une loi de la nature et admettant éventuellement des rectifications.

Si l'on connaît le mouvement, la relation (5.3) peut servir d'égalité donnant la valeur de la résultante. C'est ainsi qu'on l'utilise le plus souvent. S'il s'agit de déterminer le mouvement, on ne peut utiliser la relation (5.3) que lorsqu'on connaît la force en fonction des grandeurs caractérisant le mouvement (le temps, les coordonnées du point, sa vitesse, etc.). Cette dernière relation s'obtient soit à partir d'une étude théorique en s'inspirant

d'hypothèses complémentaires que l'on doit obligatoirement soumettre à une vérification expérimentale, soit directement de l'expérience.

Que l'on fasse une étude théorique ou une expérience, la définition de la force en fonction de diverses grandeurs physiques s'obtient à l'aide de l'équation (5.3). L'observation et l'analyse des mouvements les plus simples concourrent à établir la dépendance du produit $m\bar{a}$ par rapport à d'autres paramètres du mouvement. Les relations établies sont ensuite étendues à une classe de mouvements plus complexes, les généralisations devant être de nouveau soumises à une vérification expérimentale, à une comparaison des résultats tirés des équations du mouvement avec ceux de l'expérience. Ainsi donc la voie générale de la déduction du principe de l'attraction universelle à partir des lois de Kepler est caractéristique de la détermination d'une force en fonction des paramètres du mouvement.

D'une manière analogue se déterminent la force d'interaction entre les charges électriques — loi de Coulomb, la force électromagnétique — loi de Biot et Savart, la force de tension superficielle — loi de Weber, la force de frottement entre les corps solides — loi de frottement de Coulomb, la relation entre les contraintes et déformations dans un corps élastique — loi de Hooke, la force de frottement visqueux au sein d'un fluide — loi de Newton, etc.

A en croire une opinion répandue, la force peut être définie par voie statique indépendamment de l'équation (5.3). En effet, dans nombre de cas importants, notamment ceux où l'on peut supposer que la force est fonction de la seule position du corps, on arrive à la déterminer en fonction des coordonnées en comparant la force inconnue avec les forces connues, considérant le mouvement particulier, le repos, où $\bar{a}=0$*).

Il est toutefois indispensable de souligner ceci : d'abord, lorsqu'on compare, en déterminant statiquement une force, la force inconnue avec les forces connues, on utilise l'équation (5.3) pour $\bar{a}=0$; ensuite, l'hypothèse selon laquelle les relations établies pour la force au repos sont également valables pour le mouvement est une hypothèse complémentaire exigeant une vérification expérimentale qui s'effectue à l'aide de l'équation (5.3). Souvent la vérification expérimentale infirme cette hypothèse. C'est le cas pour les forces de frottement; il apparaît que le frottement statique (pour la vitesse $\bar{v}=0$) et le frottement en mouvement (pour $\bar{v}\neq 0$) peuvent être différents; c'est le cas également pour la force de traction qu'exerce un ressort sur le poids accroché. La loi donnant la force en fonction de l'allongement [formule (5.2)] et qui est valable pour des ressorts de masse quelconque lors des mesures statiques, ne s'applique pas au mouvement, les écarts étant d'autant plus forts que plus grande est la masse du ressort. Si la masse du ressort est faible devant celle du poids, la formule (5.2) peut s'appliquer dans le cas du mouvement du poids.

---

*) Dans la pratique, en déterminant les forces on se sert souvent du fait que le système de forces ne varie pas lorsqu'on communique à tout le système un mouvement de translation uniforme, étant donné que les accélérations ne s'en trouvent pas altérées.

Il est souvent impossible d'affirmer que la force se définit comme fonction du temps, de la position, de la vitesse et de l'accélération. En effet, considérons la force globale que l'eau exerce sur un canot animé d'un mouvement sinueux complexe sur la surface de l'eau. La force appliquée par l'eau au canot dépend du mouvement de l'eau défini par la loi globale du mouvement du canot. Supposons qu'au bout d'un certain temps (le temps peut être mesuré à partir du début du mouvement lorsque l'eau et le canot étaient au repos) la position, la vitesse et l'accélération du canot soient les mêmes pour deux mouvements différents. Evidemment on ne peut affirmer que les forces appliquées par l'eau au canot soient, à ce moment, égales; les forces peuvent différer sensiblement. Au cours du premier mouvement le canot a pu fortement perturber l'eau à un moment antérieur tandis que dans le second mouvement l'eau aurait été plus calme à l'endroit considéré. Il est clair que dans l'exemple cité les forces exercées par l'eau sur le canot dépendront fonctionnellement de la loi du mouvement, c'est-à-dire de toute l'histoire du mouvement; autrement dit on observera une sorte d'hérédité.

Ainsi donc les lois expérimentales de la nature analogues au principe de l'attraction universelle, à la loi de Hooke, etc., sont obtenues à partir de vastes classes de mouvements dans lesquels la grandeur de la force était définie comme le produit de la masse par l'accélération.

Par conséquent, dans les problèmes concrets où il s'agit de déterminer le mouvement, on ne peut pas envisager les forces indépendamment de l'équation $\bar{F}=m\bar{a}$ à laquelle on s'adresse dans les expériences correspondantes.

L'étude des phénomènes mécaniques peut se faire de façon analogue en prenant comme grandeur fondamentale l'énergie cinétique du système au lieu de la force. L'égalité

$$E=\Sigma\,\frac{mv^2}{2} \tag{5.6}$$

peut s'interpréter comme définition de l'énergie cinétique du système mécanique. En procédant à une étude expérimentale de certaines classes de mouvements d'un système mécanique donné on peut déceler la dépendance de la valeur de l'énergie E par rapport à certaines autres caractéristiques mécaniques. Ainsi dans le mouvement d'un système conservatif on constate que l'énergie cinétique peut être représentée comme une certaine fonction des coordonnées des points du système et d'une constante additive h dont la valeur délimite une certaine sous-classe dans l'ensemble de tous les mouvements possibles du système :

$$E=-V+h. \tag{5.7}$$

La grandeur V s'appelle énergie potentielle du système. L'égalité (5.6) et la loi (5.7) régissant le système conservatif conduisent à l'équation

$$\Sigma\,\frac{mv^2}{2}+V=h \tag{5.8}$$

traduisant la loi de conservation de l'énergie mécanique.

Actuellement on n'est pas encore en mesure de définir le mouvement mécanique à l'aide des relations (5.3) ou (5.7), car la science n'a pas encore complètement résolu les problèmes simples de savoir comment la force et l'énergie cinétique dépendent de l'état mécanique du système.

En mécanique rationnelle on suppose connues les lois régissant les forces ou l'expression de l'énergie potentielle. Les principales difficultés qui surgissent sont de l'ordre mathématique : il s'agit des méthodes d'intégration des équations du mouvement, de l'établissement de diverses équivalences et généralisations pouvant remplacer les lois expérimentales de départ*).

Le problème le plus important qui se pose lors de l'étude mécanique ou physique en général de nombreux phénomènes consiste à établir les relations entre les forces et les paramètres fondamentaux de la configuration du mouvement et, dans cette optique, à mettre en évidence les caractéristiques de définition et la possibilité même d'établir des relations de ce genre afin de les utiliser en pratique.

La découverte fondamentale de Newton fut de constater que le produit de la masse par l'accélération est une grandeur qui peut avoir une même valeur pour divers corps et divers mouvements ayant lieu dans divers endroits de l'espace à des vitesses différentes et, ce qui est essentiel, une grandeur qui se laisse déterminer expérimentalement en fonction du temps, de la position et des vitesses des points du système.

Pourtant, comme on l'a vu, déterminer la force en fonction des paramètres les plus simples du mouvement n'est en principe pas toujours possible. Aussi ne peut-on pas dans ces cas prendre d'autres caractéristiques du mouvement au lieu du produit de la masse par l'accélération et étudier leurs relations ?

Arrêtons-nous un peu sur la question des forces d'inertie. Soient différents systèmes de coordonnées en mouvement les uns par rapport aux autres. L'accélération a une valeur et une direction différentes dans deux systèmes de coordonnées animés de mouvements distincts. En cinématique on établit

*) A la fin du XVIIIe siècle les théoriciens ont concentré leur attention et leurs efforts sur l'analyse et l'élimination des difficultés mathématiques mentionnées (problèmes de la mécanique céleste, élaboration de la théorie générale des équations différentielles, principes variationnels, etc.). Les équations du mouvement de départ étaient envisagées sous forme générale; cela a favorisé l'opinion courante selon laquelle les phénomènes physiques peuvent être ramenés aux mouvements mécaniques et la mécanique est une science achevée. On voyait la difficulté principale dans l'intégration des équations différentielles de la mécanique. La fameuse proposition de Laplace disait : donnez les conditions initiales et cela suffira pour prédire tout l'avenir et reconstituer tout le passé. Pourtant on doit souligner que même dans le cadre de la mécanique classique le problème théorique de la position des équations différentielles du mouvement ne peut être considéré comme facile et en principe résolu. C'est précisément le problème de la formation des équations du mouvement, celui des forces appliquées, etc., c'est-à-dire du second membre des équations différentielles du mouvement qui représente l'objectif principal des recherches physiques. Ce problème n'est pas résolu dans bien des cas, même s'il admet les applications à la mécanique classique. Quand il existe une solution approchée acceptable, même pour les applications les plus simples, elle nécessite toujours des corrections.

la relation entre les accélérations des points relativement aux systèmes de coordonnées en mouvement relatif.

On peut déterminer expérimentalement la force en fonction des paramètres fondamentaux du mouvement dans un certain système de coordonnées, le plus souvent dans le système de coordonnées lié à la Terre ou au centre d'inertie du système solaire.

Si l'on connaît les lois régissant les forces dans un système de coordonnées, il est facile de trouver le produit de la masse par l'accélération, i.e. la force, dans tout système de coordonnées dont le mouvement par rapport au système initial est donné. Comme on le sait, on doit dans ce cas introduire les forces dites d'inertie. Pour un observateur lié invariablement à un système mobile les forces appliquées se composent des forces déterminées par rapport au système de coordonnées de l'expérience (système de coordonnées initial) et des forces d'inertie que l'opérateur ne peut distinguer, du point de vue mécanique, de toutes les autres forces.

§ 6. Structure des liaisons fonctionnelles entre les grandeurs physiques

Les lois physiques établies théoriquement ou directement dans l'expérience représentent des relations fonctionnelles entre les grandeurs caractérisant le phénomène étudié. Les valeurs numériques de ces grandeurs dimensionnées dépendent du choix du système d'unités de mesure lequel n'est pas lié à l'essence du phénomène. C'est pourquoi les relations fonctionnelles traduisant les effets physiques, indépendants du système d'unités de mesure, doivent posséder une structure particulière.

Soit une grandeur dimensionnée a, fonction des grandeurs dimensionnées indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$a=f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n); \tag{6.1}$$

certains de ces paramètres peuvent être variables dans le processus envisagé, d'autres constants.

Mettons en évidence la structure de la fonction $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en supposant que cette fonction traduit une certaine loi physique indépendante du système d'unités de mesure choisi*).

*) Soulignons que par hypothèse la relation fonctionnelle (6.1) n'exprime qu'une relation physique essentielle unique donnant la grandeur a en fonction des grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ indépendantes entre elles et qu'elle ne représente donc pas la forme générale d'une relation mathématique possible entre les grandeurs dimensionnées d'un certain ensemble indépendant du système d'unités de mesure choisi.

Par exemple, pour les grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n, g, P, m$ où g est l'accélération de la pesanteur, P le poids et m la masse d'un corps, à côté de (6.1) est valable la relation

$$a=f(a_1, a_2, \ldots, a_n)+\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ln \frac{P}{mg} \tag{6.1'}$$

qui est indépendante des unités de mesure choisies pour une fonction arbitraire $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$. Cependant l'égalité (6.1') se décompose en deux formules physiques différentes : la relation (6.1) et la relation $P=mg$, cette dernière pouvant être considérée comme

Supposons que les k premières grandeurs ($k \leq n$) parmi les grandeurs dimensionnées $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ont des dimensions indépendantes (le nombre des unités de mesure fondamentales doit être supérieur ou égal à k).

L'indépendance des dimensions signifie que la formule exprimant la dimension d'une des grandeurs ne peut pas être représentée sous forme d'un monôme de puissances, combinaison des formules de dimension des autres grandeurs. Par exemple, les dimensions de longueur L, de vitesse L/T et d'énergie ML^2/T^2 sont indépendantes entre elles; les dimensions de longueur L, de vitesse L/T et d'accélération L/T^2 sont liées entre elles. Le nombre des grandeurs mécaniques à dimensions indépendantes ne dépasse généralement pas trois. On suppose k égal au nombre maximum de paramètres à dimensions indépendantes de sorte que les dimensions des grandeurs $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ peuvent s'exprimer au moyen des dimensions des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Prenons k grandeurs indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pour grandeurs fondamentales et notons leurs dimensions par

$$[a_1]=A_1,\ [a_2]=A_2,\ \ldots,\ [a_k]=A_k.$$

Les dimensions des autres grandeurs auront la forme

$$[a]=A_1^{m_1}A_2^{m_2}\ldots A_k^{m_k},$$

$$[a_{k+1}]=A_1^{p_1}A_2^{p_2}\ldots A_k^{p_k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[a_n]=A_1^{q_1}A_2^{q_2}\ldots A_k^{q_k}.$$

Faisons maintenant varier les unités de mesure des grandeurs $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_k$ respectivement de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ fois; les valeurs numériques de

---

« parasite » dans notre propos. On connaît de nombreuses autres relations artificielles indépendantes des unités de mesure et donc superflues dans la formulation adoptée du problème.

On écrira la relation physique étudiée sous la forme (6.1) et on n'utilisera dans la suite que l'hypothèse que cette relation existe, en admettant qu'elle peut être non univoque dans le cas général.

Les questions concernant l'établissement de cette relation, théoriquement ou de l'expérience, n'ont aucune importance dans les développements ultérieurs. Pour cette raison l'analyse des relations entre les grandeurs dimensionnées sous forme implicite

$$\Phi(a, a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$$

ou sous la forme de plusieurs fonctions implicites pour les quantités $a, b, c, \ldots$

$$\Phi_1(a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n)=0,$$
$$\Phi_2(a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n)=0,$$
$$\Phi_3(a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$$

ne représente pas une discussion de la question sous une forme plus générale. Dans cette approche du problème croît le rôle des relations « parasites » et par là même les difficultés soulevées par la résolution du système des équations implicites, questions sans rapport avec l'essentiel du problème envisagé et qui ne facilitent nullement l'élaboration des résultats principaux de la théorie des dimensions.

ces grandeurs et des grandeurs $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ en nouvelles unités seront respectivement égales à

$$\begin{array}{ll} a'_1=\alpha_1 a_1, & a'=\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_k^{m_k}a, \\ a'_2=\alpha_2 a_2, & a'_{k+1}=\alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_k^{p_k}a_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_k=\alpha_k a_k, & a'_n=\alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\ldots\alpha_k^{q_k}a_n. \end{array}$$

En nouvelles unités de mesure la relation (6.1) s'écrira

$$\begin{gathered} a'=\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_k^{m_k}a=\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_k^{m_k}f(a_1, a_2, \ldots, a_n)= \\ =f(\alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\ldots\alpha_k^{p_k}a_{k+1}, \ldots, \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\ldots\alpha_k^{q_k}a_n). \end{gathered} \tag{6.2}$$

D'après cette égalité la fonction f est homogène dans les échelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_k$. Les échelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont arbitraires. Choisissons ces échelles de façon à réduire le nombre d'arguments dans la fonction f. Posons

$$\alpha_1=\frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2=\frac{1}{a_2}, \ldots, \quad \alpha_k=\frac{1}{a_k},$$

c'est-à-dire choisissons les unités de mesure de façon que les valeurs des k premiers arguments du second membre de la relation (6.2) soient égales à l'unité*). Autrement dit, en s'appuyant sur le fait que la relation (6.1) ne dépend pas, par hypothèse, des unités de mesure choisies, on établit un système d'unités de mesure tel que les k arguments de la fonction f aient des valeurs constantes fixes, égales à l'unité.

Dans ce système relatif d'unités de mesure les valeurs numériques des paramètres $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont données par les formules :

$$\Pi=\frac{a}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_k^{m_k}},$$

$$\Pi_1=\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\ldots a_k^{p_k}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Pi_{n-k}=\frac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\ldots a_k^{q_k}},$$

où $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les valeurs numériques des grandeurs considérées dans les anciennes unités de mesure. On voit aisément que les valeurs de Π, $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ ne dépendent pas du choix des unités de mesure de départ, étant donné qu'elles sont de dimension nulle relativement aux unités de

*) Nous admettons pour simplifier que les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont finis et non nuls. Les résultats qui suivent s'étendent aux cas où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ peuvent s'annuler ou devenir indéfinis si la fonction f est continue pour ces valeurs des arguments.

mesure $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Il est également évident que les valeurs de $\Pi, \Pi_1, \ldots$ $\ldots, \Pi_{n-k}$ ne dépendent point du choix de système d'unités de mesure au moyen desquelles sont exprimées les k unités de mesure des grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Par conséquent ces grandeurs peuvent être regardées comme adimensionnées.

En se servant du système d'unités de mesure relatif on peut conférer à la relation (6.1) la forme

$$\Pi = f(1, 1, \ldots, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}). \tag{6.3}$$

Ainsi donc la relation entre les $n+1$ grandeurs dimensionnées $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, relation indépendante du choix de système d'unités de mesure, se transforme en la relation entre les $n+1-k$ grandeurs $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ qui sont des combinaisons adimensionnées de $n+1$ grandeurs dimensionnées*). Ce résultat général auquel conduit la théorie des dimensions est connu sous le nom de théorème des produits de puissances.

Si l'on sait que la grandeur adimensionnée envisagée est une fonction d'un nombre de grandeurs dimensionnées, cette fonction ne peut dépendre que des combinaisons adimensionnées des grandeurs dimensionnées fondamentales.

Il est manifeste que dans la relation (6.3) on peut remplacer, en changeant la forme de la fonction f, le système de paramètres adimensionnés $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}$ par un autre système de paramètres adimensionnés, fonctions des $n-k$ paramètres $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$.

On voit aisément qu'à partir des n paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ parmi lesquels on n'a pas plus de k paramètres à dimensions indépendantes, il est impossible de former plus de $n-k$ combinaisons de puissance indépendantes. Cela découle directement de la relation (6.3) si l'on prend pour la grandeur a une quelconque des combinaisons adimensionnées formées, définie par les grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Toute relation physique entre les grandeurs dimensionnées peut être formulée comme une relation entre grandeurs adimensionnées. C'est pourquoi la méthode dimensionnelle peut être appliquée utilement à l'étude des problèmes mécaniques.

Plus le nombre de paramètres caractérisant la grandeur étudiée est restreint, plus restreinte est la dépendance fonctionnelle et plus simple est l'étude. En particulier, si les unités de mesure fondamentales sont en même nombre que les paramètres caractéristiques à dimensions indépendantes, la théorie dimensionnelle détermine entièrement cette dépendance, au facteur constant près. En effet, si $n=k$, c'est-à-dire si toutes les dimensions sont indépendantes, on ne peut pas former une combinaison sans dimension

---

*) Le résultat obtenu nécessite une correction au cas où la fonction $f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ subit une discontinuité pour des valeurs nulle ou infinie des k premiers arguments. Ces k premiers arguments de la relation (6.3) peuvent être identifiés à l'unité seulement en des points où les $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ne sont ni nuls, ni infinis; pour cette raison, en ces points, le nombre d'arguments essentiels du second membre de (6.3) peut dépasser $n-k$.

à partir des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alors la relation fonctionnelle (6.3) peut être mise sous la forme

$$a = c a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n},$$

où c est une constante adimensionnée et les exposants $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont déterminés sans peine à l'aide de la formule de dimension de a. Quant à la constante adimensionnée c, elle se détermine soit empiriquement, soit théoriquement, en résolvant le problème mathématique correspondant.

Il est clair que la théorie des dimensions se révèle d'autant plus fructueuse que le choix des unités de mesure fondamentales est plus riche.

On a vu précédemment qu'on peut choisir le nombre des unités de mesure fondamentales de façon arbitraire, mais l'augmentation de leur nombre entraîne l'introduction de constantes physiques supplémentaires qui doivent figurer parmi les paramètres caractéristiques. En augmentant le nombre d'unités de mesure fondamentales nous augmentons le nombre de constantes dimensionnées; dans le cas général la différence $n+1-k$, égale au nombre de paramètres adimensionnés dont on forme la relation physique, demeure constante.

Il s'avère utile d'augmenter le nombre d'unités fondamentales seulement au cas où des considérations supplémentaires mettent en lumière le caractère non essentiel des constantes physiques surgissant lorsqu'on introduit de nouvelles unités de mesure fondamentales. Par exemple, si dans le phénomène étudié se déroulent des processus mécaniques et thermiques, on peut introduire deux unités de mesure distinctes — la calorie et le joule — mais alors il y a lieu de prendre en considération la constante dimensionnée J, l'équivalent mécanique de la chaleur. Supposons maintenant que nous étudions la transmission de la chaleur dans un fluide parfait en écoulement. Dans ce cas il n'y a pas de transformation de l'énergie thermique en énergie mécanique ou inversement, de sorte que la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur ne s'introduira pas dans les processus thermiques et mécaniques. Si l'on pouvait modifier la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur, cela n'aurait aucune influence sur les valeurs des grandeurs caractéristiques. Par conséquent dans le cas considéré la constante J n'entrera pas dans les relations physiques et l'augmentation du nombre d'unités de mesure fondamentales permettra d'obtenir à l'aide de la théorie des dimensions une information supplémentaire importante.

On illustrera dans ce qui suit ces résultats par des exemples.

§ 7. Paramètres définissant une classe de phénomènes

Toute étude des phénomènes mécaniques commence par la schématisation, par la mise en relief des facteurs essentiels qui définissent les grandeurs auxquelles on s'intéresse et, dans le sens large du mot, par la proposition de modèles des processus à étudier à partir des notions et faits les plus simples, déjà connus et analysés. Une schématisation correcte est très souvent un problème ardu exigeant du chercheur une grande expérience,

une intuition et une analyse qualitative préalable du mécanisme des processus étudiés. Certains problèmes visent essentiellement à vérifier les hypothèses dont la validité est plus ou moins probable.

C'est par la mise en évidence des paramètres caractéristiques, par une analyse profonde de l'essentiel des relations et des lois qu'on arrive à utiliser lucidement et à commander les phénomènes de la nature dans le but de résoudre avec succès les multiples problèmes que la vie pose à l'humanité.

Diverses propriétés des corps et les lois physiques élémentaires qui jouent un rôle essentiel et régissent un phénomène sont traduites par certain nombre de grandeurs dimensionnées ou adimensionnées, variables ou constantes.

De même, les propriétés et le mouvement d'un système mécanique peuvent être exprimés à l'aide de paramètres et fonctions dimensionnés et sans dimension.

Dans un ensemble de différents systèmes mécaniques en mouvement il est toujours possible de délimiter de façon appropriée une classe de systèmes et mouvements admissibles telle qu'un système concret et son mouvement se définissent par un nombre fini de paramètres dimensionnés et adimensionnés. On peut toujours délimiter la classe de systèmes et mouvements admissibles en posant des conditions supplémentaires fixant des paramètres abstraits et définissant, sous forme adimensionnée, l'aspect des fonctions données du problème.

La théorie des dimensions fournit des résultats obtenus en appliquant des systèmes d'unités de mesure arbitraires ou spéciaux à la description des phénomènes physiques. C'est pourquoi en énumérant les paramètres caractérisant une classe de mouvements il est nécessaire d'indiquer tous les paramètres dimensionnés essentiels du phénomène, qu'ils conservent ou non leurs valeurs (en particulier, ce peuvent être des constantes physiques) pour différents mouvements de la classe délimitée. Il importe que les paramètres dimensionnés prennent des valeurs numériques différentes dans différents systèmes d'unités de mesure quoiqu'ils puissent être les mêmes pour tous les mouvements étudiés. Par exemple, si l'on considère les mouvements où le poids des corps est essentiel on doit tenir compte de l'accélération de la pesanteur g comme d'une constante physique dimensionnée bien que la valeur de g soit constante dans tous les mouvements réels. Une fois l'accélération de la pesanteur g introduite en qualité du paramètre caractéristique, on peut, sans rien compliquer, étendre artificiellement la classe de mouvements en envisageant les mouvements où l'accélération g prend des valeurs différentes. Ce procédé permet dans bien des cas de parvenir à des résultats qualitatifs d'une grande valeur pratique.

Comment donc composer le système de paramètres définissant une classe de phénomènes ?

Il est toujours facile de dresser la liste de paramètres caractérisant le phénomène si le problème est mathématiquement formulé. Pour cela il faut donner toutes les grandeurs dimensionnées et adimensionnées nécessaires et suffisantes pour que les valeurs numériques de toutes les grandeurs

inconnues puissent se déterminer à partir des équations du problème. Dans nombre de cas la liste des paramètres caractéristiques peut être composée sans écrire les équations du problème. On peut simplement établir les facteurs nécessaires pour la détermination complète de la grandeur inconnue dont les valeurs numériques sont parfois fournies par l'expérience.

La composition du système de paramètres nécessite, tout comme la position des équations du problème, la schématisation du phénomène.

Toutefois, l'application de la théorie des dimensions exige une information moins étendue que celle qui est nécessaire pour former les équations du mouvement du système mécanique. A un même système de paramètres caractéristiques peuvent correspondre des équations du mouvement différentes. Les équations du mouvement mettent en relief non seulement les paramètres dont dépendent les grandeurs inconnues mais contiennent implicitement toutes les relations fonctionnelles dont la recherche constitue un problème mathématique.

Il découle clairement de ces considérations que la théorie dimensionnelle est restreinte en son essence. A l'aide de cette théorie seule on ne peut pas établir les relations fonctionnelles entre des grandeurs adimensionnées.

Les résultats obtenus à l'aide de la théorie dimensionnelle ne changent pas si l'on modifie les équations du mouvement en multipliant leurs divers termes par certains nombres ou fonctions adimensionnés, positifs ou négatifs, dépendant du système de paramètres caractéristiques. Des modifications de ce genre dans les équations peuvent avoir une influence profonde sur le caractère des lois physiques*).

Tout système d'équations, expression mathématique des lois régissant un phénomène, peut être formulé comme une relation entre les grandeurs adimensionnées. Tous les résultats fournis par la théorie dimensionnelle demeurent invariables quels que soient les changements intervenus dans les lois physiques mises sous la forme de relations entre des grandeurs adimensionnées identiques. Le système de paramètres caractéristiques doit posséder la propriété d'être complet.

Parmi les paramètres caractéristiques l'on doit nécessairement trouver les grandeurs dont les dimensions permettent d'exprimer les dimensions de tous les paramètres dépendants**). Certains des paramètres essentiels peuvent être des constantes physiques dimensionnées. Pour illustrer ceci, considérons les paramètres à l'aide desquels se décrit l'état statique d'un gaz. On ne peut pas affirmer que l'état du gaz se détermine par deux grandeurs dimensionnées : la température absolue $T([T] = °C)$ et la densité $\varrho([\varrho] = M/L^3)$

*) Par exemple, si l'on intervertit les signes de certaines forces dans les équations du mouvement, cela peut occasionner des répercussions sensibles sur les lois de mouvement; les conclusions de la théorie dimensionnelle ne sont, par contre, nullement affectées par cette opération.

**) Si le système de paramètres caractéristiques n'est pas complet et si son extension est en principe impossible, cela signifie que la grandeur inconnue est soit nulle, soit infinie. Cette situation est typique pour le cas où l'on donne les conditions initiales du type « source » à l'aide de fonctions δ.

parce que la pression p est finie, non nulle et a une dimension indépendante de celles de la température et de la densité.

Supposons maintenant que l'état du gaz est défini par les valeurs de la température, de la densité et d'une constante physique, par exemple par la capacité thermique c'_v mesurée en unités mécaniques ($[c'_v]=L^2/T^2$ °C). En désignant par J kgfm/cal l'équivalent mécanique de la chaleur, on trouve

$$c'_v = Jc_v,$$

où c_v est la chaleur spécifique, exprimée en unités thermiques ($[c_v]=$ cal/masse·°C). La dimension de la pression peut s'exprimer par les dimensions de $T°$, ϱ et c'_v, ce qui prouve que notre supposition est admissible du point de vue de la théorie dimensionnelle. Comme les dimensions de $T°$, ϱ et c'_v sont indépendantes, l'hypothèse

$$p = f(T, \varrho, c'_v)$$

prouve immédiatement l'équation de Clapeyron

$$\frac{p}{c'_v \varrho T} = c \quad \text{ou} \quad p = \varrho RT,$$

où c est une constante adimensionnée et R désigne une constante dimensionnée $cc'_v = cJc_v$.

Ainsi donc l'équation de Clapeyron peut être regardée comme une conséquence de l'unique hypothèse que la pression, la densité, la température et la chaleur spécifique sont liées, indépendamment des valeurs des autres paramètres, par une relation ayant une signification physique. On donnera plus loin des exemples particuliers illustrant les procédés permettant de combiner les méthodes de la théorie des dimensions avec les raisonnements découlant de la symétrie et de la linéarité du problème, des propriétés mathématiques des fonctions pour de petites ou grandes valeurs des paramètres caractéristiques, etc.

CHAPITRE II

SIMILITUDE, SIMULATION ET QUELQUES EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA THÉORIE DIMENSIONNELLE

§ 1. Mouvement du pendule simple

Notre premier exemple, classique, est celui du mouvement du pendule simple.

Le pendule simple (fig. 1) est un point matériel pesant suspendu au bout d'un fil inextensible, de poids négligeable, fixé en son autre extrémité. Nous limitons la classe des mouvements possibles du pendule à des mouvements plans.

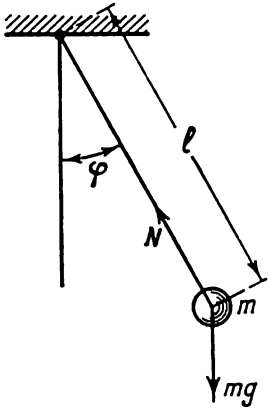


Fig. 1. Pendule simple

Introduisons les notations : l, la longueur du pendule; φ, l'angle que fait le fil avec la verticale; t, le temps; m, la masse du poids et N, la tension du fil. Si l'on néglige les résistances, le problème du mouvement du pendule se ramène à la résolution des équations

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{1.1}$$

$$m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg\cos\varphi \tag{1.2}$$

avec la condition initiale

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

c'est-à-dire qu'on prend pour le moment zéro celui où le pendule est écarté de l'angle φ_0 et la vitesse est égale à zéro.

Il découle des équations (1.1), (1.2) et de la condition initiale qu'en qualité de paramètres caractéristiques on peut prendre le système suivant :

$$t, l, g, m, \varphi_0.$$

Les valeurs numériques des autres grandeurs se déterminent complètement à l'aide des valeurs de ces paramètres. De sorte qu'on peut écrire

$$\varphi = \varphi(t, \varphi_0, l, g, m), \quad N = mgf(t, \varphi_0, l, g, m), \tag{1.3}$$

où φ et f sont des fonctions adimensionnées.

Les valeurs numériques des fonctions φ et f ne doivent pas dépendre des unités de mesure. La forme de ces fonctions peut être établie soit en résolvant les équations (1.1) et (1.2), soit empiriquement.

Les considérations générales exposées précédemment montrent que les cinq arguments des fonctions φ et f peuvent être ramenés à deux arguments seulement, qui constituent les combinaisons sans dimension des t, l, g, m et φ_0, vu qu'il y a trois unités de mesure indépendantes.

A partir des grandeurs t, l, g, m et φ_0 on peut former deux combinaisons adimensionnées indépendantes :

$$\varphi_0 \quad \text{et} \quad t\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{1.4}$$

Toutes les autres combinaisons adimensionnées des t, l, g, m et φ_0 ou de toutes autres grandeurs définies par ces paramètres seront fonction des combinaisons (1.4). Donc on peut écrire

$$\varphi=\varphi\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \tag{1.5'}$$

$$N=mgf\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \tag{1.5''}$$

Les formules (1.5) obtenues à l'aide de la méthode dimensionnelle montrent que la loi du mouvement est indépendante de la masse du poids et la tension du fil est directement proportionnelle à la masse du poids. Par ailleurs, ces résultats découlent directement des équations (1.1) et (1.2). La quantité $t\sqrt{g/l}$ peut être regardée comme le temps exprimé dans un système d'unités de mesure spécial où la longueur du pendule et l'accélération de la pesanteur sont posées égales à l'unité.

Désignons par T un intervalle du temps caractéristique, par exemple celui pendant lequel le pendule couvre la distance entre une position extrême et la position verticale ou celui entre deux phases égales, c'est-à-dire la période d'oscillations, etc. (que le mouvement soit oscillatoire peut être admis comme hypothèse ou comme résultat connu par des données supplémentaires). On a

$$T=f_1(\varphi_0, l, g, m)=\sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2(\varphi_0, l, g, m).$$

La fonction f_2 représente une grandeur adimensionnée et comme à partir des l, g et m on ne peut pas former de combinaisons adimensionnées il en découle que la fonction f_2 ne dépend pas de l, g, m. Par conséquent

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot f_2(\varphi_0). \tag{1.6}$$

La formule (1.6) donne le temps T en fonction de la longueur du pendule. La méthode dimensionnelle ne peut fournir la forme de la fonction $f_2(\varphi_0)$. On la détermine soit théoriquement, à partir de l'équation (1.1), soit expérimentalement.

La formule (1.6) peut se déduire directement de la relation (1.5'). En effet, pour une période d'oscillations la relation (1.5') donne

$$\varphi_0=\varphi\left(\varphi_0,\ T\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

En résolvant cette équation on obtient la formule (1.6).

Si T est la période d'oscillations, les considérations de symétrie permettent de conclure que la valeur de la période ne dépend pas du signe de φ_0, i.e.

$$f_2(\varphi_0)=f_2(-\varphi_0).$$

Ainsi la fonction f_2 est une fonction paire de l'argument φ_0. En supposant la fonction $f_2(\varphi_0)$ régulière pour des φ_0 petits, on peut écrire

$$f_2(\varphi_0)=c_1+c_2\varphi_0^2+c_3\varphi_0^4+\ldots \tag{1.7}$$

Pour les petites oscillations les termes de puissances plus élevées que deux en φ_0 peuvent être rejetés, d'où la formule suivante de la période T:

$$T=c_1\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1.8}$$

La résolution de l'équation (1.1) donne $c_1=2\pi$. Ainsi on voit que pour les petites oscillations du pendule la méthode dimensionnelle donne la formule de la période du pendule au facteur constant près.

Les formules (1.5) et (1.6) demeurent valables également dans le cas où au lieu de l'équation (1.1) on prend l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\,f(\varphi),$$

où $f(\varphi)$ est une fonction quelconque de φ. D'une façon générale, la validité des formules (1.5) et (1.6) découle de la seule condition selon laquelle la configuration du mouvement se définit par les paramètres

$$t,\ l,\ g,\ m,\ \varphi_0.$$

Pour établir ce système de paramètres on s'est servi des équations du mouvement; or on aurait pu le faire sans recourir à ces dernières. En effet, pour caractériser le pendule il faut indiquer l et m. Ensuite, il faut introduire g, la pesanteur étant fondamentale pour le phénomène étudié. Enfin il est nécessaire d'indiquer φ_0 et t, car le mouvement et la configuration du mouvement se définissent par l'écart initial φ_0 et dépendent du moment actuel t.

§ 2. Ecoulement d'un fluide pesant par un déversoir

Traitons le problème de l'écoulement laminaire d'un fluide pesant par un déversoir (fig. 2) constitué par une paroi verticale munie d'une ouverture triangulaire symétrique par rapport à la verticale, l'angle de l'ouverture α étant de 90°. Le fluide s'écoule sous l'effet de la chute h égale à la hauteur

du fluide au-dessus du sommet du triangle, en des points éloignés de l'ouverture du déversoir. Pour simplifier on suppose le réservoir très grand de sorte que l'écoulement du fluide peut être considéré comme stationnaire. Dans un écoulement laminaire, l'inertie et la pondérabilité du fluide qui se caractérisent par les valeurs de l'accélération de la pesanteur g et de la densité ϱ jouent un rôle déterminant.

L'écoulement stationnaire par le déversoir considéré est complètement défini par les paramètres suivants :

$$\varrho, g, h.$$

Le poids du fluide Q s'écoulant par l'ouverture du déversoir par unité de temps serait fonction de ces paramètres seulement :

$$Q=f(\varrho, g, h).$$

La méthode dimensionnelle permet aisément d'établir la forme de cette fonction. En effet, la dimension de Q est kgf/s. La combinaison $\varrho g h^3\sqrt{g/h}$ a également la dimension kgf/s. Donc le rapport

$$\frac{Q}{\varrho g^{3/2}h^{5/2}}$$

est une quantité adimensionnée. Ce rapport est une fonction des grandeurs ϱ, g, h qui ne peuvent pas former de combinaisons sans dimension; on peut donc écrire :

$$\frac{Q}{\varrho g^{3/2}h^{5/2}}=C$$

ou

$$Q=C\varrho g^{3/2}h^{5/2}, \tag{2.1}$$

où C est une constante absolue qu'il est plus simple de tirer de l'expérience. La formule obtenue détermine complètement le débit de l'écoulement en fonction de la chute h et de la densité ϱ.

On peut élargir la classe de mouvements étudiés en admettant les déversoirs aux angles α différents. Le système de paramètres caractéristiques comporte alors, en outre, l'angle α et la formule (2.1) prend la forme

$$Q=C(\alpha)\varrho g^{3/2}h^{5/2}, \tag{2.2}$$

c'est-à-dire que le coefficient C sera fonction de l'angle α.

Si l'ouverture du déversoir est un rectangle de largeur b, le système de paramètres caractéristiques sera

$$\varrho, g, h, b.$$

Toutes les grandeurs adimensionnées se déterminent par le paramètre h/b. La formule (2.1) est alors remplacée par la formule suivante :

$$Q=f\left(\frac{h}{b}\right)\varrho g^{3/2}h^{5/2}. \tag{2.3}$$

On peut déterminer la fonction $f(h/b)$ expérimentalement en observant l'écoulement par un déversoir de largeur b variable mais de h constant. Ayant ainsi déterminé la fonction $f(h/b)$, il est possible d'appliquer la formule (2.3) aux cas où la largeur b est constante mais la chute h est variable, c'est-à-dire aux cas où l'expérience n'a pas été faite.

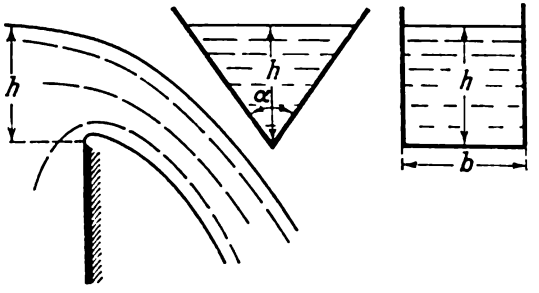


Fig. 2. Ecoulement d'un liquide pesant par-dessus un déversoir

Cet exemple montre qu'on doit à la méthode dimensionnelle des indications précieuses dans l'élaboration des expériences, car elle permet d'en diminuer le nombre et par là même d'économiser des moyens et du temps. Les variations de certaines grandeurs peuvent être remplacées dans l'expérience par les variations des autres. L'expérience faite avec l'eau permet d'expliquer exhaustivement le phénomène de l'écoulement du pétrole, du mercure, etc.

§ 3. Ecoulement du fluide dans un tube

L'étude de l'écoulement des fluides dans les tubes, en hydraulique, a fait ressortir d'une façon particulièrement claire, pour la première fois, le rôle important des méthodes de la théorie dimensionnelle et de similitude. Malgré l'importance pratique et la simplicité de raisonnements de la théorie dimensionnelle, son application aux problèmes de l'hydraulique, qui fut si fructueuse et qui constitua un important pas en avant dans l'évolution de l'hydraulique, n'a été faite qu'à la fin du XIXe siècle, dans les travaux de O. Reynolds*).

On se servit longtemps en hydraulique de nombreuses formules empiriques proposées par divers auteurs. Ces formules contenaient des constantes dimensionnées dont les valeurs étaient données par les conditions particulières de l'expérience et par les propriétés des fluides.

Les procédés dimensionnels joints à une formulation plus précise et plus générale du problème ont permis d'accorder et de réunir plusieurs lois empiriques décrivant l'écoulement de divers fluides, à des températures et vitesses variées, dans des tubes de diamètre variable.

*) O. Reynolds, Phil. Trans. Roy. Soc., 1883 et 1885.

Schématisons et formulons le problème. Définissons une classe d'écoulements par les conditions suivantes. Les tubes sont cylindriques et leurs sections droites sont de forme constante (fig. 3). Par conséquent, le tube et sa section droite sont complètement définis si l'aire de la section ou une dimension linéaire a quelconque sont données. Les tubes circulaires sont caractérisés par le rayon ou le diamètre. On suppose le tube suffisamment long pour ne pas tenir compte des effets de bout. En idéalisant le phénomène on admet que le tube est de longueur infinie.

Quant à l'écoulement, on le suppose stationnaire.

On suppose ensuite que la compressibilité du fluide n'est pas essentielle pour les phénomènes étudiés; c'est pourquoi on considérera l'écoulement d'un fluide incompressible. On tiendra compte des propriétés d'inertie et de

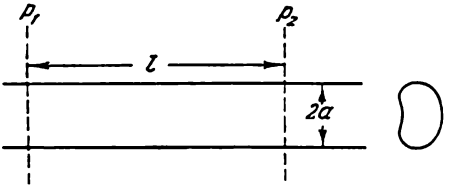


Fig. 3. Ecoulement d'un fluide incompressible dans un tube cylindrique

viscosité du fluide en les caractérisant par la densité ϱ et le coefficient de viscosité μ. Comme ce dernier est fonction de la température, on tiendra compte également de l'influence de la température*).

Enfin, pour définir l'écoulement du fluide il suffit de donner soit la chute de pression le long du tube, soit le débit du fluide par unité du temps dans la section droite du tube, soit la vitesse moyenne $\bar{u}$ du fluide le long de la section droite, etc.

Ainsi donc le tube, le fluide et la configuration générale de l'écoulement se définissent par le système de paramètres

$$\varrho,\ \mu,\ a,\ \bar{u}.$$

Toutes les caractéristiques mécaniques de l'écoulement sont fonction de ces paramètres.

Prenons par exemple la chute de pression le long du tube. La chute de pression par unité de longueur du tube est définie comme

$$\frac{p_1-p_2}{l},$$

où p_1 et p_2 sont les pressions dans les sections du tube distantes de l.

*) Ici on tient compte de la température en la supposant uniforme dans toute la masse du fluide.

La combinaison

$$\frac{p_1-p_2}{l\dfrac{\varrho\bar{u}^2}{2a}}=\psi$$

est une grandeur sans dimension, elle s'appelle coefficient de résistance du tube.

La résistance d'un tronçon de tube de longueur l se met sous la forme

$$P=(p_1-p_2)S=\psi\frac{l}{a}S\frac{\varrho\bar{u}^2}{2}, \tag{3.1}$$

où S est l'aire de la section droite du tube.

Les paramètres caractéristiques ϱ, μ, a et $\bar{u}$ forment une seule combinaison adimensionnée

$$\frac{\bar{u}a\varrho}{\mu}=\mathbf{R}$$

dite nombre de Reynolds. Toutes les grandeurs adimensionnées, dépendant des quatre paramètres indiqués, sont fonction du nombre de Reynolds. En particulier,

$$\psi=\psi(\mathbf{R}). \tag{3.2}$$

Les problèmes concernant la détermination de la résistance du tube ou du débit du fluide en fonction de la chute de pression se ramènent à la recherche de la dépendance fonctionnelle $\psi(\mathbf{R})$. Celle-ci peut être établie expérimentalement, en mesurant la résistance en fonction de la vitesse (ou du débit du fluide écoulé) de l'écoulement de l'eau dans un tube quelconque. Les résultats obtenus peuvent servir dans l'étude des écoulements d'autres fluides et dans les tubes de diamètres différents. Ainsi par exemple, d'après les données expérimentales obtenues pour l'écoulement de l'eau on peut souvent résoudre (lorsque la compressibilité est non essentielle, i.e. lorsque la vitesse d'écoulement est sensiblement inférieure à celle du son) les problèmes concernant l'écoulement de l'air dans un tube, etc. (fig. 4).

L'expérience montre qu'il faut distinguer deux régimes d'écoulement tout à fait différents : le régime laminaire et le régime turbulent. Lors d'un écoulement laminaire dans un tube cylindrique les éléments fluides se déplacent suivant des droites parallèles aux génératrices du tube; lors d'un régime turbulent on observe un mélange désordonné du fluide dans une direction perpendiculaire aux génératrices du tube. Un courant turbulent ne peut être considéré comme stationnaire qu'en moyenne.

Dans nombre de cas l'écoulement laminaire dans un tube n'est pas suffisamment stable ou il est tout simplement instable et cède la place à l'écoulement turbulent.

La stabilité est une propriété caractéristique de l'écoulement du fluide dans son ensemble; pour les tubes lisses cette propriété doit donc être définie par le nombre de Reynolds $\mathbf{R}$. L'expérience confirme cette conclusion. Pour les petites valeurs du nombre de Reynolds l'écoulement laminaire

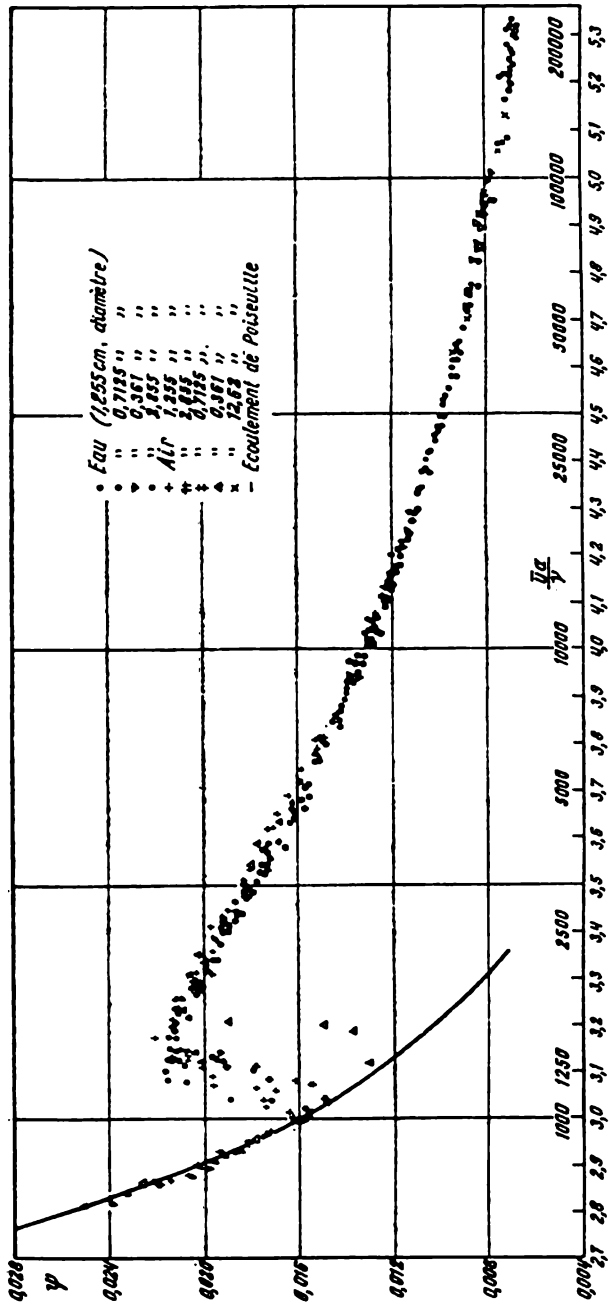


Fig. 4. Données expérimentales sur le coefficient de résistance des tubes ronds cylindriques (données de Stanton et Pannel); a est le rayon du tube, $\nu = \mu/\varrho$.

est stable, pour les grandes valeurs il est instable. Le régime d'écoulement est défini par le nombre de Reynolds. La limite de stabilité d'un écoulement laminaire se caractérise par un nombre de Reynolds qu'on appelle critique. Pour les tubes cylindriques circulaires la valeur critique du nombre de Reynolds est de l'ordre de $\mathbf{R}=1000$ à 1300.

Le régime laminaire est propre aux écoulements d'un fluide très visqueux, à faibles vitesses, dans les tubes de petits diamètres (par exemple, dans les tubes capillaires). Le régime turbulent est caractéristique pour les fluides à faible viscosité animés de grandes vitesses dans les tubes de grands diamètres.

Il découle des données expérimentales que la fonction $\psi(\mathbf{R})$ a deux branches dont l'une correspond au régime laminaire et l'autre au régime turbulent de l'écoulement. A l'approche de la valeur critique du nombre de Reynolds il y a une région transitoire.

Lors d'un écoulement laminaire dans un tube cylindrique toutes les particules fluides suivent des lignes droites, parallèles à l'axe du tube, à vitesse constante, donc avec une accélération nulle. Cet écoulement est dit de Hagen—Poiseuille. L'inertie du fluide traduite par le paramètre ϱ ne peut se manifester que lorsque l'accélération diffère de zéro*), donc dans un écoulement laminaire la résistance ne doit pas dépendre de ϱ. Par conséquent, le second membre de (3.1) ne doit pas dépendre de ϱ, d'où l'on conclut que la densité ϱ dans l'égalité (3.1) doit être simplifiée, ce qui confère à la fonction $\psi(\mathbf{R})$ la forme

$$\psi=\frac{C}{\mathbf{R}}=\frac{C\mu}{\varrho a\bar{u}}, \tag{3.3}$$

où C est une constante adimensionnée définie par la configuration de la section droite du tube; a le rayon du tube. Dans le cas d'un tube rond la théorie donne aisément $C=16$.

Par conséquent, pour un écoulement laminaire la résistance du tube se traduit par la formule

$$P=\frac{1}{2}\frac{S}{a^2}C\mu l\bar{u}=C_1\mu l\bar{u}, \tag{3.4}$$

où C_1 est une constante adimensionnée dépendant de la forme de la section droite du tube. La formule (3.4) s'obtient sans peine directement si l'on prend comme paramètres de définition uniquement les trois grandeurs : a, μ, $\bar{u}$ et si l'on tient aussi compte de ce que P est proportionnel à l.

Si l'on a la chute de pression sollicitant le fluide, il s'avère plus commode de prendre comme paramètres de définition

$$\varrho,\ \mu,\ a \quad \text{et} \quad i=\frac{p_1-p_2}{l}.$$

*) On sait que les équations du mouvement contiennent la densité et l'accélération seulement dans un produit.

Dans ce cas le régime d'écoulement est défini par le paramètre adimensionné

$$\frac{\varrho i a^3}{\mu^2} = \mathrm{J}.$$

On voit à partir de la formule (3.1) que

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\,\mathrm{R}^2 \psi(\mathrm{R}). \tag{3.5}$$

Cette relation donne J en fonction de R par l'intermédiaire de $\psi(\mathrm{R})$. Désignons par

$$Q = \bar{u} S$$

le volume du fluide s'écoulant par unité de temps à travers la section droite du tube (dit débit volumique du tube). La combinaison adimensionnée

$$\frac{Q\varrho}{\mu a} = \mathrm{R}\,\frac{S}{a^2}$$

est fonction de la quantité J, i.e.

$$Q = \frac{\mu a}{\varrho} f(\mathrm{J}). \tag{3.6}$$

La forme de la fonction $f(\mathrm{J})$ se laisse facilement déterminer pour un écoulement laminaire. Avec le concours des formules (3.3) et (3.5) on trouve

$$Q = \frac{2}{C}\,\frac{S}{a^2}\,\frac{i a^4}{\mu} = C_2\,\frac{i a^4}{\mu}, \tag{3.7}$$

où la constante adimensionnée C_2 dépend de la forme de la section droite du tube. Pour un tube rond

$$C_2 = \frac{\pi}{8}.$$

La formule (3.7) traduit la loi de Poiseuille établie expérimentalement par Hagen en 1839 et par Poiseuille en 1840. La concordance de cette formule avec l'expérience apporte une confirmation importante de la validité de la loi du frottement visqueux dans le fluide et de la schématisation initiale du phénomène.

§ 4. Mouvement d'un corps dans un fluide

La schématisation du problème du mouvement d'un avion, d'un sous-marin, etc., est liée au problème du mouvement uniforme de translation d'un corps solide au sein d'une masse fluide illimitée remplissant tout l'espace extérieur au corps.

Fixons la forme géométrique de la surface limitant le corps; dès lors, pour donner complètement la surface du corps il suffit de définir une certaine longueur caractéristique d. Envisageons une classe de mouvements de translation du corps, parallèles à un certain plan fixe. Désignons par v

et α la valeur et la direction de vitesse du mouvement par rapport à ce plan (fig. 5). Supposons le fluide incompressible. L'inertie et la viscosité du fluide seront prises en considération. Pour simplifier, posons nulles les forces massiques. La distribution de la pression le long de la surface du corps et les forces résultantes appliquées par le fluide au corps dépendent de la configuration du mouvement perturbé du fluide.

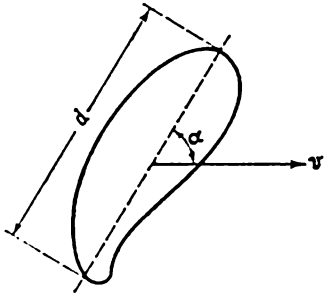


Fig. 5. Mouvement d'un solide dans un fluide

Pour un corps de forme donnée la configuration stationnaire de l'écoulement du fluide est définie par le système de cinq paramètres*)

$$d,\ v,\ \alpha,\ \varrho,\ \mu.$$

Toutes les grandeurs mécaniques adimensionnées liées à l'écoulement du fluide peuvent être considérées comme fonctions de deux paramètres adimensionnés : l'angle d'attaque et le nombre de Reynolds

$$\frac{v\,d\varrho}{\mu}=\mathbf{R}.$$

Désignons par W la force qu'exerce le fluide sur le corps (dans ce qui suit on peut indifféremment entendre par W la résistance résultante ou bien l'une de ses composantes : la résistance frontale dirigée contre le sens de la vitesse ou la portance perpendiculaire à la vitesse). Il découle du théorème général de la théorie dimensionnelle que la quantité $W/\varrho d^2v^2$ est une fonction de l'angle α et du nombre de Reynolds $\mathbf{R}$. C'est pourquoi

$$W=\varrho\, d^2v^2 f(\alpha, \mathbf{R}). \tag{4.1}$$

L'établissement de la fonction $f(\alpha, \mathbf{R})$ constitue un problème important de la mécanique des fluides et de l'aérodynamique théorique et expérimentale.

---

*) On n'introduit pas la pression à l'infini p_0 que l'on peut donner arbitrairement, pour la raison suivante. Le fluide étant incompressible, la variation de p_0 ne peut modifier le champ des vitesses. Au lieu de la pression totale p on peut toujours se borner à envisager uniquement la différence des pressions $p-p_0$. D'où il est évident que la quantité p_0 est non essentielle et donc peut ne pas figurer comme paramètre de définition. Cependant, si l'écoulement du fluide est accompagné d'un phénomène de cavitation lié à la vaporisation du fluide dans les domaines de pression basse, on est alors obligé d'inclure la quantité p_0-p', où p' est la tension de la vapeur du fluide à la température donnée. Pour un fluide compressible le système de paramètres caractéristiques doit comprendre p_0 ou un autre paramètre équivalent.

Dans un écoulement accompagné de cavitation un autre paramètre adimensionné s'avère essentiel, $\varkappa=2(p_0-p')/\varrho v^2$. Dans les expériences sur l'influence du nombre de cavitation $\varkappa$, la variation de celui-ci peut être effectuée soit par variation de p_0, soit par celle de v, soit artificiellement, en faisant varier p'. On peut également prendre différents fluides et changer la densité ϱ.

Pour un système de paramètres donné l'influence de la viscosité sur le mouvement n'est de toute évidence relevée que par l'intermédiaire du nombre de Reynolds.

La forme de la formule $\mathbf{R} = v\, d\varrho/\mu$ permet de dégager quelques conséquences générales concernant le rôle de la viscosité du fluide lorsque la vitesse ou les dimensions du corps augmentent. Par exemple, le nombre de Reynolds augmente avec l'augmentation de la vitesse ou des dimensions du corps. Or, pour que la viscosité joue le même rôle il faut que le nombre de Reynolds demeure constant car toute variation de ce dernier peut être attribuée à la variation du coefficient de viscosité; si le produit $v\, d\varrho$ augmente, alors pour conserver constant le nombre de Reynolds il faut augmenter le coefficient de viscosité μ. Par conséquent pour une même vitesse du corps l'écoulement du miel (μ/ϱ grand) engendré par le mouvement d'un grand corps est analogue à l'écoulement de l'eau (μ/ϱ petit) engendré par le mouvement d'un petit corps; de même le mouvement du corps dans le miel à grande vitesse est analogue au mouvement du même corps dans l'eau à petite vitesse. L'analogie entre les mouvements s'exprime par le fait que toutes les grandeurs adimensionnées sont les mêmes pour ces mouvements.

Ensuite, ces considérations montrent avec évidence que pour un même fluide l'effet de viscosité diminue à mesure qu'augmentent la vitesse et les dimensions du corps qui s'y meut*). L'étude théorique et les données expérimentales montrent que lorsque le nombre de Reynolds est élevé, le rôle de la viscosité du fluide s'estompe pour devenir dans certains cas non essentiel. En négligeant la viscosité, i.e. en posant $\mu = 0$, on arrive à la notion de fluide parfait.

Dans les problèmes du mouvement d'un corps au sein d'un fluide parfait le nombre de paramètres de définition se réduit à quatre :

$$d,\ \alpha,\ \varrho,\ v.$$

Pour un fluide parfait toutes les variables adimensionnées sont définies par l'angle d'attaque α, aussi la formule (4.1) est-elle remplacée par la formule

$$W = \varrho\, d^2 v^2 f_1(\alpha). \tag{4.2}$$

On voit donc qu'un corps se mouvant dans un fluide parfait subit de la part de ce dernier des forces proportionnelles au carré de la vitesse. Pour un fluide visqueux, le nombre de Reynolds étant suffisamment grand, cette loi n'est valable qu'approximativement.

Pour les corps de formes différentes les fonctions $f(\alpha, \mathbf{R})$ et $f_1(\alpha)$ des formules (4.1) et (4.2) dépendent sensiblement, outre l'angle d'attaque, des paramètres abstraits définissant la forme géométrique du corps. Les données expérimentales concernant l'influence du nombre de Reynolds sur le coefficient de résistance sont représentées sur les figures 6 et 7. La

*) On admet dans le cas considéré que, toutes conditions étant égales, l'effet de la viscosité diminue lorsque s'abaisse le coefficient de viscosité.

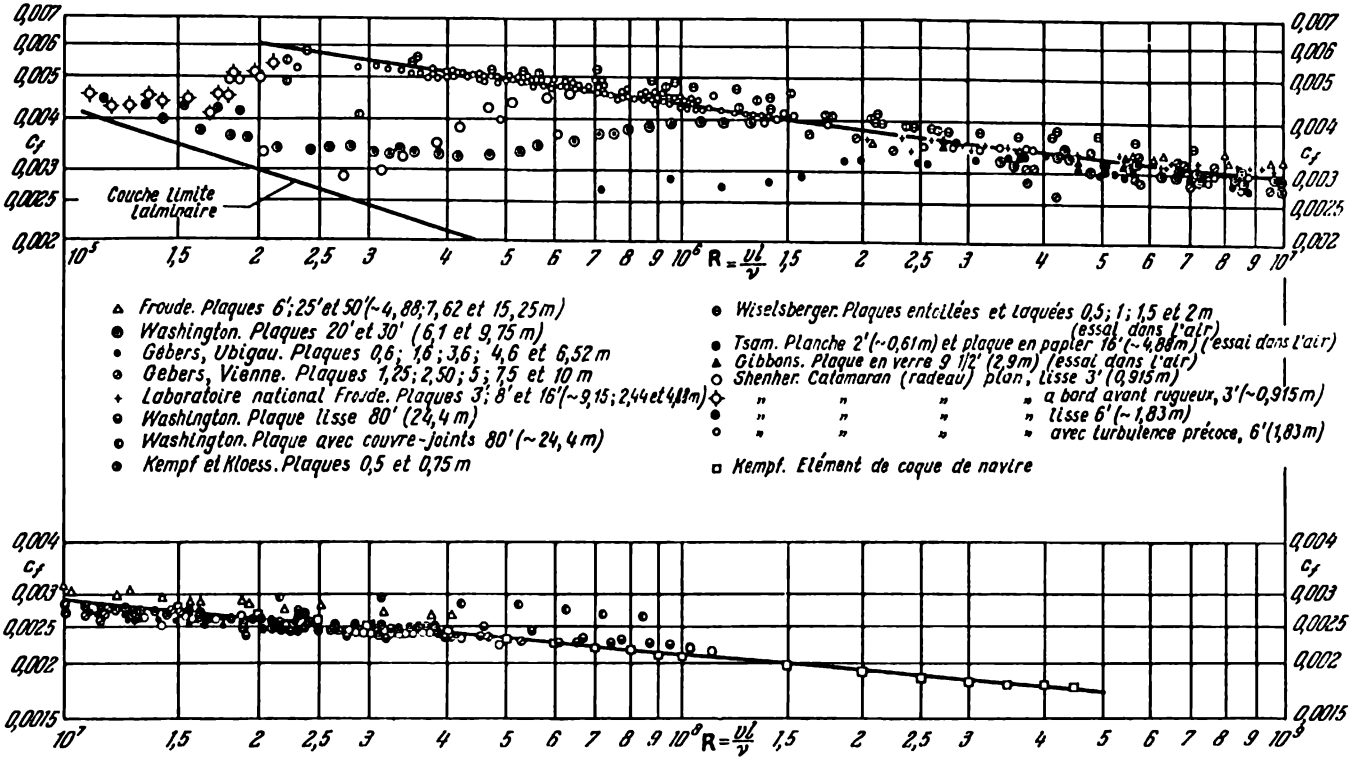


Fig. 6. Coefficient de résistance $c_f = \dfrac{W}{lb\dfrac{\varrho v^2}{2}}$ des plaques plates carrées remorquées parallèlement à leur plan (l est la dimension mesurée dans la direction de la vitesse; b la largeur de la plaque)

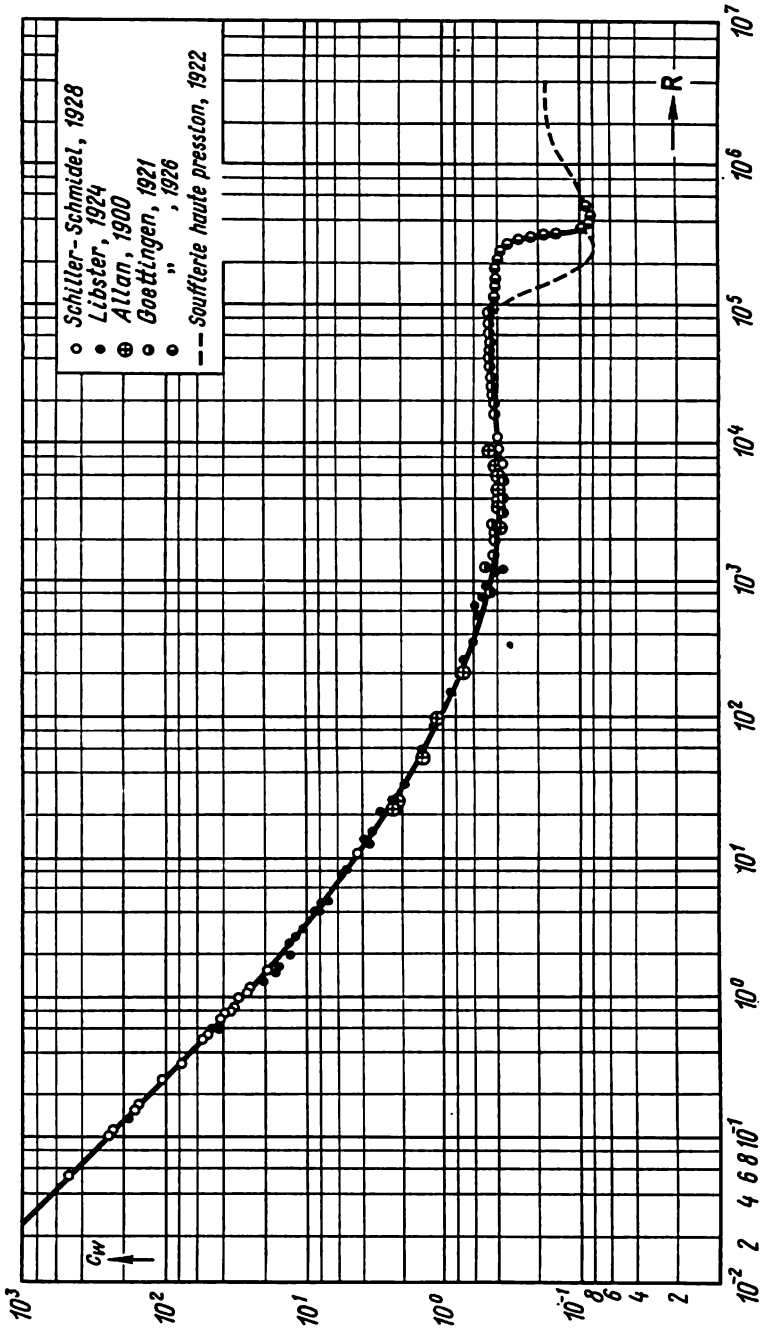


Fig. 7. Coefficient de résistance $c_W = \dfrac{W}{\dfrac{\pi d^2}{4}\,\dfrac{\varrho v^2}{2}}$ d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds $R = \dfrac{vd}{\nu}$
(d est le diamètre de la sphère)

figure 8 montre comment varient la résistance frontale et la portance des ailes en fonction de l'angle d'attaque.

Considérons maintenant les mouvements très lents des corps, autrement dit les cas où le nombre de Reynolds est de faible valeur.

A mesure que diminue le nombre de Reynolds le rôle des forces visqueuses devient plus important. Négliger les forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses équivaut à supposer non essentiel le paramètre ϱ. Dans ce cas le système de paramètres de définition se compose de quatre paramètres

$$d, \alpha, v, \mu,$$

de sorte que toutes les caractéristiques adimensionnées seront également fonction du seul angle d'attaque α. Par conséquent

$$W = \mu\, dv f_2(\alpha). \qquad (4.3)$$

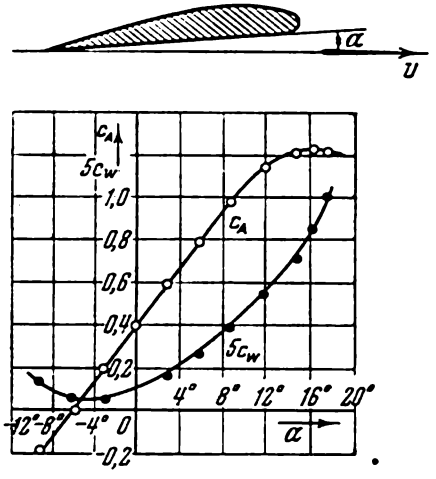


Fig. 8. Courbes types donnant les coefficients de portance $c_A = 2A/\varrho S v^2$ et de résistance $c_W = 2W/\varrho S v^2$ d'une aile en fonction de l'angle d'attaque α (S est la section de l'aile)

D'où il vient clairement que la résistance frontale et la portance sont proportionnelles à la vitesse, au coefficient de viscosité et à l'échelle linéaire d. Cette loi que l'on peut nommer loi de Stokes s'accorde bien avec l'expérience pour les petits corps se déplaçant à petites vitesses; tel est le cas de la sédimentation des petites particules dans un liquide.

Pour la sphère la fonction

$$f_2(\alpha) = \text{const} = c,$$

autrement dit, elle est indépendante de l'angle α. La valeur théorique du coefficient c pour les mouvements lents de la sphère dans les hypothèses admises (qui se réduisent à négliger les termes massiques dans les équations de Navier-Stokes) a été calculée par Stokes et s'est trouvée égale à $c = 3\pi$ (si d est le diamètre de la sphère).

Ainsi donc, on voit que la théorie dimensionnelle permet d'établir la forme de la fonction $f(\alpha, \mathbf{R})$ par rapport au nombre de Reynolds $\mathbf{R}$ pour les très petites et très grandes valeurs. Lorsque $\mathbf{R} \to \infty$, on est en présence du fluide parfait; dans ce cas la fonction $f(\alpha, \mathbf{R})$ tend vers une certaine fonction $f_1(\alpha)$ indépendante du nombre de Reynolds. Les régimes de mouvement correspondant aux petits nombres de Reynolds sont caractérisés essentiellement par la viscosité du fluide tandis que l'inertie de ce dernier joue un rôle secondaire : les valeurs de μ sont grandes, celles de ϱ sont

petites. A la limite, pour $\varrho=0$ on a la formule (4.3); en posant $\varrho\neq 0$ on déduit de cette formule

$$W=\varrho\, d^2 v^2 \frac{f_2(\alpha)}{v\, d\varrho/\mu}.$$

D'où il découle que pour les petits nombres de Reynolds une formule de la forme

$$f(\alpha, \mathrm{R})=\frac{f_2(\alpha)}{\mathrm{R}} \tag{4.4}$$

doit être valable. Cette relation représente une conséquence de la loi de Stokes. Une confrontation des données expérimentales avec la loi de Stokes pour la sphère est illustrée sur la figure 9.

On a démontré à l'aide de la théorie dimensionnelle que si l'on néglige les termes massiques dans les équations de Navier-Stokes, la loi de Stokes (4.3) est valable pour les corps de forme quelconque.

La fonction $f_2(\alpha)$ peut être déterminée expérimentalement ou théoriquement lorsqu'on résout les équations simplifiées de Navier-Stokes.

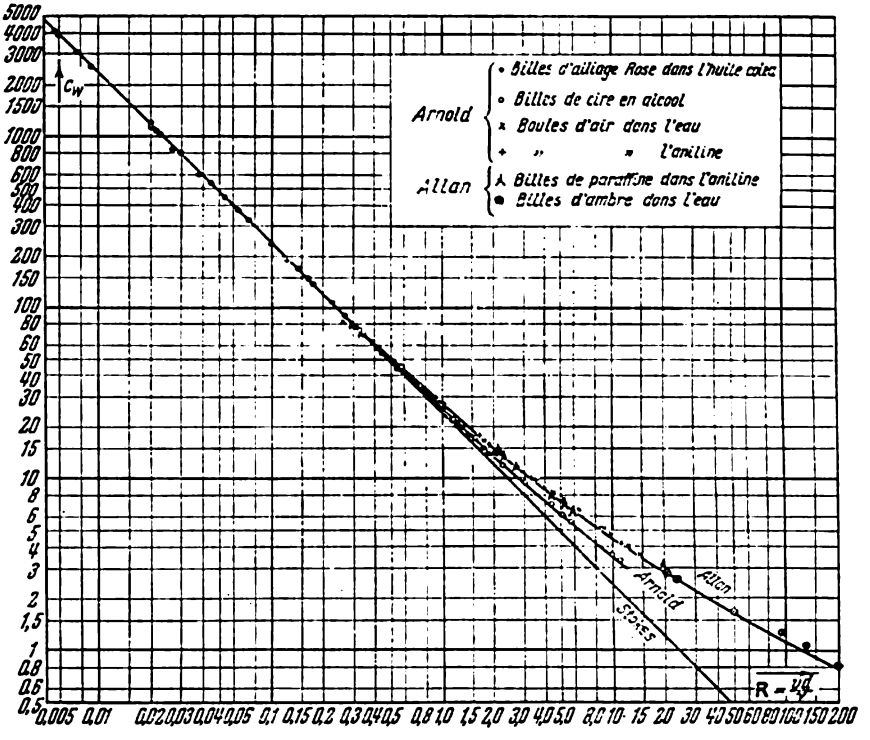


Fig. 9. Coefficient de résistance de la sphère pour de petites valeurs du nombre de Reynolds

§ 5. Transmission de la chaleur du corps au courant fluide

En 1915 Rayleigh a appliqué la théorie dimensionnelle au problème de Boussinesq sur la transmission de la chaleur du corps au fluide le contournant*). Les raisonnements de Rayleigh ont suscité des remarques**), mais les questions posées à cette occasion n'ont pas trouvé de réponses.

Examinons en détail les questions soulevées par l'application de la théorie dimensionnelle à ce problème.

Le problème s'énonce ainsi : un corps de forme fixe donnée communique de façon stationnaire de la chaleur au fluide remplissant tout l'espace extérieur au corps. Le corps est immobile, le fluide contourne le corps et, à des distances suffisamment grandes en aval du corps, son mouvement est celui de translation à la vitesse v.

Soit H la quantité de chaleur cédée par le corps en unité du temps. Le fluide est supposé parfait et incompressible. A en croire Rayleigh, la quantité H est définie par les valeurs des paramètres suivants : la dimension caractéristique l du corps, la vitesse v du fluide loin du corps, le gradient de température T égal à la différence entre la température du corps et celle du fluide loin du corps, la température du corps étant supposée maintenue constante, la capacité calorifique c de l'unité de volume de fluide et le coefficient de conductibilité thermique λ :

$$H=f(l, v, T, c, \lambda).$$

Comme unités de mesure fondamentales Rayleigh choisit les unités de longueur, de temps, de température, de quantité de chaleur et de masse : L, T, °C, Q, M. D'où les dimensions des paramètres :

$$[l]=\mathrm{L}, \quad [v]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}, \quad [T]=°\mathrm{C}, \quad [c]=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{L}^3°\mathrm{C}}, \quad [\lambda]=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{L}°\mathrm{CT}};$$

notons que toutes ces dimensions sont indépendantes de la masse.

Les cinq paramètres de définition dimensionnés ne peuvent former qu'une seule combinaison adimensionnée,

$$\frac{lvc}{\lambda}.$$

La dimension de H sera

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{T}}.$$

On voit aisément que la combinaison $H/\lambda lT$ représente une quantité adimensionnée si bien que

$$H=\lambda lTf\left(\frac{lvc}{\lambda}\right). \tag{5.1}$$

*) O. Rayleigh, Nature, 1915, p. 66.

**) D. Riabouchinski, Nature, 1915, p. 591; O. Rayleigh, Nature, 1915, p. 644; P. W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, New Haven, Yale University Press, 1932.

Cette formule était obtenue par Rayleigh. Il en découle que le taux de chaleur est proportionnel au gradient de la température T et a une même valeur pour différents v et c, mais pour un produit vc constant.

Riabouchinski a fait la remarque suivante. Comme la quantité de chaleur et la température ont la dimension de l'énergie (dans la théorie cinétique des gaz la température est définie comme l'énergie cinétique moyenne des molécules en agitation thermique), on peut choisir en qualité d'unités fondamentales les unités de longueur, de temps et de masse seulement. Alors, les dimensions des paramètres caractéristiques seront

$$[l]=\mathrm{L}, \quad [v]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}, \quad [T]=\frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{T}^2},$$

$$[c]=\frac{1}{\mathrm{L}^3}, \quad [\lambda]=\frac{1}{\mathrm{LT}}.$$

Maintenant, on peut former à partir des paramètres de définition deux combinaisons adimensionnées indépendantes

$$\frac{lvc}{\lambda} \quad \text{et} \quad cl^3.$$

Donc, dans ce cas la théorie dimensionnelle conduit à la formule

$$H=\lambda lTf\left(\frac{lvc}{\lambda}, cl^3\right) \tag{5.2}$$

qui est manifestement plus pauvre en information que la formule (5.1).

Dans sa réponse à Riabouchinski Rayleigh écrit*) :

« La question soulevée par Riabouchinski se rapporte plutôt à la logique qu'à l'application de l'analyse dimensionnelle qui m'a intéressée. Il vaut la peine de soumettre la question à une étude ultérieure. Mon résultat a été obtenu à partir des équations ordinaires de Fourier pour la conduction thermique dans lesquelles la température et la quantité de chaleur sont admises comme quantités *sui generis*. Nous nous heurterions à un paradoxe si l'approfondissement de nos connaissances de la nature de la chaleur apporté par la théorie moléculaire nous avait placé dans une situation pire que celle où nous nous trouvions lorsque nous n'envisagions qu'un problème particulier. Ce paradoxe se trouve semble-t-il résolu dans la mesure où les équations de Fourier contiennent une hypothèse sur la nature de la chaleur et de la température que les argumentations de Riabouchinski ne prévoient pas. » S'arrêtant sur cette réponse, Bridgman**) avait noté non sans raison qu'elle n'est pas apte à dissiper les doutes mais il n'avait pourtant pas éclairci cette question.

Le malentendu s'explique ainsi : le système d'unités fondamentales, dont Rayleigh s'est servi pour déduire la formule (5.1), contient trois unités

*) Nature, 1915, p. 644.

**) P. W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, New Haven, Yale University Press, 1932.

d'énergie distinctes : erg$=ML^2/T^2$, degré °C et calorie Q. La définition de la chaleur et de la température comme énergie mécanique est donnée dans la théorie cinétique des gaz. Lorsqu'on veut convertir la quantité de chaleur et la température en unités mécaniques, on introduit les constantes : l'équivalent mécanique de la chaleur J=427 kgfm/kcal ($[J]=ML^2/T^2Q$) et la constante de Boltzmann $k=1{,}38\cdot10^{-16}$ erg/degré ($[k]=ML^2/T^2$ °C). En prenant indépendantes les unités d'énergie mécanique, de quantité de chaleur et de température on doit envisager ces constantes comme des constantes physiques.

Etant donné l'hypothèse d'un fluide parfait et incompressible, le champ des vitesses est défini par les conditions cinématiques et le phénomène n'est pas accompagné des transformations réciproques de l'énergie thermique et mécanique. Les processus mécaniques se déroulent indépendamment des processus thermiques. Il s'ensuit que la densité du fluide est non essentielle pour toutes les grandeurs thermiques et la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur n'est plus du tout essentielle étant donné l'absence de transformation de l'énergie thermique en énergie mécanique. Puis, en supposant que la densité ϱ et la quantité J n'influent pas sur la transmission étudiée de la chaleur, on tire de la théorie dimensionnelle que la valeur de la constante de Boltzmann k est également non essentielle, puisque sa dimension comprend le symbole de l'unité de masse dont sont indépendantes les dimensions de H et celles des grandeurs de définition. Le fait que les quantités ϱ, J et k sont non essentielles pour les suppositions indiquées se dégage également de la formulation mathématique du problème sur la quantité de chaleur transmise par le corps au fluide. Tout ceci justifie l'absence de J, ϱ et k parmi les paramètres de définition indiqués par Rayleigh*). Cependant, si l'on conserve l'hypothèse que la densité est non essentielle**) sans supposer non essentiels J et k, ce qui découle de raisonnements complémentaires, le système de paramètres de définition de Rayleigh doit être complété par les quantités k et J, ce qui donne définitivement :

$$l,\ v,\ T,\ c,\ \lambda,\ \mathrm{J},\ k.$$

Ces sept quantités dimensionnées conduisent à deux combinaisons adimensionnées indépendantes seulement :

$$\frac{lvc}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{J}cl^3}{k}.$$

Dans ce cas la formule (5.1) est remplacée par la formule suivante :

$$H=\lambda lTf\left(\frac{lvc}{\lambda},\ \frac{\mathrm{J}cl^3}{k}\right). \tag{5.3}$$

*) Dans le même problème pour le cas d'un fluide visqueux compressible, les quantités ϱ, J et k deviennent essentielles et l'on doit inclure ces paramètres, ou leurs équivalents, dans le système de grandeurs de définition.

**) Dans les raisonnements de Riabouchinski cette supposition est conservée.

La formule obtenue (5.3) se réduit à la formule (5.1) si l'on tient compte que l'équivalent mécanique de la chaleur J est non essentiel et, donc, que non essentiel est le paramètre

$$\frac{Jcl^3}{k}.$$

Si maintenant on définit, avec Riabouchinski, les grandeurs thermiques par l'intermédiaire des grandeurs mécaniques, alors k et J seront des constantes universelles adimensionnées et la formule (5.3) devient (5.2). La déduction est certes moins rigoureuse, étant donné que cette approche ne tient pas compte des considérations plus poussées sur le mécanisme du phénomène.

§ 6. Similitude dynamique et simulation des phénomènes

La théorie des dimensions et la similitude jouent un rôle de premier plan dans la simulation de divers phénomènes. Il y a simulation lorsqu'on remplace l'étude du phénomène naturel par l'étude d'un phénomène analogue sur un modèle d'échelle réduite ou agrandie, habituellement dans les conditions de laboratoire. L'intérêt principal de la simulation réside dans ce qu'elle fournit des réponses quant au caractère des effets et des différentes grandeurs liés au phénomène naturel à partir des données expérimentales recueillies sur les modèles.

Dans la plupart des cas la simulation est fondée sur l'étude des phénomènes physiquement semblables. On remplace l'étude du phénomène naturel qui nous intéresse par l'étude d'un phénomène physiquement semblable qu'il est plus commode et avantageux de réaliser. La similitude mécanique ou physique en général peut être considérée comme une généralisation de la similitude géométrique. Deux figures géométriques sont semblables si le rapport de toutes les longueurs correspondantes est le même. Si l'on connaît le coefficient de similitude, ou l'échelle, on obtient les dimensions d'une figure géométrique en multipliant simplement les dimensions de l'autre figure géométriquement semblable à la première par la valeur de l'échelle.

Il existe divers procédés pour définir la similitude mécanique ou physique. On donne ici la définition de la similitude physique sous forme adaptée à la pratique et commode pour les applications immédiates.

Deux phénomènes sont semblables si l'on peut, d'après les caractéristiques données d'un phénomène, obtenir les caractéristiques de l'autre par un simple calcul analogue au changement de système d'unités de mesure.

Pour effectuer ce calcul il est nécessaire de connaître les « échelles de passage ».

Les caractéristiques numériques pour deux phénomènes distincts mais semblables peuvent être considérées comme les caractéristiques numériques d'un même phénomène exprimées dans deux systèmes d'unités différents. Pour toute classe de phénomènes semblables toutes les caractéristiques adimensionnées ont une même valeur numérique. On voit sans peine que

la réciproque est également vraie, i.e. si toutes les caractéristiques adimensionnées sont identiques pour deux mouvements quelconques, ces derniers sont semblables.

Une classe de mouvements mécaniquement semblables définit le régime de mouvement.

La similitude de deux phénomènes s'entend parfois dans un sens plus large si l'on admet que la définition ci-dessus ne se rapporte qu'à un certain système de caractéristiques spécial définissant entièrement le phénomène et permettant d'obtenir toutes les autres caractéristiques qui, pourtant, ne se déduisent pas par une simple multiplication par les échelles appropriées lorsqu'on passe d'un phénomène à un autre « semblable ». C'est ainsi que deux ellipses quelconques seraient semblables pour peu qu'on utilise les axes cartésiens dirigés suivant les grands axes des ellipses. Par la transformation indiquée on peut déduire les coordonnées cartésiennes des points de toute ellipse à partir des coordonnées des points de l'une quelconque des ellipses (affinité).

Pour conserver la similitude en simulation il faut respecter certaines conditions. Or, il arrive très souvent en pratique que ces conditions qui assurent la similitude du phénomène en gros ne soient pas remplies; la question se pose alors d'estimer l'importance des erreurs (effet d'échelle) surgissant lorsqu'on reporte sur un phénomène naturel les résultats recueillis sur le modèle.

Une fois que le système de paramètres définissant la classe de phénomènes étudiée est établi, il est aisé d'énoncer les critères de similitude de deux phénomènes.

En effet, supposons que le phénomène se définisse par n paramètres dont certains peuvent être adimensionnés et d'autres sont des constantes physiques dimensionnées. Supposons ensuite que les dimensions des paramètres variables et des constantes physiques s'expriment par k grandeurs à dimensions indépendantes ($k \leq n$). Dans le cas général on peut évidemment former à partir des n grandeurs tout au plus $n-k$ combinaisons adimensionnées indépendantes. Toutes les caractéristiques adimensionnées du phénomène peuvent être alors envisagées comme des fonctions de ces $n-k$ combinaisons adimensionnées indépendantes des paramètres de définition. Donc, parmi toutes les grandeurs adimensionnées on peut choisir une base, i.e. un système de grandeurs adimensionnées par lesquelles se définissent toutes les autres grandeurs.

Une classe de phénomènes limitée par une formulation correspondante du problème comporte des phénomènes qui ne sont généralement pas semblables. Pour en extraire une sous-classe de phénomènes semblables on a recours au critère suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux phénomènes soient semblables est la constance des valeurs numériques des combinaisons sans dimension constituant une base. Les conditions de la constance de la base de paramètres abstraits formés à partir des grandeurs données définissant le phénomène sont dites critères de similitude.

Si les conditions de similitude sont remplies, alors pour calculer effectivement toutes les caractéristiques du phénomène naturel à partir des caractéristiques dimensionnées de son modèle il est nécessaire de connaître les échelles de passage de toutes les grandeurs correspondantes.

Lorsque le phénomène est défini par n paramètres dont k sont à dimensions indépendantes, alors pour ces k grandeurs à dimensions indépendantes les échelles de passage peuvent être arbitraires et l'on doit les donner ou les déterminer d'après les conditions du problème ou bien les données expérimentales. Les échelles de passage pour toutes les autres grandeurs dimensionnées s'obtiennent sans peine à l'aide des formules de dimension à partir des dimensions de ces k grandeurs à dimensions indépendantes.

Dans le problème d'un corps animé d'un mouvement de translation plan stationnaire au sein d'un fluide visqueux incompressible toutes les grandeurs adimensionnées sont définies par deux paramètres : l'angle d'attaque α et le nombre de Reynolds **R**. Les critères de similitude physique sont donnés par

$$\alpha = \text{const} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \frac{v\,d\varrho}{\mu} = \text{const}.$$

La simulation de ce phénomène n'est valable que lorsque α et **R** du modèle et du phénomène sont identiques. La première condition est toujours facile à réaliser. La seconde (**R**=const) est assez difficile à remplir surtout au cas où le corps baigné est de grandes dimensions, dans le cas d'une aile d'avion par exemple. Si le modèle est plus petit que nature, on est obligé pour conserver le nombre de Reynolds soit d'augmenter la vitesse du courant ce qui est pratiquement irréalisable, soit de changer sensiblement la densité et la viscosité du fluide.

Tout ceci crée de grandes difficultés dans l'étude pratique de la résistance aérodynamique. La nécessité d'un nombre de Reynolds constant a conduit à la réalisation de grandes souffleries aérodynamiques permettant des écoulements sur les avions grandeur nature (fig. 10 et 11) ainsi que de souffleries fermées où l'on fait circuler à grandes vitesses de l'air comprimé, i.e. plus dense (fig. 12).

Les études expérimentales et théoriques spéciales ont montré que bien souvent pour des corps baignés le nombre de Reynolds n'influe considé-

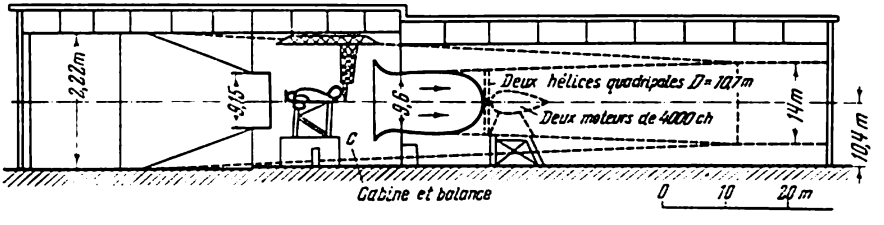


Fig. 10. Coupe transversale d'une soufflerie de NACA pour les essais grandeur nature. Largeur de la soufflerie : 18,3 m. Canaux de retour ne sont pas visibles

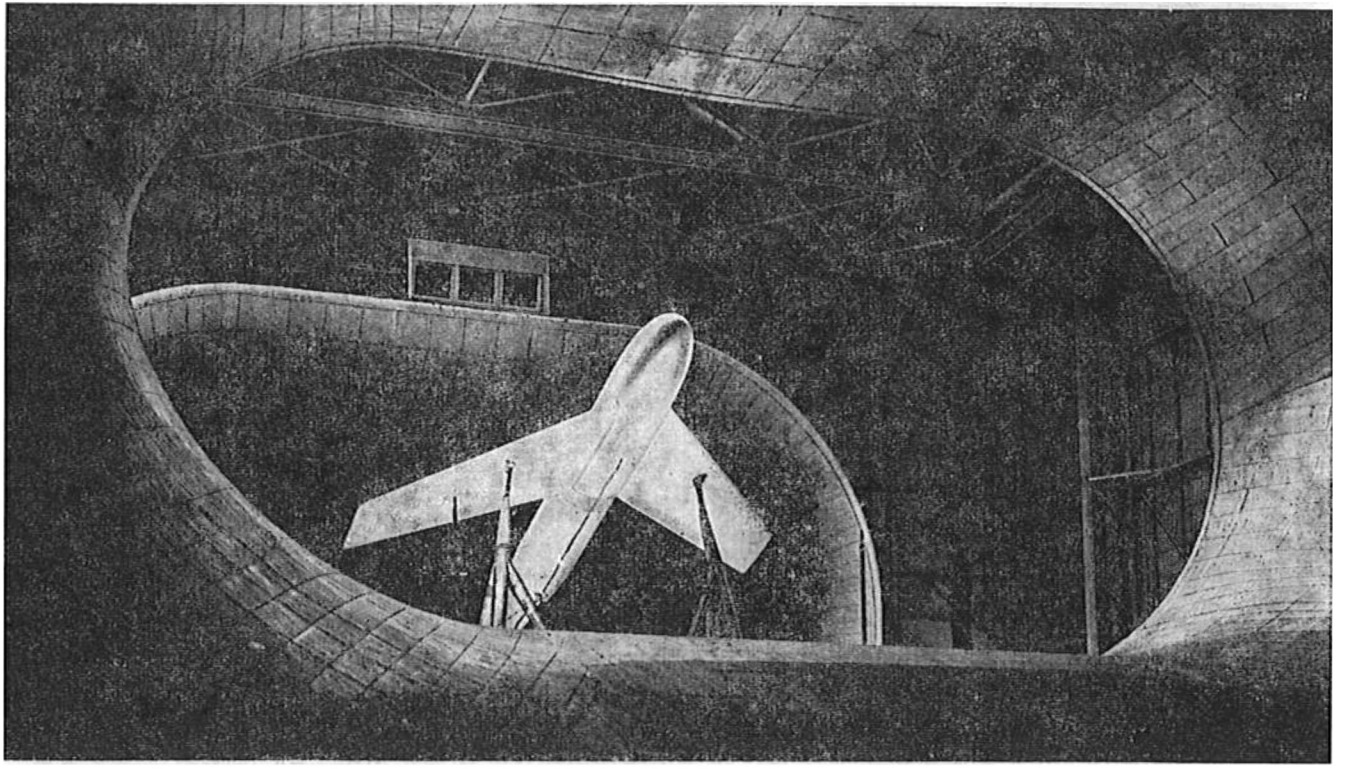


Fig. 11. Photographie d'une soufflerie pour les essais grandeur nature

rablement que sur le coefficient adimensionné de résistance frontale et parfois très faiblement sur le coefficient adimensionné de portance et sur certaines autres grandeurs qui jouent un rôle important dans certaines questions pratiques. Ainsi donc, la différence entre le nombre de Reynolds d'une maquette et d'un modèle réel n'est pas essentielle dans certains cas.

Nous venons d'indiquer les critères de similitude pour le mouvement d'une aile sans tenir compte de la compressibilité de l'air qui est négligeable à des vitesses faibles par rapport à la vitesse du son. On considérera par la suite les critères de similitude compte tenu de la compressibilité de l'air.

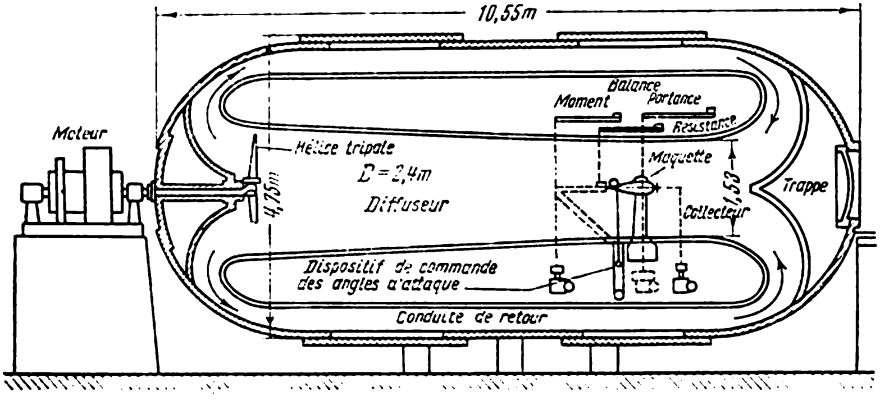


Fig. 12. Coupe d'une soufflerie de NACA utilisant l'air comprimé. La pression à l'intérieur de la soufflerie peut atteindre 21 at et la vitesse de la veine aérienne, 23 m/s

Considérons encore à titre d'exemple le problème de la simulation de l'équilibre des structures élastiques.

Soit une construction quelconque en matériau homogène, une ferme de pont, par exemple. Les propriétés élastiques d'un matériau isotrope se définissent par deux constantes : le module de Young E kgf/m^2 et le coefficient adimensionné de Poisson σ. Considérons les structures géométriquement semblables et composons le système de paramètres caractéristiques.

Pour définir toutes les dimensions de la maquette il suffit d'en donner une dimension caractéristique quelconque B. Si dans l'état d'équilibre étudié le poids de la structure est essentiel, on doit introduire le poids spécifique $\gamma = \varrho g$ kgf/m^3 en tant que paramètre de définition. La structure est soumise au poids de ses parties et aussi aux charges extérieures réparties d'une façon déterminée suivant ses éléments. Supposons que la valeur de ces charges soit définie par la force P kgf. Ainsi, le système de paramètres de définition sera

$$\sigma, E, B, \gamma = \varrho g, P.$$

Dans ce cas on a $n=5$, $k=2$ de sorte que la base des états d'équilibre

élastique mécaniquement semblables se constitue de trois paramètres adimensionnés :

$$\sigma, \quad \frac{E}{\varrho g B}, \quad \frac{P}{EB^2}.$$

Les critères de similitude consistent en l'égalité de ces paramètres sur modèle et sur nature. La conformité à ces critères garantit la similitude de toutes les déformations. Si le modèle est n fois plus petit que nature, les déformations sur modèle (déplacements correspondants) seront n fois plus petites que sur nature.

Lorsque le modèle et l'installation nature sont exécutés dans le même matériau, les valeurs de leurs paramètres ϱ, σ et E sont les mêmes si bien que pour avoir la similitude mécanique il est nécessaire de satisfaire à la condition

$$gB = \text{const}.$$

Dans les conditions ordinaires $g = \text{const}$; donc pour respecter la similitude mécanique il faut que $B = \text{const}$, autrement dit le modèle doit coïncider avec la nature. En d'autres termes, pour g constant la simulation est impossible*).

On arrive à faire varier g artificiellement en faisant tourner le modèle à une vitesse angulaire constante et en le fixant sur une centrifugeuse (fig. 13). Si les dimensions du modèle sont suffisamment petites et si le rayon de rotation est assez grand, les forces centrifuges d'inertie des éléments du

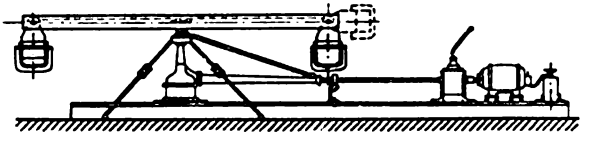


Fig. 13. Schéma d'une centrifugeuse pour les essais de modèles

modèle peuvent être supposées parallèles. En réalisant la rotation autour d'un axe vertical on constate qu'en état d'équilibre relatif (par rapport à la centrifugeuse) le modèle est soumis à des forces massiques constantes analogues à la pesanteur mais correspondant à une autre accélération. En choisissant la vitesse angulaire de rotation on peut fixer des valeurs de l'accélération aussi grandes que l'on veut.

L'idée d'application d'une centrifugeuse à la simulation de divers processus fut émise par l'ingénieur Bucky en 1931**); N. Davidenkov***) et

*) L'augmentation du poids spécifique ϱg exigée par la pratique lorsqu'il faut réduire les dimensions du modèle peut être effectuée en appliquant des charges supplémentaires à ses éléments.

**) Bucky, The American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, Technical Publication, n° 425.

***) N. Davidenkov, Revue de la physique technique, n° 1, 1933.

G. Pokrovski*) eurent la même idée indépendamment de Bucky en 1932. En 1929 Davidenkov avait proposé de se servir dans ce but d'une caisse tombant sur un ressort dur mais on a dû abandonner cette méthode vu son incommodité.

Actuellement, il existe des centrifugeuses que l'on emploie dans l'étude sur modèle de divers processus**) se déroulant dans les sols.

Considérons la contrainte τ kgf/m² occasionnée par la déformation d'une structure élastique sous l'action du poids et d'une distribution donnée des charges. On entend par τ la valeur maximum d'une composante quelconque de la contrainte ou, en général, une certaine composante de la contrainte pour un élément déterminé de la construction.

La combinaison τ/E est adimensionnée, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\tau}{E}=f\left(\sigma, \frac{E}{\varrho g B}, \frac{P}{EB^2}\right).$$

Si le modèle et l'installation nature sont exécutés dans le même matériau, alors $E=\text{const}$; il s'ensuit que pour les états mécaniquement semblables les contraintes aux points homologues seront les mêmes.

Si l'on admet que les états de contrainte sont mécaniquement semblables et que la rupture se définit par les valeurs des contraintes maxima, les ruptures sur modèle et sur nature se produiront pour les états semblables. Au cas où les charges extérieures sont grandes et le poids propre de la structure est négligeable, le paramètre $\gamma=\varrho g$ et partant le paramètre $E/\varrho g B$ sont non essentiels. S'il en est ainsi, la relation précédente prend la forme

$$\frac{\tau}{E}=f\left(\sigma, \frac{P}{EB^2}\right),$$

les critères de similitude n'étant donnés alors que par deux conditions :

$$\sigma=\text{const} \quad \text{et} \quad \frac{P}{EB^2}=\text{const}.$$

Par suite, si l'on a une simulation qui n'altère pas les propriétés des matériaux, les charges extérieures doivent varier comme le carré des dimensions linéaires.

Désignons par l la variation de la longueur lors de la déformation d'un élément quelconque d'un système élastique. Les structures de la classe définie ci-dessus répondent à la relation

$$\frac{l}{B}=\varphi\left(\sigma, \frac{\varrho g B}{E}, \frac{P}{EB^2}\right).$$

Bien souvent des considérations d'ordre physique montrent que la valeur l/B diminue avec la diminution du poids spécifique des éléments de la structure, soit avec la diminution du paramètre $\varrho g B/E$.

---

*) G. Pokrovski, Revue de la physique technique, n° 4, 1933.

**) La condition $E/\varrho g B=\text{const}$ doit être remplie dans la simulation des processus qui mettent en jeu, entre autres paramètres essentiels, les paramètres ϱ, g, B et E. Dans tous ces cas la simulation peut donc être effectuée sur une centrifugeuse.

Soient maintenant deux structures géométriquement semblables de dimensions différentes mais faites dans le matériau identique (E et σ identiques). Supposons que les valeurs des charges extérieures varient proportionnellement aux carrés des dimensions, soit

$$\frac{P}{EB^2}=\text{const.}$$

Il est évident qu'ici le paramètre $\varrho gB/E$ diminue lorsque diminuent les dimensions de la structure, ce qui annonce la rupture de la similitude mécanique. Dans les structures de dimensions plus petites les déformations relatives sont moindres; c'est pourquoi une structure de petites dimensions est plus résistante. Cependant, cette conclusion n'est valable qu'au cas où le poids spécifique du matériau $\gamma=\varrho g$ joue un rôle important. Si le poids propre (γ) n'est pas essentiel et $P/EB^2=\text{const}$, les déformations relatives auront la même valeur pour les corps de dimensions variées.

Considérons encore le cas où γ est non essentiel et où l'on sait que pour la structure donnée le rapport l/B diminue avec la diminution de la charge extérieure P. Si les charges extérieures sont proportionnelles au cube des dimensions linéaires, il est évident que le rapport l/B sera plus petit pour les structures de petites dimensions que pour celles de grandes dimensions. On en conclut que dans ce cas en réduisant les dimensions on arrive à augmenter la résistance.

Un exemple intéressant dans lequel l'échelle du modèle est déterminée de manière univoque est fourni par les maquettes hydrostatiques des dirigeables et aérostats*).

D'un point de vue pratique, il est important de savoir la forme et les déformations des éléments de l'enveloppe en toile du ballon lorsqu'elle est remplie de gaz. La forme géométrique de l'aérostat définit ses propriétés hydrostatiques et aérodynamiques; l'information sur les déformations de la toile est nécessaire pour assurer la résistance du ballon.

Indiquons les paramètres qui définissent l'état statique d'un aérostat.

Dans les limites de la différence de cotes des divers points de l'aérostat on peut admettre constant le poids spécifique de l'air et du gaz. La différence entre la pression de l'air sur l'enveloppe et la pression du gaz enfermé dans le ballon (dans le problème envisagé c'est la différence des pressions qui est essentielle) est définie par la valeur γ^* égale à la différence des poids spécifiques de l'air et du gaz, $\gamma^*=\gamma_{\text{air}}-\gamma_{\text{gaz}}$.

Les expériences concernant la relation contraintes — déformations dans les toiles montrent que pour une toile donnée les déformations relatives sont les mêmes lorsque les contraintes sont les mêmes. Dans les enveloppes de toile les contraintes sont définies comme des forces calculées par unité de longueur de la section.

---

*) Voir A. Vorobiev, *Essais hydrostatiques sur modèles des aérostats* (en russe). Recueil de l'Institut des ingénieurs des chemins de fer de Léningrad, op. XVIII, 1928; V. Katanski, *Etablissement de projets des structures ballons-grées, etc.* (en russe) ONTI, 1936.

Désignons par τ kgf/m une contrainte, caractéristique de la propriété de la toile et par l la dimension linéaire caractéristique. Introduisons ensuite le poids par unité de surface de l'enveloppe q kgf/m² et les efforts extérieurs concentrés Q kgf s'exerçant sur divers éléments de l'enveloppe (l'orientation de ces efforts varie selon le cas considéré).

Ainsi donc, pour des enveloppes géométriquement semblables faites de matériaux à relations contraintes — déformations identiques, on a le système suivant de paramètres de définition :

$$\gamma^*, \tau, l, q, Q.$$

Les critères de similitude seront

$$\frac{\gamma_1^* l_1^2}{\tau_1} = \frac{\gamma_2^* l_2^2}{\tau_2}, \tag{a}$$

$$\frac{\gamma_1^* l_1}{q_1} = \frac{\gamma_2^* l_2}{q_2}, \tag{b}$$

$$\frac{\gamma_1^* l_1^3}{Q_1} = \frac{\gamma_2^* l_2^3}{Q_2}. \tag{c}$$

Le critère (c) est aisément satisfait pour peu que l'on choisisse convenablement les efforts extérieurs Q ce qu'on peut faire sans peine à l'aide d'un système de charges et de poulies. Si le modèle et la nature ($l_2 \neq l_1$) sont exécutés dans la même toile, alors $q_1 = q_2$ et $\tau_1 = \tau_2$, de sorte que les conditions (a) et (b) se contredisent. Pour cette raison on étudiera le cas où le poids propre de l'enveloppe ne joue pas, ce qui efface la condition (b). Pour que la condition (a) soit remplie il faut poser

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{\gamma_2^*}{\gamma_1^*}},$$

d'où il découle qu'en diminuant l'échelle ($l_2 < l_1$) on doit augmenter la portance spécifique ($\gamma_2^* > \gamma_1^*$). On peut réaliser cet effet avec un fluide lourd en renversant le modèle. Les modèles hydrostatiques des dirigeables et aérostats sont conçus d'après ce principe. En guise de fluide pour le modèle on prend l'eau, le mercure, la glycérine, etc. Une vue d'ensemble de ce modèle est donnée sur la figure 14.

En sachant pour un aéronef l'altitude du vol, la température, la pression et le fluide employé on peut obtenir, en choisissant le fluide pour le modèle, un rapport bien déterminé des poids spécifiques ce qui définit l'échelle du modèle.

Par exemple, à des conditions normales

$\gamma_1^* = 1{,}1$ kgf/m³ pour l'hydrogène,

$\gamma_2^* = 1000$ kgf/m³ pour l'eau,

$\gamma_2^* = 13\,600$ kgf/m³ pour le mercure.

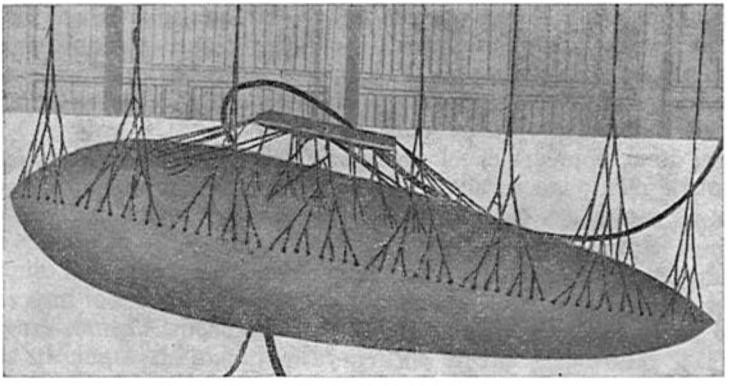


Fig. 14. Essais de la maquette d'un dirigeable

D'où la valeur suivante pour l'échelle du modèle (avec de l'eau) :

$$\frac{l_1}{l_2}=n=\sqrt{\frac{1000}{1,1}}=30,1;$$

en utilisant le mercure, on trouve

$$n=\sqrt{\frac{13\,600}{1,1}}=111.$$

La simulation avec le mercure implique de petits modèles ce qui est en général incommode.

Le poids de l'enveloppe de l'aéronef et celui de l'enveloppe du modèle agissant dans des sens opposés, l'influence du poids altérera la similitude. Le poids de l'enveloppe peut être pris en considération à l'aide de dispositifs spéciaux permettant d'appliquer les efforts extérieurs verticalement vers le haut et les répartir suivant la surface de l'enveloppe en conformité avec le critère de similitude (b) et compte tenu du poids propre de l'enveloppe dirigé vers le bas.

Parfois on peut se servir pour la simulation de phénomènes loin d'être semblables, dont certains paramètres de similitude $\pi_1, \pi_2, \ldots$ ont des valeurs différentes sur modèle et sur nature, mais en revanche l'on connaît à l'avance, à partir de considérations supplémentaires, la forme de la relation entre les grandeurs adimensionnées inconnues et les paramètres de définition adimensionnés $\pi_1, \pi_2, \ldots$ Dans ce cas, on effectue la simulation en maintenant constants ceux des paramètres de similitude qui déterminent les relations inconnues.

Souvent, l'approche indiquée de simulation peut s'appliquer lorsque la forme de la relation entre les valeurs inconnues et les paramètres $\pi_1, \pi_2, \ldots$ est adoptée en tant qu'hypothèse de travail pouvant être confirmée ou infirmée par des essais sur modèle. Citons à titre d'exemple la simulation de phénomènes à nombres de Reynolds différents mais dont l'influence

sur les caractéristiques inconnues est non essentielle; toutefois cette méthode peut s'appliquer aussi dans les cas où le nombre de Reynolds est essentiel mais on sait à l'avance de quelle manière en dépendent les paramètres inconnus.

Les essais sur modèle sont souvent le seul moyen possible d'étudier expérimentalement et de résoudre d'importants problèmes pratiques. Il en va ainsi par exemple pour l'étude de phénomènes naturels se déroulant pendant des dizaines, des centaines et même des milliers d'années; dans les conditions d'un essai sur modèle, un phénomène semblable ne dure en tout que quelques heures ou quelques jours. Ceci est vrai notamment pour la simulation du phénomène de filtration du pétrole exploité par sondage. On trouve aussi des cas inverses, lorsqu'il est possible d'étudier, au lieu du phénomène se déroulant extrêmement vite dans la nature, un phénomène semblable, très ralenti, sur un modèle.

La simulation est un problème scientifique important tant par sa valeur théorique que par son rôle gnoséologique, mais il doit être considéré seulement comme point de départ pour le problème principal. Ce dernier consiste à trouver les lois de la nature, à rechercher les propriétés et les caractéristiques communes à différentes classes de phénomènes, à élaborer les méthodes d'étude expérimentales et théoriques de résolution de divers problèmes, enfin à obtenir sous forme systématisée les données, les procédés, les recommandations, les règles pouvant être appliqués aux problèmes pratiques concrets.

§ 7. Mouvement stationnaire d'un corps solide dans un fluide compressible

Considérons le problème général du mouvement stationnaire de translation à vitesse constante d'un solide au sein d'un fluide remplissant tout l'espace extérieur au corps. Les propriétés d'inertie, de compressibilité, de viscosité et de conductibilité du fluide entrent en ligne de compte. Pour simplifier, on ne considère ni la pondérabilité du fluide*), ni la transmission de la chaleur par radiation.

Pour composer le système de paramètres de définition formulons le problème mathématique. Tout d'abord écrivons les équations du mouvement du fluide visqueux compressible, considéré comme un gaz parfait. On a

1) l'équation de Navier-Stokes

$$\varrho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p - \frac{2}{3} \operatorname{grad} \mu \operatorname{div} \bar{v} + 2 \operatorname{div} \mu \operatorname{def} \bar{v}, \tag{7.1}$$

où def $\bar{v}$ est le tenseur des taux de déformation;

*) Dans nombre de cas la pondérabilité du fluide est essentielle vu qu'elle peut favoriser une convection intense due à l'échauffement irrégulier du fluide.

2) l'équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\operatorname{div} \varrho \bar{v}=0; \tag{7.2}$$

3) l'équation caractéristique des gaz (l'équation de Clapeyron)

$$p=\varrho RT, \tag{7.3}$$

où R est la constante des gaz parfaits;

4) l'équation de la chaleur reçue

$$Jc_v\varrho \frac{dT}{dt}+p \operatorname{div} \bar{v}=\operatorname{div} J\lambda \operatorname{grad} T-\frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} \bar{v})^2+$$
$$+\mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}. \tag{7.4}$$

Le premier membre de cette équation décrit la variation de l'énergie interne au dépens de la variation de la température et le travail des forces de pression. Le second membre traduit la variation de l'énergie aux dépens de la chaleur reçue par conduction et par le travail des forces de frottement internes.

Ensuite, pour évaluer l'influence de la température sur les coefficients de viscosité et de conductibilité utilisons la formule de Sutherland*) :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\mu}{\mu_0}=\frac{1+\dfrac{C}{273{,}1}}{1+\dfrac{C}{T}}\sqrt{\frac{T}{273{,}1}}, \tag{7.5}$$

où λ_0 et μ_0 sont les coefficients de conductibilité et de viscosité à la température $T=273{,}1°$ correspondant au zéro de l'échelle Celcius et où C est la constante de Sutherland ayant la dimension de la température. La constante C varie selon les gaz. Pour l'air $C\approx 113$ °C.

Outre les équations ci-dessus on a encore les conditions à l'infini et les conditions aux limites : à l'infini amont et dans les directions perpendiculaires à la vitesse du corps le fluide est au repos, $|v|_\infty=0$, la densité et la température absolue ont les valeurs données ϱ_0 et T_0.

La forme de la surface du corps étant fixe, toutes les dimensions de celui-ci sont définies par une certaine longueur caractéristique l.

Les conditions cinématiques d'écoulement autour du corps sont complètement définies par les valeurs données de sa vitesse de translation v et par deux angles α et β que le vecteur vitesse fait avec les axes du système de coordonnées lié au corps.

---

*) J. H. Jeans, *The Dynamical Theory of Gases*, Cambridge, 1925, p. 284.

Enfin, on doit se donner les conditions aux limites à la surface du corps pour la température*). La température à la surface du corps est supposée uniforme et égale à T_1.

Les équations (7.1) à (7.5), les conditions à l'infini et les conditions aux limites donnent le système suivant de paramètres de définition :

$$l, \alpha, \beta, v, T_0, T_1, \varrho_0, \mu_0, R, c_v, \mathrm{J}, \lambda_0, C.$$

Les dimensions des treize grandeurs citées s'expriment par cinq unités de mesure fondamentales : L, T, M, Q et °C.

On peut réduire de l'unité le nombre de paramètres si l'on remarque que les constantes J, c_v et λ entrent seulement dans l'équation (7.4) et ceci sous forme des produits $\mathrm{J}c_v$ et $\mathrm{J}\lambda$. Si on remplace trois paramètres J, c_v et λ par deux paramètres, $\mathrm{J}c_v$ et $\mathrm{J}\lambda$, alors les dimensions de toutes les grandeurs s'exprimeront par quatre unités fondamentales : L, T, M et °C, c'est-à-dire qu'une telle réduction de paramètres est non essentielle. Le régime du mouvement et la variété de mouvements semblables sont définis par les valeurs de huit paramètres adimensionnés indépendants :

$$\frac{R}{\mathrm{J}c_v}=\gamma-1, \quad \frac{\mu c_v}{\lambda_0}=P, \alpha, \beta, \frac{\varrho_0 l v}{\mu_0}=\mathrm{R}, \quad \frac{v}{\sqrt{\gamma R T_0}}=\mathrm{M}, \quad \frac{T_1}{T_0}, \quad \frac{C}{T_0}.$$

On montre dans la théorie cinétique des gaz que les constantes γ et P ne dépendent que de la structure des molécules gazeuses. Un gaz parfait vérifie comme on sait les formules théoriques suivantes :

$$\frac{c_p}{c_v}=\gamma=1+\frac{2}{m}; \quad \frac{\lambda}{\mu c_v}=\frac{9\lambda-5}{4}$$

(A. Euchen),

où m est le nombre de degrés de liberté d'une molécule gazeuse. Pour un gaz monoatomique $m=3$ et pour un gaz diatomique $m=5$. Les données expérimentales sur de nombreux gaz (hélium, hydrogène, etc.) sont voisines des valeurs théoriques, toutefois l'influence de la température et de la pression se fait sentir lorsqu'elles varient dans de larges limites**). En pratique, pour les températures et les pressions ordinaires on peut prendre (pour l'air)

$$\gamma=1{,}4; \quad \frac{\lambda}{\mu c_v}=P^{-1}=1{,}9; \quad \frac{\mu c_p}{\lambda}=0{,}737.$$

La condition de la similitude mécanique du mouvement des corps géométriquement semblables consiste à maintenir constants les huit para-

*) Dans nombre de problèmes techniques dont, en particulier, ceux de l'aérodynamique, il s'agit d'écoulements du fluide autour des corps fortement échauffés ou refroidis; tel est l'écoulement sur les radiateurs de propulseur, l'écoulement autour du corps refroidi d'un aéronef, etc.

**) Voir J. Hilsenrath and Y. Touloucian, Transaction of the ASME, v. 76 (1954), n° 6. Cet article contient un grand nombre de références aux recherches consacrées à ce sujet.

mètres cités plus haut. Désignons par W la résistance frontale, par A la portance. Pour les gaz de mêmes nombres constants γ et P on peut écrire :

$$\frac{2W}{\varrho l^2 v^2}=c_x=f_1\left(\alpha, \beta, \mathbf{R}, \mathbf{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right),$$

$$\frac{2A}{\varrho l^2 v^2}=c_y=f_2\left(\alpha, \beta, \mathbf{R}, \mathbf{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right).$$

En étudiant la distribution de la pression, le champ des températures, celui des vitesses, etc., il convient d'introduire, outre les huit paramètres adimensionnés énumérés, les coordonnées adimensionnées des points de l'espace : $x/l, y/l, z/l$ (pour fixer les idées posons que le référentiel est solidaire du corps). Ainsi, la distribution de la pression et celle de la température se traduiront par les relations fonctionnelles de la forme

$$\frac{2p}{\varrho_0 v^2}=f_3\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \alpha, \beta, \mathbf{R}, \mathbf{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right),$$

$$\frac{T}{T_0}=f_4\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \alpha, \beta, \mathbf{R}, \mathbf{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right).$$

Etablir la forme des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 revient à résoudre le problème fondamental de l'aérodynamique théorique et appliquée.

Le paramètre C/T_0 n'est essentiel que lorsque la conduction et la viscosité jouent un rôle important, le phénomène étant caractérisé par des variations notables de température. Mais même dans les cas où la conduction et la viscosité sont essentielles, l'influence de la température sur les coefficients de viscosité et de conductibilité peut être évaluée avec une bonne approximation non par la formule (7.5) mais par la formule suivante, dépourvue de la constante dimensionnée C :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\mu}{\mu_0}=\sqrt{\frac{T}{273{,}1}}$$

ou par la formule plus générale

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{T}{273{,}1}\right)^k,$$

où k est un nombre abstrait constant quelconque. Ces raisonnements montrent qu'en pratique le paramètre C/T_0 joue d'ordinaire un rôle négligeable et par conséquent peut être omis en simulation.

Souvent lorsque le corps se déplace à petites vitesses ($\mathbf{M}$ petits), les températures T_1 et T_0 sont peu distinctes, de sorte que leur rapport T_1/T_0 est toujours le même et voisin de l'unité.

Ci-dessus nous avons supposé que la température T_1 du corps avait une valeur donnée. Si l'on néglige l'échange de chaleur entre le corps et le fluide, la condition aux limites à la surface du corps peut être donnée sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial n}=0,$$

ce qui correspond au cas où la surface du corps peut être supposée athermane. Dans ces conditions le paramètre T_1/T_0 est éliminé. La même chose se produit aussi dans le cas où l'on peut négliger complètement la conduction thermique et ne considérer que les évolutions adiabatiques.

Parfois le paramètre T_1/T_0 disparaît quand la température T_1 devient une grandeur inconnue. Ainsi, dans certains cas, indépendamment des propriétés calorifiques du corps, l'échange de chaleur entre le fluide et le corps a pour effet de stabiliser la température du corps qui diffère de la température du fluide à l'infini. Il en va ainsi lors de la prise de la température d'un gaz animé d'une très grande vitesse avec un thermomètre à liquide. Les indications du thermomètre dépendent en principe de **R** et **M** ainsi que de l'orientation du thermomètre par rapport au courant; la température du corps (du thermomètre) différera de celle du courant non perturbé loin du corps.

Si l'on tient compte de ces considérations supplémentaires il devient manifeste que la simulation des mouvements perturbés d'un gaz repose principalement sur la constance des nombres **R** et **M**, le nombre de Mach **M** n'étant essentiel que lorsque l'effet de compressibilité est notable.

Les résultats précédents s'étendent aisément au cas du mouvement d'une hélice dans un fluide. Dans le problème de l'hélice il y a outre le mouvement de translation la rotation de l'hélice autour de son axe. De sorte que lorsque l'hélice est animée d'un mouvement stationnaire à vitesses de translation et angulaire constantes on voit apparaître un paramètre supplémentaire, la vitesse angulaire de rotation, que l'on peut définir en donnant le nombre de tours n en unité de temps. Aux caractéristiques du mouvement de translation du corps s'ajoute, dans le cas de l'hélice, le paramètre adimensionné v/nl dit avance de l'hélice. Dans l'étude des propriétés aérodynamiques ou hydrodynamiques de l'hélice ce paramètre est fondamental.

Si le fluide peut être assimilé à un fluide parfait et incompressible, alors lors du mouvement de translation de l'hélice le long de son axe, l'avance de l'hélice est le seul paramètre définissant son mouvement, le pas étant fixe.

§ 8. Mouvement non stationnaire au sein d'un fluide

Les conclusions de la théorie dimensionnelle obtenues dans le paragraphe précédent peuvent être généralisées au mouvement non stationnaire.

Dans le cas général de l'étude d'un mouvement non stationnaire l'on doit introduire comme paramètre de définition le temps t, quantité variable. En considérant des mouvements mécaniquement semblables l'on observe une variation de la valeur numérique du paramètre t par suite du changement d'échelles et parce que le temps varie au cours du mouvement. Il nous semblera donc opportun de faire d'abord certaines remarques générales concernant les mouvements non stationnaires cinématiquement semblables.

Soient des mouvements non stationnaires cinématiquement semblables. En similitude cinématique toutes les combinaisons adimensionnées corres-

pondantes des valeurs cinématiques sont les mêmes pour tous les mouvements. Il est possible d'élargir la classe de mouvements et de considérer les mouvements cinématiquement dissemblables si l'on admet que certains paramètres cinématiques adimensionnés caractérisant tout le mouvement sont susceptibles de prendre diverses valeurs pour différents mouvements.

Parmi les mouvements cinématiquement semblables chaque mouvement concret et sa configuration sont définis par trois paramètres. Deux paramètres caractérisent le mouvement du système dans son ensemble et un paramètre fixe une certaine configuration du mouvement.

On peut prendre comme paramètres définissant un mouvement dans son ensemble une certaine longueur caractérisant les dimensions géométriques et un certain temps caractéristique. Ces paramètres représentent les échelles cinématiques de la loi du mouvement.

Par exemple, pour un mouvement circulaire il est logique de prendre comme longueur caractéristique le rayon du cercle; pour une oscillation, l'amplitude d'oscillations d'un certain point, etc. Le temps caractéristique des processus périodiques est, naturellement, la période. Au lieu du temps caractéristique, on peut prendre la vitesse pour un certain état déterminé ou la vitesse moyenne, etc.

La configuration instantanée d'un mouvement non stationnaire peut se définir par la valeur du temps t*).

Soient d, v et t la longueur caractéristique, la vitesse caractéristique et la date actuelle. Les configurations semblables ou autrement dit homologues pour les mouvements semblables dans leur ensemble sont définies par la valeur du paramètre variable adimensionné vt/d pouvant être assimilé au temps adimensionné.

L'égalité $v_1t_1/d_1=v_2t_2/d_2$ remplie pour les configurations de mouvement de deux systèmes peut être considérée comme la condition de transformation du temps lors du passage d'un système à l'autre.

Prenons à titre d'exemple le système d'oscillations harmoniques d'un point sur l'arc de circonférence de rayon d. La loi du mouvement est $s=a\cos kt$, où s est la longueur de l'arc. Pour des mouvements cinématiquement semblables on doit avoir

$$\frac{a}{d}=\text{const.}$$

Le mouvement concret se définit par l'amplitude a et la pulsation k. La configuration du mouvement est définie par la date t.

Les configurations semblables des différents mouvements sont caractérisées par la même valeur du paramètre adimensionné kt.

Si les rapports a_1/d_1 et a_2/d_2 sont différents pour deux mouvements différents, ces derniers ne sont pas cinématiquement semblables. Le rapport

*) L'origine des temps tout comme l'origine des coordonnées linéaires est choisie de sorte que pour les différents mouvements la position de systèmes et la configuration des mouvements soient semblables au temps $t=0$.

a_1/a_2 définit l'échelle des longueurs. Des oscillations harmoniques sur un cercle cinématiquement semblables doivent vérifier l'égalité $a_1/a_2=d_1/d_2$. Pour une droite il est impossible d'introduire la dimension caractéristique, donc deux quelconques oscillations harmoniques rectilignes sont cinématiquement semblables.

Prenons un mouvement rectiligne composé d'un mouvement uniforme et d'une oscillation harmonique, soit $s=vt+a\cos kt$. La classe de mouvements semblables est alors caractérisée par la constance des valeurs numériques du paramètre adimensionné $ak/v=\mathrm{S}$ dit nombre de Strouhal. Les configurations de mouvements semblables peuvent être caractérisées soit par la valeur du paramètre kt, soit par celle du paramètre $vt/a=kt/\mathrm{S}$.

On peut étendre la classe de mouvements en considérant les mouvements non semblables à condition de supposer que pour la même forme fondamentale de la loi d'oscillations le nombre de Strouhal est susceptible de prendre des valeurs différentes pour les différents mouvements.

Soit maintenant un corps animé d'un mouvement non stationnaire au sein d'un fluide, la loi du mouvement du corps étant posée comme donnée. En qualité de paramètres dimensionnés individualisant une loi déterminée du mouvement, prenons une certaine longueur d et la vitesse v. Le système de paramètres d'un mouvement non stationnaire dont la loi est donnée ne diffère de celui d'un mouvement stationnaire que par l'introduction d'une longueur d supplémentaire caractérisant la loi du mouvement et d'un paramètre variable, celui du temps t. C'est pourquoi le système de paramètres adimensionnés définissant le mouvement dans son ensemble et chaque configuration du mouvement n'est augmenté que de deux paramètres, d/l et vt/l, la similitude de deux mouvements étant garantie à condition que $d/l=\mathrm{const}$; la constance du paramètre vt/l garantit uniquement qu'on considère le mouvement à des instants homologues (échelle temporelle) pour les configurations du mouvement semblables.

Si les mouvements non stationnaires sont des oscillations de loi déterminée et de pulsation k qu'on peut donner arbitrairement, cette dernière sera incluse dans le système de paramètres de définition et l'on fera ainsi intervenir un paramètre adimensionné supplémentaire définissant le régime de mouvement, notamment le nombre de Strouhal

$$\frac{kl}{v}=\mathrm{S}.$$

Considérons des mouvements non stationnaires d'un corps au sein d'un fluide, composés de translations à la vitesse v et d'oscillations de loi déterminée mais, éventuellement, de pulsations k différentes. Pour qu'il y ait similitude des différents mouvements il faut assurer la constance du nombre de Strouhal, à condition que k, l et v sont donnés à l'avance, étant suggérés par le sens du problème en question. Si au contraire la pulsation k est une grandeur inconnue, la constance du nombre de Strouhal découle des critères de similitude composés des grandeurs données. Dans nombre d'études portant sur les mouvements non stationnaires d'un corps au sein

d'un fluide, le mouvement du corps n'est pas connu à l'avance. Considérons à titre d'exemple le problème des oscillations d'une aile élastique dans une veine fluide se déplaçant en mouvement de translation (flutter d'aile).

Soit une aile élastique dans une veine fluide. Admettons pour simplifier que l'aile a un plan de symétrie longitudinal et qu'elle est fixée rigidement dans sa section médiane.

Les propriétés élastiques des ailes de construction déterminée, fabriquées dans un matériau homogène, sont définies par deux constantes physiques.

Nous laissons de côté la question des méthodes pratiques permettant de trouver les caractéristiques des propriétés élastiques des constructions d'ailes utilisées en aviation. Une formulation détaillée du problème permet de caractériser les propriétés élastiques de diverses constructions par certaines fonctions et certains paramètres qui sont seuls essentiels dans l'optique du problème envisagé. Dans ce sens on peut indiquer les classes d'ailes équivalentes par leurs propriétés élastiques mais ayant une géométrie et en général une construction différentes.

Dans la formulation générale du problème on peut admettre que dans les limites de l'applicabilité de la loi de Hooke, toutes les caractéristiques élastiques de chaque aile appartenant aux systèmes distincts d'ailes géométriquement semblables, équivalentes par leurs propriétés élastiques, sont définies par la valeur de la longueur caractéristique l, par le module de Young E et par le module de cisaillement G.

La distribution des masses peut avoir une influence notable sur les oscillations. On peut exprimer la loi de distribution des masses de façon que la masse de chaque élément soit proportionnelle à la masse totale et soit complètement définie par la valeur d'une certaine masse m.

On sait que les propriétés dynamiques d'un solide parfait ne dépendent que de certaines caractéristiques sommaires de la distribution des masses. En d'autres termes les propriétés dynamiques d'un solide parfait sont complètement définies par la masse totale du corps, par la position du centre d'inertie et par le tenseur d'inertie pour le centre de gravité du corps.

Une analyse détaillée de la position approchée du problème montre que des ailes élastiques dont les masses sont différemment réparties peuvent être dynamiquement équivalentes comme dans le cas d'un solide parfait.

Dans la pratique, on établit un système de paramètres abstraits caractérisant les lois de distribution des masses et définissant les mouvements oscillatoires (citons la position du centre de gravité des différentes sections d'une aile, les moments d'inertie des sections et ainsi de suite). Tous les résultats ultérieurs peuvent être étendus au cas de distributions des masses différentes d'une aile élastique mais dynamiquement équivalentes.

Supposons que dans le phénomène étudié le fluide soit parfait, homogène et incompressible. Dans ce cas les propriétés mécaniques du fluide se définissent complètement par sa densité ρ. La pondérabilité du fluide peut être écartée. Posons ensuite que le fluide remplit tout l'espace extérieur à l'aile. La section médiane de l'aile est immobile. A l'infini l'écoulement du fluide est un mouvement de translation à une vitesse v constante dans

le temps et parallèle au plan de symétrie longitudinal de l'aile, l'orientation de la vitesse v par rapport à la section immobile de l'aile étant fixe.

Il s'ensuit en définitive que dans les hypothèses émises le mouvement non stationnaire du système aile — fluide est caractérisé par les paramètres

$$l, E, G, m, \varrho, v$$

et par les grandeurs donnant la perturbation initiale. En outre, chaque configuration de mouvement se définit par la date t.

Les propriétés des mouvements perturbés non stationnaires communes à des mouvements non stationnaires de toute sorte, produits par une perturbation initiale quelconque suffisamment petite, ne dépendent évidemment pas de paramètres caractérisant les perturbations initiales.

Par conséquent, pour les mouvements dynamiquement semblables ces propriétés se résument par le système de paramètres adimensionnés

$$\frac{\varrho v^2}{E}, \quad \frac{G}{E}, \quad \frac{m}{\varrho l^3}, \quad \frac{vt}{l};$$

la distribution des masses et la construction des ailes étant supposées identiques pour les différents cas.

La dernière circonstance peut être interprétée dans un sens plus large, notamment on peut exiger seulement l'équivalence des propriétés élastiques et dynamiques des ailes pour une similitude géométrique de la surface extérieure de l'aile en contact avec le fluide.

Il est évident que les propriétés caractérisant le mouvement dans son ensemble et ne dépendant pas des configurations isolées de chaque mouvement sont indépendantes du paramètre vt/l. L'expérience montre que la configuration de l'écoulement stationnaire autour d'une aile élastique peut être stable ou instable.

Dans un écoulement stable les amplitudes des mouvements perturbés de l'aile diminuent dans la veine. Dans un écoulement instable on observe un accroissement des amplitudes qui peut éventuellement provoquer la destruction de l'aile.

La stabilité et l'instabilité de l'écoulement pour des perturbations suffisamment petites peuvent être considérées comme des propriétés indépendantes des conditions initiales de l'écoulement et des diverses configurations de l'écoulement. Les propriétés de stabilité des écoulements doivent donc être définies par le système de paramètres

$$\frac{\varrho v^2}{E}, \quad \frac{G}{E}, \quad \frac{m}{\varrho l^3}.$$

Dans la formulation générale du problème il est impossible de diviser l'ensemble de tous les écoulements en écoulements à amplitude croissante et écoulements à amplitude décroissante; les cas ne sont pas exclus où les élongations maximales des oscillations sont soit constantes, soit variables, mais conservent des valeurs suffisamment petites pour tout t.

Si les régimes d'écoulement à amplitudes croissantes et décroissantes se distinguent nettement, alors la frontière entre ces régimes est donnée par la relation

$$F\left(\frac{\varrho v^2}{E}, \frac{G}{E}, \frac{m}{\varrho l^3}\right)=0$$

à laquelle on peut conférer la forme

$$v_{cr}=\sqrt{\frac{E}{\varrho}}\, f\left(\frac{G}{E}, \frac{m}{\varrho l^3}\right).$$

Cette formule donne la vitesse critique du flutter. Si la veine incidente a une vitesse variable, les autres paramètres étant constants, la vitesse critique sépare les régimes d'écoulement stable et instable.

Les coefficients de rigidité de l'aile sont proportionnels aux grandeurs E et G. Changer E et G de n fois équivaut à changer les coefficients de rigidité de n fois. La formule de v_{cr} obtenue ci-dessus montre que si la masse, la forme et les dimensions de l'aile se conservent, la vitesse critique varie de $\sqrt{n}$ fois lorsque la rigidité de l'aile varie de n fois.

Le nombre de Strouhal kl/v_{cr} correspondant à la configuration critique se définit par les valeurs des paramètres abstraits G/E et $m/\varrho l^3$ qui définissent également toutes les grandeurs abstraites indépendantes des données initiales et caractérisant l'écoulement critique.

§ 9. Mouvement d'un navire

La similitude et la dimension sont d'un grand intérêt pratique dans divers calculs et surtout dans la résolution expérimentale de bon nombre de problèmes mécaniques de navigation en surface*).

Considérons le mouvement de translation rectiligne stationnaire d'un navire à la surface d'un liquide remplissant tout le demi-espace inférieur au repos, s'étendant à une grande profondeur et à une distance considérable devant le navire. Le mouvement d'un corps flottant engendre la perturbation de la surface libre. Le mouvement du liquide perturbé est ondulatoire à cause de la pondérabilité.

Tenons compte de l'inertie (ϱ), de la pesanteur (g) et de la viscosité (μ) qui sont de première importance. La compressibilité de l'eau n'ayant aucune valeur pratique, on peut admettre que l'eau est incompressible. Le phénomène capillaire est également sans influence sur le mouvement du navire ordinaire.

Les dimensions et la forme de la coque du navire influent sensiblement sur les principales caractéristiques mécaniques. Considérons tout d'abord

*) Le livre de L. Epstein, *Similitude et dimension en hydromécanique du navire* (en russe), « Soudostroénié », Léningrad, 1970, fait état de l'application de la théorie de similitude à un grand nombre de nouveaux problèmes intéressants du domaine de la marine.

le mouvement d'un navire ayant une coque de forme déterminée. Toutes les dimensions géométriques sont définies par la longueur L du navire. Aux différents L correspondent des coques géométriquement semblables. Pour les navires lourds du type ordinaire on admet que le poids total définit complètement la position du navire par rapport à l'eau. Or, la position du navire influe évidemment sur la résistance, etc. Pour cette raison on prendra le poids ou le déplacement du navire A comme paramètre de définition*). Au lieu du déplacement A exprimé en tonnes on peut prendre le volume de carène D exprimé en mètres cubes puisque $A=\varrho g D$, où ϱg est la densité de l'eau. Pour l'eau douce on a

$$\varrho g = 1 \text{ tf/m}^3.$$

Désignons par v la vitesse du navire. Le système de paramètres sera**) :

$$L,\ D,\ \varrho,\ g,\ \mu,\ v.$$

Toutes les grandeurs géométriques et mécaniques y compris la carène S***), la résistance W, etc. peuvent être considérées comme les fonctions de ces paramètres. Les mouvements dynamiquement semblables et le régime de mouvement se définissent par trois paramètres sans dimension :

$$\psi = \frac{L}{\sqrt[3]{D}} \quad \text{(finesse****)},$$

$$\mathbf{F} = \frac{v}{\sqrt{gL}} \quad \text{(nombre de Froude)}, \qquad \mathbf{R} = \frac{\varrho v L}{\mu} \quad \text{(nombre de Reynolds)}.$$

Ainsi donc, la résistance peut s'écrire

$$W = f(\psi, \mathbf{F}, \mathbf{R})\varrho S v^2. \tag{9.1}$$

Les critères de similitude sont données par :

$$\frac{L_1}{\sqrt[3]{D_1}} = \frac{L_2}{\sqrt[3]{D_2}}, \quad \frac{v_1}{\sqrt{gL_1}} = \frac{v_2}{\sqrt{gL_2}}, \quad \frac{v_1 L_1 \varrho_1}{\mu_1} = \frac{v_2 L_2 \varrho_2}{\mu_2}.$$

On voit sans peine que si l'on utilise le même liquide pour le modèle et la nature, alors $\mu_1/\varrho_1 = \mu_2/\varrho_2$, ce qui rend la simulation impossible. En

*) Si les différents mouvements se produisent lorsque la coque du navire conserve une position semblable par rapport au niveau de l'eau, le poids est proportionnel à L^3. Dans ce cas au lieu de deux paramètres L et A il suffit d'en prendre seulement un.

**) Le mouvement s'effectuant sur la frontière de séparation eau — air, il faudrait ajouter la densité et la viscosité de l'air au nombre de paramètres de définition (pour les vitesses ordinaires du mouvement la compressibilité de l'air est non essentielle). Par ailleurs ces paramètres n'influent guère sur le phénomène et leur présence ne modifie pas les conclusions ultérieures, étant donné qu'ils font intervenir des valeurs adimensionnées ϱ'/ϱ et μ'/μ pouvant être considérées comme constantes pour toute la classe de mouvements.

***) La valeur S diffère peu de la valeur de la surface mouillée à l'état statique qui ne se définit que par deux paramètres L et D.

****) La finesse peut être interprétée comme la longueur d'une coque géométriquement semblable ayant un déplacement d'une tonne.

effet, la constance du nombre de Froude entraîne qu'avec la diminution des dimensions linéaires du navire la vitesse doit diminuer, tandis que la constance du nombre de Reynolds conduit à l'augmentation de la vitesse avec la diminution des dimensions linéaires du navire. Donc la similitude totale dans ce phénomène est impossible si la simulation se fait avec changement d'échelle des longueurs et par suite la valeur du coefficient de résistance du modèle n'est pas égale à la résistance du navire.

La détermination de la résistance du navire à l'aide des essais sur modèle est possible grâce à la possibilité pratique de décomposer la résistance en deux composantes : l'une due à la viscosité et l'autre due à la pondérabilité. Il apparaît que la formule (9.1) peut être approximativement remplacée par la formule suivante :

$$W = W_1 + W_2 = c_f(\mathbf{R})\frac{\varrho S v^2}{2} + c_W(\psi, \mathbf{F})\varrho g D. \tag{9.2}$$

La forme de l'expression (9.2) peut être appuyée par certains raisonnements théoriques d'ordre qualitatif que nous n'allons pas développer ici.

La résistance

$$W_1 = c_f(\mathbf{R})\varrho\,\frac{S v^2}{2}$$

est dite de frottement. La résistance de frottement du modèle et de la nature se calcule au moyen de diverses formules semi-empiriques. La valeur du coefficient de frottement est définie par le nombre de Reynolds **R**. Ce coefficient dépend en outre de la rugosité et, dans une certaine mesure, de la forme de la carène de coque. Plus le nombre de Reynolds est grand, plus le coefficient de frottement est petit. En pratique on prend le coefficient c_f égal à celui de plaques planes. On trouve les données expérimentales sur le coefficient de frottement des plaques planes à la figure 6.

Pour les plaques lisses la valeur du coefficient c_f est donnée par la formule de Prandtl-Schlichting :

$$c_f = \frac{0{,}455}{(\log \mathbf{R})^{2{,}58}}. \tag{9.3}$$

La valeur du coefficient c_f pour les plaques rugueuses sera de beaucoup supérieure.

La résistance W_2 est dite résiduelle. Le coefficient $c_W = W_2/\varrho g D$ donne la résistance résiduelle par tonne de déplacement. On peut déterminer ce coefficient par l'expérience, en faisant les essais sur des modèles géométriquement semblables vérifiant les conditions suivantes :

$$\frac{L_1}{\sqrt[3]{D_1}} = \frac{L_2}{\sqrt[3]{D_2}},$$

$$\frac{v_1}{\sqrt{gL_1}} = \frac{v_2}{\sqrt{gL_2}}.$$

Ces conditions constituent la loi de similitude de Froude.

La résistance résiduelle dépend de la forme de coque. L'analyse de cette dépendance nécessite une classe de mouvements plus étendue, il faut étudier le mouvement d'une famille de coques composée suivant une certaine loi en fonction des paramètres géométriques dont les variations mettent en évidence les particularités géométriques des formes étudiées.

Pratiquement, il s'avère très important de dégager, parmi la multitude infinie des paramètres caractérisant les propriétés géométriques de la forme de coque, ceux qui ont une influence déterminante sur la résistance résiduelle. Les essais montrent que pour toutes sortes de formes de coque géométriquement non semblables des navires courants ce sont le nombre de Froude et la finesse qui déterminent le coefficient c_W. Au lieu du nombre de Froude $\mathbf{F}=v/\sqrt{gL}$ pris pour la longueur on peut utiliser le nombre de Froude pris pour le déplacement

$$\mathbf{F}_D=\frac{v}{\sqrt{g\sqrt[3]{D}}}=F\sqrt{\psi}.$$

La figure 15 reproduit le graphique de Doyère*) qui rassemble les données expérimentales moyennes sur le coefficient c_W en fonction de ψ et de $\mathbf{F}_D$ pour les coques sans parties saillantes (gouvernes, supports d'arbre porte-hélice, etc.). En s'aidant du graphique de Doyère et de la valeur du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds on calcule sans peine la résistance de la coque du navire en fonction de la vitesse du mouvement. Ce calcul donne souvent de très bons résultats dans une première approximation.

Pour une détermination plus précise de la résistance résiduelle les paramètres suivants apparaissent comme essentiels**) :

$$\chi=D/L\varkappa \quad \text{et} \quad B/T,$$

où $\varkappa$ est l'aire du maître couple, B la largeur de la coque, T le tirant d'eau. Le coefficient χ est dit coefficient prismatique de finesse du maître couple.

Outre les principaux paramètres mentionnés on peut également prendre en considération d'autres paramètres caractérisant la forme du maître couple, de la proue, de la poupe, etc., qui influent sur la résistance.

L'étude du mouvement des navires fait intervenir la résistance de remorquage du navire sans hélice W' et la résistance W'' en présence des hélices en rotation produisant une poussée motrice. Dans le dernier cas, si le mouvement est uniforme stationnaire, la résistance W est égale à la composante horizontale de la poussée d'hélice. La résistance W' est la caractéristique de la coque indépendante des propriétés du propulseur. L'interaction entre la coque et l'hélice fait qu'on a habituellement $W'<W''$.

---

*) Ch. Doyère, *Théorie du navire*, Paris, 1927.

**) Les données expérimentales concernant l'influence de F, ψ, χ et de B/T sur la résistance résiduelle pour une certaine série de coques sont rassemblées dans l'ouvrage de G. Taylor, *Speed and Power of Ships*, Washington, 1933.

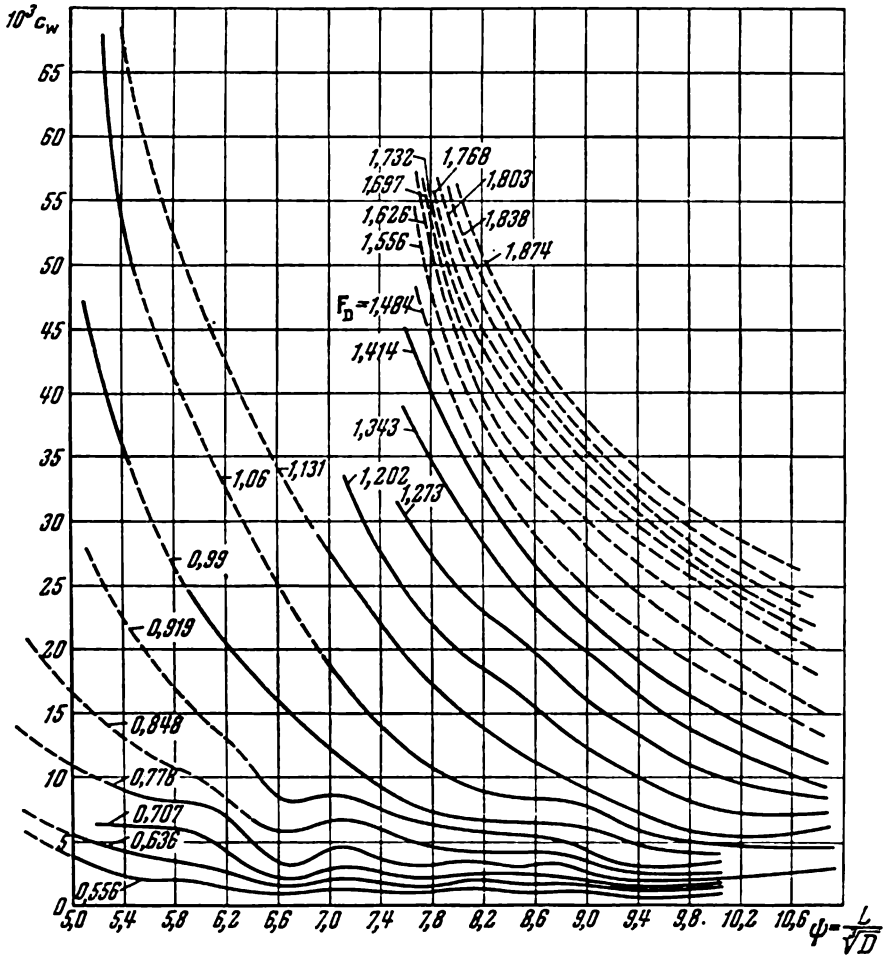


Fig. 15. Résistance résiduelle par tonne de déplacement en fonction de la finesse ψ et du nombre de Froude F_D de déplacement

En donnant la coque, l'hélice et sa disposition, la vitesse du mouvement, le tirant d'eau et toutes les dimensions du navire, on arrive à déterminer la résistance et aussi le nombre de tours n d'hélice et la puissance nécessaire E sur l'arbre d'hélice. Au lieu de la vitesse on peut prendre comme grandeur caractéristique la puissance E ou le nombre de tours n; dans ce cas c'est la vitesse qui devient la grandeur inconnue.

Le produit $W''v$ donne la puissance efficace dépensée pour propulser le navire. Cette puissance est toujours inférieure à la puissance E développée sur l'arbre d'hélice, une partie de la puissance E étant dissipée dans la

perturbation supplémentaire de l'eau occasionnée par l'hélice pour créer la poussée.

Le rapport

$$\frac{W'v}{E}=\eta$$

est dit rendement propulsif. La valeur η caractérise la qualité de la coque, la qualité de l'hélice et son fonctionnement en interaction avec la coque. Les meilleurs navires ont un rendement propulsif élevé.

Pour des navires dont on connaît la forme de la coque, le coefficient ψ, le type de l'hélice et sa disposition par rapport à la coque, le coefficient propulsif peut être considéré pour le rapport d/L constant (d — le diamètre de l'hélice), comme une fonction du nombre de Froude et du nombre de Reynolds ou comme une fonction de l'avance de l'hélice v/nd et du nombre de Reynolds. Les petites variations du nombre de Reynolds produisent un effet infime. Lorsque la forme de la coque et la géométrie de l'hélice varient, la valeur η varie en fonction des paramètres définissant la forme de la coque et l'hélice. Dans certains cas η varie en fonction de la résistance de la coque que l'on peut admettre indépendante du fonctionnement de l'hélice, dans d'autres en fonction des caractéristiques de l'hélice qui sont indépendantes de la forme de la coque. Enfin les problèmes ne manquent pas où la valeur du rendement propulsif est liée à l'interaction de la coque avec l'hélice.

De nos jours la construction navale tend à produire de gros navires. Voici quelques considérations simples à l'appui de cette tendance. Dans ce but conférons à la formule (9.2) une forme légèrement modifiée :

$$W=[c_f(\mathrm{R})+c'_{\mathrm{W}}(\psi, \mathrm{F})]\varrho\frac{Sv^2}{2}, \tag{9.4}$$

où

$$c'_{\mathrm{W}}=2c_{\mathrm{W}}\frac{D}{LS}\frac{1}{\mathrm{F}^2}.$$

Prenons deux navires à géométrie semblable, de déplacement proportionnel au cube des dimensions linéaires :

$$\frac{D_1}{L_1^3}=\frac{D_2}{L_2^3},$$

ce qui équivaut à l'hypothèse naturelle de la similitude des parties immergées. Il est évident que la surface mouillée est proportionnelle au carré des dimensions linéaires.

Soient L_1 et L_2 les longueurs caractéristiques correspondantes et $L_2>L_1$. Pour une même vitesse du mouvement on a

$$\mathrm{R}_2>\mathrm{R}_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2<\mathrm{F}_1.$$

On sait par expérience qu'avec l'augmentation du nombre de Reynolds le coefficient c_f diminue [cf. formule (9.3)] et que la diminution du nombre de Froude entraîne également la diminution de c'_{W} (au moins sur l'intervalle

des petits nombres de Froude $F<0,5$ rencontrés dans la pratique). La variation type de c'_W en fonction du nombre de Froude est représentée sur la figure 16.

Si le mouvement s'effectue avec une même vitesse, le rapport des résistances W_1/W_2 est égal à celui des puissances ou, pour un rendement égal, au rapport des débits du combustible en unité de temps. La cargaison est proportionnelle au déplacement, i.e. elle est proportionnelle au cube des dimensions linéaires. Les frais de transport d'une tonne se déduisent du rapport du poids du combustible brûlé au poids du chargement transporté.

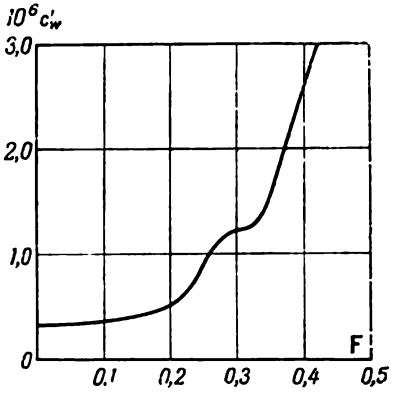


Fig. 16. Courbe type représentant le coefficient de résistance résiduelle c'_W en fonction du nombre de Froude F

A vitesse de mouvement égale, le rapport des frais Q_2 et Q_1 de transport d'une tonne à la distance d'un kilomètre est donné par

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{W_2L_1^3}{W_1L_2^3}.$$

Le dernier rapport peut être considéré comme une caractéristique importante de la rentabilité du cargo. La formule (9.4) permet d'écrire

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{c_f(R_2)+c'_W(F_2)}{c_f(R_1)+c'_W(F_1)}\cdot\frac{L_1}{L_2}=\varkappa\frac{L_1}{L_2}, \quad (9.5)$$

où $\varkappa$ est une quantité inférieure à l'unité qui décroît lorsque le rapport L_2/L_1 croît.

La formule (9.5) montre que la quantité Q_2 diminue plus vite qu'en proportion inverse de l'augmentation des dimensions du navire. Pour une même vitesse de mouvement, le rapport des puissances croît moins vite que le carré des dimensions linéaires.

D'une manière analogue on peut montrer que lorsque les dimensions linéaires augmentent et la puissance augmente proportionnellement au cube des dimensions linéaires, la vitesse croît, tandis que le temps et les frais de transport d'une tonne de chargement par kilomètre diminuent.

Les raisonnements exposés ci-dessus peuvent s'appliquer non seulement aux navires flottant à la surface de l'eau mais aussi aux avions, étant donné que la résistance de l'air pour une vitesse de vol fixe croît moins rapidement que le carré des dimensions linéaires tandis que le poids de l'avion et le chargement utile augmentent proportionnellement au cube des dimensions linéaires environ. C'est ainsi que la réserve relative du combustible et la distance de vol de l'avion augmentent avec ses dimensions. Cela explique pourquoi on augmente les dimensions et le poids des avions long courrier.

Parallèlement, les questions concernant l'encombrement rationnel des propulseurs d'avions, des machines hydrauliques, etc. présentent un grand intérêt pratique.

Le rapport du poids du propulseur à réaction à la poussée développée (« poids spécifique ») représente l'une des caractéristiques principales du propulseur.

Il vaut mieux atteindre une poussée donnée avec plusieurs propulseurs de faibles dimensions qu'avec un seul de grandes dimensions. La raison en est que l'augmentation des dimensions du propulseur entraîne l'augmentation de son « poids spécifique », la poussée croissant proportionnellement au carré et le poids du propulseur proportionnellement au cube des dimensions linéaires environ.

Ainsi donc, si on tient compte du poids spécifique du propulseur, de matériaux déficients et de la technologie de production il apparaît plus avantageux de fabriquer plusieurs petits propulseurs au lieu d'un grand. Les avantages cités ne se manifestent pas dans le cas de petits propulseurs, car avec une diminution poussée des dimensions la similitude mécanique ne s'observe plus tandis que la poussée et la puissance utile diminuent très rapidement.

Dans la recherche des dimensions adéquates des propulseurs et des machines hydrauliques l'on ne doit pas s'en tenir aux assertions qualitatives générales de la similitude, mais l'on doit tenir compte aussi de certaines restrictions, des particularités et des dimensions de l'équipement automatique auxiliaire, de l'analyse des facteurs de production économiques, technologiques et de certains autres facteurs avant de prendre une décision définitive.

Le choix des dimensions rationnelles des propulseurs d'avions, des turbines hydrauliques et de plusieurs autres machines doit être minutieusement analysé et étudié. La similitude y joue un rôle très important.

§ 10. Hydroplanage

L'hydroplanage est un glissement sur la surface de l'eau. La force sustentatrice lors du glissement est presque entièrement fournie par la réaction dynamique de l'eau. Lors du mouvement d'un navire à déplacement la force sustentatrice, tout comme au repos, est constituée par la poussée d'Archimède occasionnée par l'augmentation de la pression hydrostatique avec la profondeur.

Le principe de l'hydroplanage est utilisé par les navires rapides. Les torpilleurs modernes rapides sont des hydroglisseurs. Le décollage et l'amerrissage d'hydravions sont accompagnés d'un glissement.

L'hydroplanage d'un navire de forme donnée peut se produire avec des orientations diverses du navire par rapport à la surface de l'eau. L'orientation du navire par rapport à l'eau a une importance essentielle.

Le nombre de paramètres caractérisant le mouvement d'un hydroglisseur ou d'un hydravion de géométrie donnée dépasse le nombre de paramètres définissant le mouvement des navires à déplacement. Dans l'hydroplanage, outre le tirant d'eau ou la surface mouillée, il faut encore se donner l'angle de différence θ dit encore angle de marche (l'angle entre

une direction fixe du navire et l'horizontale). Au lieu du tirant d'eau et de l'angle de différence on peut fixer la charge sur l'eau Δ, la position du centre de gravité du navire et le moment des forces extérieures par rapport au centre d'inertie, non pas celui des forces hydrodynamiques mais, par exemple, celui des forces aérodynamiques. Dans la pratique les plus commodes sont la charge sur l'eau et l'angle de différence.

En adoptant pour le problème de l'hydroplanage la même formulation générale que pour le problème du mouvement du navire à déplacement, on arrive à la conclusion que le glissement stationnaire d'un navire de géométrie fixée peut être défini par le système de paramètres suivants :

$$B, \Delta, \theta, v, \varrho, g, \mu.$$

La classe de mouvements dynamiquement semblables ainsi que toutes les combinaisons sans dimension de diverses grandeurs mécaniques sont décrites par les paramètres adimensionnés

$$\theta, \quad \frac{\Delta}{\varrho g B^3} = C_\Delta, \quad \frac{vB\varrho}{\mu} = \mathbf{R}, \quad \frac{v}{\sqrt{gB}} = \mathbf{F}. \tag{10.1}$$

Outre les paramètres définissant le mouvement des navires à déplacement ce système comporte l'angle de marche θ qui peut prendre les différentes valeurs dans les mouvements différents. Pour les navires à déplacement, la différence entre les angles de marche pour les mouvements dont la comparaison présente un intérêt pratique peut être habituellement négligée.

La pondérabilité de l'eau est traduite au moyen de paramètres comprenant l'accélération de la pesanteur. Le système (10.1) contient deux paramètres comportant g, à savoir C_Δ et $\mathbf{F}$. Ce système peut être remplacé par

$$\theta, \quad C_B = \frac{2\Delta}{\varrho B^2 v^2} = \frac{2C_\Delta}{\mathbf{F}^2}, \mathbf{R}, \mathbf{F}, \tag{10.2}$$

dans lequel l'accélération de la pesanteur ne figure que dans le nombre de Froude, $\mathbf{F} = v/\sqrt{gB}$.

L'hydroplanage porte manifestement le caractère d'un choc. En avant d'un hydroglisseur l'eau primitivement au repos est mise en mouvement à l'instant suivant par le fond du glisseur qui avance. L'on a donc tout lieu de penser que ce sont les forces massiques qui sont les forces principales tandis que le poids des particules aqueuses est alors si faible qu'on peut le négliger.

Supposer négligeable le poids des particules d'eau revient à supposer négligeable le paramètre g et partant le nombre de Froude dans le système de paramètres θ, C_B, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{F}$.

On a établi théoriquement*) que la pondérabilité de l'eau a une influence infime sur nombre de caractéristiques fondamentales du mouvement par

*) L. Sédov, Travaux du colloque sur la théorie de la résistance d'onde, pp. 7-30, éd. TZAGUI, M., 1937; N. Kotchine, Travaux de TZAGUI, op. 356, 1938; Y. Tchaplyguine, Travaux de TZAGUI, op. 508, 1940.

hydroplanage (grands nombres de Froude). De nombreuses données expérimentales confirment*) également cette hypothèse de façon satisfaisante. Pour cette raison en simulant les régimes d'hydroplanage pur l'on est en droit de ne pas respecter la loi de similitude de Froude.

On voit sans peine qu'il n'est pas légitime de conclure, à partir de l'absence de l'influence de la pondérabilité du fluide, que le nombre de Froude **F** et le coefficient C_Δ contenant tous les deux l'accélération de la pesanteur g sont simultanément non essentiels dans le système de paramètres θ, C_Δ, **R** et **F**. Les paramètres C_Δ et **F** conduisent à la combinaison

$$\frac{2C_\Delta}{\mathbf{F}^2}=C_B,$$

ne renfermant pas g. Le paramètre C_B peut néanmoins s'avérer important dans nombre de cas où la pondérabilité de l'eau et le paramètre g sont tout à fait négligeables.

Les grandeurs adimensionnées, indépendantes des nombres de Froude et de Reynolds, peuvent dépendre de la charge Δ et de la vitesse v uniquement par l'intermédiaire de la combinaison

$$\frac{2\Delta}{\varrho B^2 v^2}=C_B.$$

Grâce à cela au lieu d'étudier l'influence de la vitesse on peut étudier l'influence de la charge et inversement. Cette circonstance est d'une importance capitale lorsque les vitesses dont on dispose sont insuffisantes.

En utilisant cela on arrive à obtenir de l'expérience des résultats valables pour les régimes ne permettant pas une mesure directe.

La viscosité de l'eau ne se manifeste notablement qu'au voisinage immédiat du fond du glisseur (couche limite), de sorte que le nombre de Reynolds n'influe pas considérablement sur la distribution des pressions, sur le couple hydrodynamique, sur la forme de la surface mouillée, etc. L'influence de la viscosité de l'eau sur l'amortissement des perturbations ne se fait sentir réellement que très loin du glisseur.

Quant à la résistance, elle est essentiellement fonction des forces de frottement sur le fond, donc la viscosité et le nombre de Reynolds se manifestent dans les coefficients adimensionnés de la résistance.

Les caractéristiques hydrodynamiques d'un glissement stationnaire dépendent fortement, outre les paramètres mécaniques mentionnés, de la géométrie du fond du glisseur.

La nature différente de la force sustentatrice des navires à déplacement et des hydroglisseurs a conditionné leurs formes nettement différentes. Les traits propres à la carène d'un hydroglisseur sont : le fond plat, les bouchains nettement dessinés, les redans transversaux dans le fond. Le fond plat est destiné à recevoir de grandes forces ascensionnelles pour une faible surface

*) L. Epstein, Travaux de TZAGUI, op. 508, 1940. L. Sédov et A. Vladimirov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 33, op. 2 et 3, 1941.

mouillée. Des bouchains aigus et le redan ont pour but de décoller les jets d'eau pendant l'hydroplanage de sorte que la surface latérale et une grande partie de la surface du fond ne se trouvent pas mouillées, ce qui réduit la résistance de frottement.

Les diverses particularités du fond peuvent être décrites par quelques paramètres adimensionnés. Des essais systématiques sur une série de profils permettent d'évaluer les conséquences d'une modification de ces paramètres.

Dans le problème du glissement d'une plaque en forme de coin plan on se heurte à une circonstance singulière qui relève de la similitude mécanique et de l'analyse dimensionnelle. Soit une plaque plane carénée prismatique animée d'un glissement sur une nappe d'eau. Supposons que le plan de symétrie longitudinal passant par la quille de la plaque est vertical et que le mouvement est parallèle au plan de symétrie. La partie arrière de la plaque — l'écusson — représente un plan perpendiculaire au plan de symétrie.

Envisageons le cas où la longueur de la plaque et la largeur de la joue sont suffisamment grandes pour que les limites de la surface mouillée pour tous les mouvements comparés ne soient liées en aucune façon aux dimensions constructives de la plaque. La largeur et la longueur géométriques de la plaque peuvent être considérées comme infinies dans tous les mouvements comparés. La géométrie de la plaque est complètement définie par l'angle entre les joues, $\pi-2\beta$ (β est l'angle de carénage) et par l'angle que fait la droite de quille avec le plan de la base. Ces angles peuvent être pris comme paramètres géométriques de la forme. Pour simplifier on fera l'étude des classes de mouvements où ces angles sont fixes.

On voit sans peine que dans ce cas le nombre de paramètres de définition se réduit, la dimension linéaire, caractéristique de la plaque, étant écartée.

L'hydroplanage stationnaire de la plaque carénée sur une largeur partiellement mouillée est défini par les paramètres

$$\Delta, \theta, v, \varrho, g, \mu.$$

La largeur mouillée suivant l'écusson et la longueur mouillée suivant la quille sont complètement définies par les paramètres indiqués.

La classe de mouvements semblables et le régime du mouvement sont caractérisés par trois grandeurs sans dimension

$$\theta, v\Big/\sqrt{g\sqrt[3]{\Delta/\varrho g}}=\mathbf{F}_1, \quad \varrho v\sqrt[3]{\Delta/\varrho g}/\mu=\mathbf{R}_1. \tag{10.3}$$

Les nombres $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{R}_1$ peuvent être considérés comme le nombre de Froude et le nombre de Reynolds de charge.

Dans l'hydroplanage (grands $\mathbf{F}_1$) le nombre de Reynolds n'influe que sur les grandeurs qui dépendent des particularités de l'écoulement du liquide dans la couche limite. En particulier, on peut admettre que la longueur mouillée l suivant la quille est indépendante de la viscosité, à savoir

$$l=f(\theta, \Delta, v, \varrho, g). \tag{10.4}$$

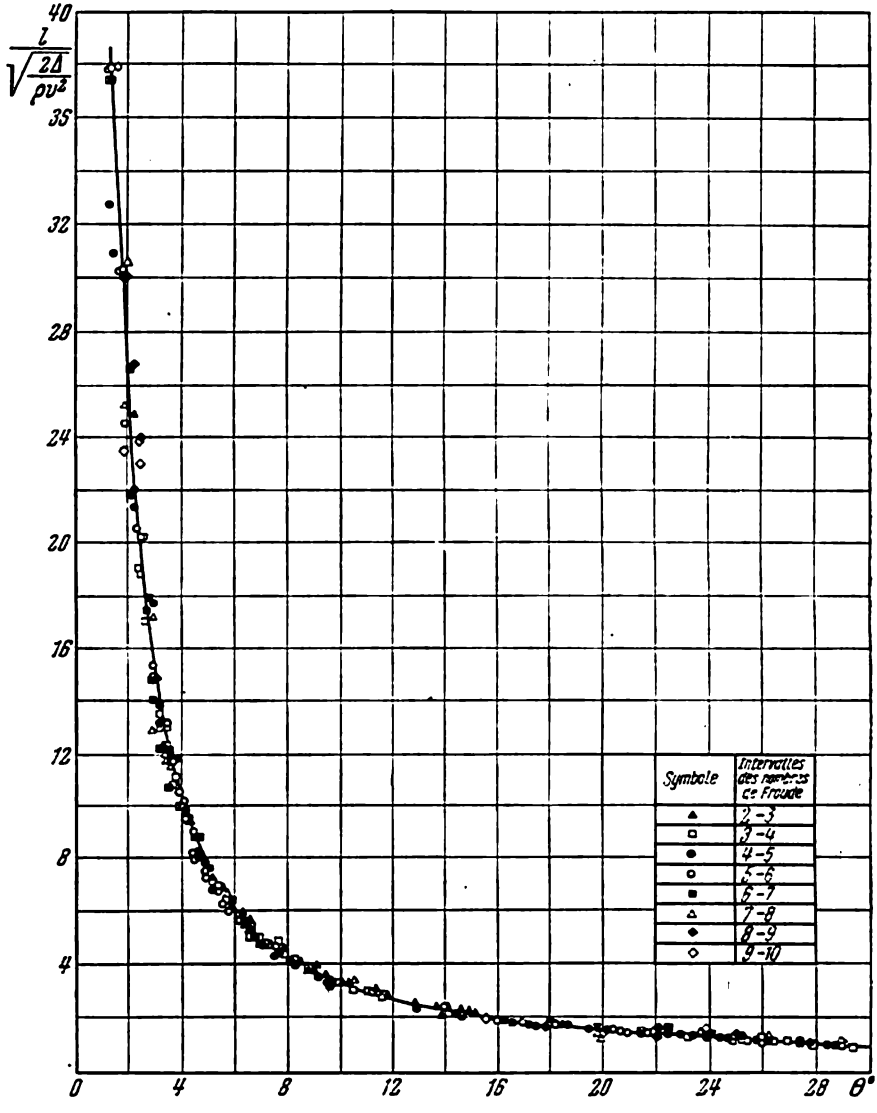


Fig. 17. Glissement des plaques carénées

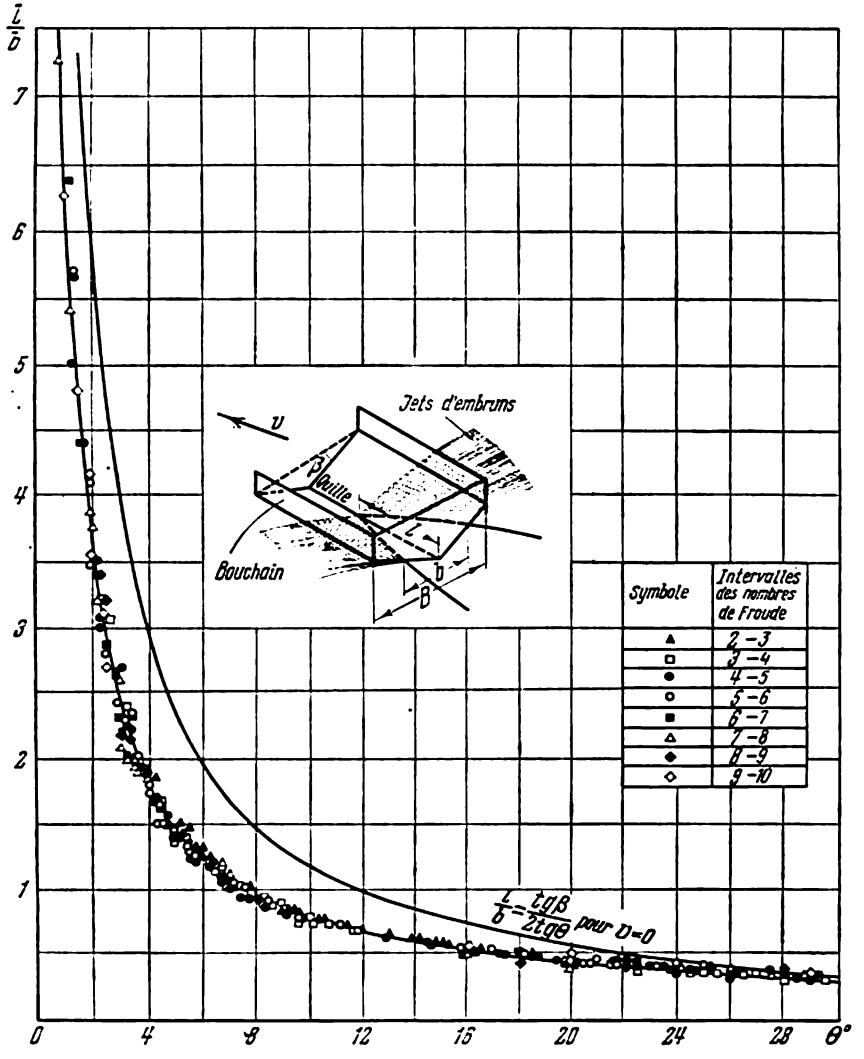


Fig. 18. Les données expérimentales mettent en évidence que la pondérabilité de l'eau est négligeable pour des nombres de Froude $F_1 > 2$

Sous forme adimensionnée cette relation se présente ainsi

$$l=\sqrt{\frac{\Delta}{\varrho v^2}}\,f(\theta, \mathrm{F}_1). \tag{10.5}$$

En supposant en outre que la pondérabilité n'a aucune influence sur l, en d'autres termes, que l'accélération g est non essentielle dans la relation (10.5), on obtient

$$l=\sqrt{\frac{\Delta}{\varrho v^2}}\,f(\theta). \tag{10.6}$$

Il est évident que dans ces hypothèses toutes les dimensions linéaires (par exemple, la largeur mouillée suivant l'écusson, etc.) sont proportionnelles à $\sqrt{\Delta/\varrho v^2}$. Lorsque l'angle de différence θ est fixé mais les charges sur l'eau Δ et les vitesses d'hydroplanage v sont variables, les surfaces mouillées seront géométriquement semblables.

Ces conclusions coïncident bien avec l'expérience pour de grands nombres de Froude lorsque $\mathrm{F}_1>2$*) (fig. 17, 18, 19).

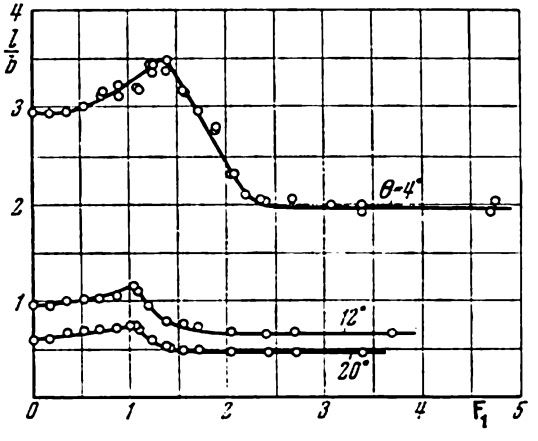


Fig. 19. Glissement des plaques carénées. La pondérabilité de l'eau ne revêt de l'importance que pour des nombres de Froude $\mathrm{F}_1<2$

Dans le système de paramètres de définition on a pris en qualité de paramètres naturels la charge sur l'eau Δ et la vitesse de mouvement v, car dans les expériences c'est précisément ces valeurs qui sont données au préalable, les autres étant mesurées. Au lieu de la charge Δ on peut prendre comme grandeur de définition la longueur mouillée l ou la largeur mouillée

*) L. Sédov et A. Vladimirov, «Doklady Academii naouk» de l'U. R. S. S., t. 33, n° 2, 1941.

b suivant l'écusson. On peut par exemple choisir le système suivant de paramètres de définition dimensionnés :

$$\theta, l, v, \varrho, g, \mu$$

et respectivement le système de paramètres sans dimensions

$$\theta, \quad \frac{v}{\sqrt{gl}}, \quad \frac{\varrho v l}{\mu}.$$

Dans ce cas les relations (10.4) à (10.6) seraient les relations déterminant la charge sur l'eau Δ.

§ 11. Choc sur l'eau

Plusieurs questions pratiques, en particulier celle de l'amerrissage d'hydravions, nous confrontent avec le phénomène du choc sur l'eau. L'aspect le plus intéressant de l'étude de ce phénomène est la mise en évidence des propriétés de la réaction de l'eau et du ricochet sur l'eau.

Beaucoup ont vu une pierre plate jetée obliquement sur la surface de l'eau avec une grande vitesse horizontale et animée d'une rotation permettant de conserver l'obliquité, ricocher au contact de l'eau, souvent plusieurs fois. De toute évidence dans ce phénomène de ricochet sur l'eau c'est la vitesse horizontale qui est appelée à jouer un rôle de premier plan. Si elle n'a pas une grande vitesse horizontale, une pierre lourde ne peut ricocher sur l'eau. De multiples ricochets témoignent d'une petite perte de la vitesse horizontale au contact de l'eau. On connaît également les ricochets de projectiles rencontrant un obstacle. Ainsi, un boulet sphérique de diamètre 0,16 m animé d'une vitesse initiale de 455 m/s peut effectuer plus de 22 ricochets sur l'eau*).

Actuellement, l'artillerie emploie à dessin le tir à ricochet.

Le phénomène du ricochet sur l'eau se manifeste lors de l'amerrissage d'hydravions. Ici il n'est pas souhaitable, étant très dangereux.

Considérons à l'aide de la théorie dimensionnelle et de similitude le problème du choc sur l'eau appliqué à l'amerrissage d'hydravions et aux essais sur les plaques, modèles schématisés de coques et de flotteurs d'avions.

Fixons la forme géométrique du corps mobile. En revanche laissons variable l'échelle qui peut être donnée par la valeur d'une certaine dimension linéaire. Il est logique de choisir comme dimension linéaire la largeur de la coque. Pour simplifier, limitons-nous au cas où le corps peut être assimilé au solide parfait. La différence de propriétés aérodynamiques peut affecter profondément le déroulement de tout le phénomène. Dans l'étude expérimentale du problème on se bornera pour commencer à considérer le mouvement des corps ayant la même géométrie et, par conséquent, les mêmes propriétés aérodynamiques.

---

*) E. Jonquières, Comptes Rendus, 1883, n° 23, pp. 1278 à 1281.

Admettons que le corps possède le plan longitudinal des symétries géométrique et dynamique et que son mouvement s'effectue dans la direction longitudinale parallèlement au plan de symétrie. En outre nous supposons que le mouvement non stationnaire du corps est à deux degrés de liberté : sont admis les déplacements verticaux du centre de gravité et la rotation autour du centre de gravité. Enfin nous posons constante la vitesse horizontale du centre de gravité. En réalité, les forces de résistance occasionnent une diminution de la vitesse horizontale mais, étant donné que les processus les plus intéressants sont de courte durée, il est permis de négliger cette diminution*).

Dans la formulation générale du problème on tiendra compte de l'inertie, de la viscosité et de la pondérabilité du fluide et l'on négligera la compressibilité et le phénomène capillaire. Bien que le mouvement ondulatoire de l'eau puisse affecter sensiblement le phénomène étudié, on supposera tout de même qu'avant le contact avec le corps l'eau était au repos.

Il découle des suppositions précédentes que le mouvement du système corps — eau se définit par l'ensemble de paramètres suivants pouvant être donnés arbitrairement dans certaines limites :

I. Paramètre définissant l'échelle : la largeur du canot B (la largeur de la plaque dans le cas d'un modèle).

II. Paramètres cinématiques : la date actuelle t (le moment initial $t=0$ correspond au moment où le corps touche la nappe d'eau), la vitesse horizontale U et la vitesse initiale verticale v_0, l'angle de différence initial (l'angle d'attaque) θ_0, la vitesse angulaire initiale Ω_0**).

III. Paramètres dynamiques du corps : les coordonnées du centre de gravité ξ, η dans un système de coordonnées lié au corps; le moment d'inertie J par rapport à l'axe transversal passant par le centre de gravité; la masse m; la composante verticale A des forces extérieures données (pour un corps libre, $A=mg$). Dans les expériences de laboratoire on parvient, en les équilibrant artificiellement, à rendre indépendantes les grandeurs A et mg***).

IV. Constantes physiques : l'accélération de la pesanteur g, la densité ϱ et la viscosité de l'eau μ.

---

*) La condition de la constance de la vitesse horizontale n'est pas essentielle dans l'application de la théorie dimensionnelle au problème du choc sur l'eau dans sa formulation générale. Lorsqu'on procède à la simulation de ce phénomène il devient nécessaire de fixer la vitesse horizontale. Dans les conditions de laboratoire on maintient la vitesse horizontale constante en faisant mouvoir le chariot remorqueur; le centre de gravité du modèle glisse suivant une glissière verticale solidaire du chariot, celui-ci se déplaçant à une vitesse constante donnée. Le frottement dans les éléments moteurs de l'installation peut être rendu aussi petit que l'on désire.

**) On admet que la configuration initiale du mouvement à l'instant d'amerrissage se définit complètement par les paramètres

$$U, v_0, \theta_0 \quad \text{et} \quad \Omega_0.$$

***) On suppose que les forces extérieures supplémentaires sont appliquées au centre de gravité. La force et le moment aérodynamiques résultants peuvent être considérés comme des grandeurs définies par la forme et le mouvement du corps.

Toutes les grandeurs adimensionnées ayant trait au problème étudié sont fonction du système suivant de paramètres adimensionnés définissant le régime et la configuration du mouvement

$$\tau=\frac{Ut}{B},\quad \frac{v_0}{U},\ \theta_0,\quad \frac{\Omega_0 B}{U},\quad \frac{\xi}{B},\quad \frac{\eta}{B},\quad \frac{J}{\varrho B^5},\quad \frac{m}{\varrho B^3},$$

$$C_B=\frac{2A}{\varrho B^2 U^2},\quad \mathbf{F}=\frac{U}{\sqrt{gB}},\quad \mathbf{R}=\frac{\varrho UB}{\mu}.$$

L'influence du nombre de Reynolds se manifeste par l'intermédiaire des forces de frottement dues à la viscosité de l'eau qui sont en principe petites par rapport à la portance et qui sont d'ordinaire approximativement horizontales; toutefois dans certains cas les forces de frottement peuvent sensiblement influer sur la valeur du moment de rotation. Mais si l'on se souvient qu'elles dépendent relativement peu du nombre de Reynolds, on pourra de façon légitime tout à fait négliger l'influence du nombre de Reynolds sur les caractéristiques du mouvement vertical et du mouvement de rotation et, en particulier, sur le ricochet sur l'eau.

L'influence du nombre de Froude **F** sur les forces hydrodynamiques, la forme de la surface mouillée, etc., est en rapport avec l'action de la pondérabilité de l'eau sur l'écoulement perturbé de l'eau au voisinage du corps. Avec de grandes vitesses horizontales le phénomène a le caractère d'un choc, donc on peut considérer la réaction de l'eau comme indépendante du nombre de Froude. Soulignons toutefois que la valeur suffisamment grande du nombre de Froude à partir de laquelle il devient non essentiel dépend de la nature de la grandeur mécanique étudiée et est liée aux valeurs des autres paramètres de définition.

Si $A=mg$, les paramètres $m/\varrho B^3$, C_B et **F** deviennent dépendants. Dans ce cas il suffit de ne conserver que deux paramètres $m/\varrho B^3$ et C_B, étant donné que le coefficient C_B tient simultanément compte de l'influence de la pondérabilité de la maquette et de l'eau.

Désignons par Y la composante verticale de la résultante hydrodynamique. Selon ce qui précède on a la formule

$$\frac{Y}{A}=f\left(\tau,\ \frac{v_0}{U},\ \theta_0,\ \frac{\Omega_0 B}{U},\ \frac{\xi}{B},\ \frac{\eta}{B},\ \frac{J}{\varrho B^5},\ \frac{m}{\varrho B^3},\ C_B\right). \tag{11.1}$$

Le mouvement d'un modèle concret se caractérise par la constance des paramètres ξ/B, η/B, $J/\varrho B^5$ et $m/\varrho B^3$. Si l'angle d'attaque est fixé et si seule la vitesse verticale est variable, on est en présence d'un mouvement à un seul degré de liberté — la translation verticale. Dans ce cas $\Omega_0=0$ et les paramètres ξ, η et J sont non essentiels; la formule (11.1) prend la forme

$$\frac{Y}{A}=f\left(\tau,\ \frac{v_0}{U},\ \theta,\ \frac{m}{\varrho B^3},\ C_B\right). \tag{11.2}$$

Dans cette formule on a conservé l'angle de différence en tant qu'angle constant de l'installation d'essai, mais pouvant varier dans différentes expériences.

Le paramètre τ se définit lorsqu'on considère dans différentes expériences la valeur maximale du rapport Y/A ou tout simplement la valeur Y/A à certains instants caractéristiques :

$$\frac{Y_{\max}}{A}=f^*\left(\frac{v_0}{U},\ \theta,\ \frac{m}{\varrho B^3},\ C_B\right). \tag{11.3}$$

Il est évident que lors du ricochet, les moyennes temporelles de toutes les grandeurs pour le temps de contact avec l'eau, le temps adimensionné $\tau_1=Ut_1/B$ que dure le contact, la profondeur d'immersion maximale adimensionnée $h_{\max}/B$, etc. ne sont pas liés au paramètre τ.

Toute la classe de mouvements délimitée peut se diviser en deux parties selon qu'il y a rebondissement ou non (réalisation ou non de ricochets). La frontière entre ces deux régimes de mouvement est donnée par la relation

$$\Phi\left(\frac{v_0}{U},\ \theta_0,\ \frac{\Omega_0 B}{U},\ \frac{\xi}{B},\ \frac{\eta}{B},\ \frac{J}{\varrho B^5},\ \frac{m}{\varrho B^3},\ C_B\right)=0, \tag{11.4}$$

et en cas d'une translation à un degré de liberté par la relation

$$\Phi\left(\frac{v_0}{U},\ \theta,\ \frac{m}{\varrho B^3},\ C_B\right)=0. \tag{11.5}$$

On dispose actuellement de données expérimentales*) sur la forme de la fonction Φ pour l'amerrissage d'une plaque plate.

En considérant le problème de l'hydroplanage stationnaire d'une plaque carénée on a établi la possibilité de diminuer le nombre de paramètres de définition au cas où la surface mouillée ne dépend pas des dimensions de la plaque, c'est-à-dire où le paramètre B est éliminé.

Dans le problème du choc sur l'eau d'un coin (à l'angle fixé) ayant la forme décrite dans le paragraphe précédent, au lieu des formules (11.3) et (11.5) sont valables les formules

$$\frac{Y_{\max}}{A}=f^*\left(\frac{v_0}{U},\ \theta,\ \frac{2A}{\varrho^{1/3}m^{2/3}U^2}\right) \tag{11.6}$$

et

$$\Phi\left(\frac{v_0}{U},\ \theta,\ \frac{2A}{\varrho^{1/3}m^{2/3}U^2}\right)=0. \tag{11.7}$$

Les paramètres v_0/U et $2A/\varrho^{1/3}m^{2/3}U^2$ peuvent être remplacés par les paramètres équivalents symétriques

$$\frac{v_0}{\sqrt{\frac{A}{m}\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}} \quad \text{et} \quad \frac{U}{\sqrt{\frac{A}{m}\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}},$$

qui caractérisent séparément, pour A et m constants, l'influence des vitesses verticale et horizontale.

*) L. Sédov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 37, op. 9, 1942.

On a ébauché plus haut le système de paramètres de définition et la forme de certaines relations importantes. Quelques-uns des paramètres indiqués sont non essentiels dans nombre de cas; on établit cela au moyen d'essais spéciaux sortant du cadre de la théorie de la similitude et de la dimension.

Le phénomène du ricochet sur la nappe d'eau est étroitement lié à l'instabilité longitudinale de l'hydroplanage. On se heurte à ce dernier phénomène dans la nature pour les hydravions et hydroglisseurs ainsi que dans les essais sur modèles. Actuellement, il est bien connu que pour tout hydravion et pour tout modèle existent des régimes de mouvement instables, qui sont très dangereux, car ils entraînent de fortes oscillations longitudinales. Tout comme dans le problème de l'amerrissage, l'analyse de l'instabilité de l'hydroplanage se complique à cause d'un grand nombre de paramètres dont le rôle est à éclaircir.

On voit aisément que le système de paramètres adimensionnés définissant la stabilité de l'hydroplanage se déduit du système de paramètres décrivant le phénomène du choc sur l'eau si l'on pose $v_0=\Omega_0=0$. A la notion de frontière de ricochet correspond la notion analogue de frontière de stabilité séparant les régimes stable et instable de l'hydroplanage.

Si la pondérabilité de l'eau ne joue aucun rôle, la frontière de stabilité dépend de la charge et de la vitesse de l'hydroplanage uniquement par l'intermédiaire du coefficient $C_B=2A/\varrho B^2U^2$. Cela est confirmé par l'expérience pour nombre de régimes intéressants d'un point de vue pratique*).

Tout comme dans le problème du choc sur l'eau, le nombre de paramètres définissant la stabilité de l'hydroplanage des plaques plates carénées sur une largeur réduite diminue**).

Considérons tout spécialement le problème particulier de la chute verticale sur l'eau.

Le phénomène du choc sur l'eau en chute verticale lorsque le corps est animé d'un mouvement de translation se définit par les paramètres***)

$$t,\ v_0,\ m,\ B,\ A,\ g \text{ et } \varrho.$$

En qualité de paramètres adimensionnés définissant le régime et la configuration du mouvement prenons ces quatres grandeurs :

$$\frac{tv_0}{\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}},\quad \frac{m}{\varrho B^3},\quad \frac{v_0}{\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}},\quad \frac{v_0}{\sqrt{\frac{A}{m}\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}}. \tag{11.8}$$

Dans le cas où $A=mg$ il n'en reste que trois.

---

*) L. Sédov, « Matériel aéronautique », n° 4, 1940.

**) L. Sédov et A. Vladimirov, « Izvestia Academii naouk », OTN, n° 1, 1943.

***) Si le corps est dissymétrique, on peut réaliser une translation verticale à l'aide de guides spéciaux.

Il est évident que les grandeurs adimensionnées étudiées prises à certains instants caractéristiques (valeurs maxima ou les moyennes temporelles) se définissent pour $A=mg$ par deux paramètres seulement

$$\frac{m}{\varrho B^3}, \quad \frac{v_0}{\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}}.$$

Par exemple, la force maximum du choc et l'impulsion communiquée au corps par l'eau au cours d'un intervalle de temps caractéristique, sont données par les formules du type

$$P_{\max}=f_1\left(\frac{m}{\varrho B^3}, \frac{v_0}{\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}}\right)\varrho\left(\frac{m}{\varrho}\right)^{2/3}v_0^2 \tag{11.9}$$

et

$$I=f_2\left(\frac{m}{\varrho B^3}, \frac{v_0}{\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}}\right)mv_0. \tag{11.10}$$

Si la vitesse d'affleurement v_0 est grande et que la forme de la surface mouillée du corps soit voisine du plan horizontal, le phénomène d'immersion dans l'eau présente un caractère très prononcé de choc. Dans ce cas la pondérabilité de l'eau et le poids du corps ne sont pas essentiels. De sorte que pour la chute sur l'eau lorsque la grandeur

$$\frac{v_0}{\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}}}$$

est suffisamment élevée, doivent avoir lieu les formules du type

$$P_{\max}=f_1\left(\frac{m}{\varrho B^3}\right)\varrho^{1/3}m^{2/3}v_0^2, \tag{11.11}$$

$$I=f_2\left(\frac{m}{\varrho B^3}\right)mv_0. \tag{11.12}$$

Il est évident qu'en cas de v_0 et m constants, plus les dimensions du corps sont grandes (paramètre B) plus la réaction de l'eau est grande, ce qui a pour effet l'augmentation des fonctions $f_1(m/\varrho B^3)$ et $f_2(m/\varrho B^3)$ lorsque le paramètre $m/\varrho B^3$ tend vers zéro. Les formules (11.11) et (11.12) montrent que la force maximum est proportionnelle au carré de la vitesse, et l'impulsion, au premier degré de la vitesse de chute*).

*) Les données expérimentales confirment cette conclusion; voir R. Kreps, Travaux de TZAGUI, op. 438, 1939; op. 513, 1940.

Le paramètre $m/\varrho B^3$ est éliminé dans le problème de la chute d'un cône sur une nappe d'eau (la section du cône par un plan horizontal peut être quelconque), car dans ce cas on n'a pas à compter avec la dimension linéaire caractéristique.

Ainsi donc, dans le problème de la chute d'un cône sur l'eau au lieu des formules (11.11) et (11.12) on obtient

$$P_{\max}=c_1\varrho^{1/3}m^{2/3}v_0^2, \tag{11.13}$$

$$I=c_2mv_0. \tag{11.14}$$

Ces formules donnent $P_{\max}$ et I en fonction de la masse. Les constantes c_1 et c_2 dépendent de la forme du cône. Remarque intéressante : la loi régissant l'influence de la masse dans les formules (11.13) et (11.14) ne dépend pas de la forme du cône, cette dernière n'influant que sur les valeurs des constantes c_1 et c_2.

Cependant, la conclusion générale selon laquelle la force maximum est proportionnelle à $m^{2/3}$ pour les corps de toute forme serait plutôt incorrecte. En effet, examinons la chute sur l'eau d'un long coin plat à faible angle de carénage. Supposons le plan de symétrie du coin vertical et la vitesse de chute élevée. En négligeant la pondérabilité de l'eau et du coin on aboutit au système de paramètres suivants :

$$t,\ v_0,\ \frac{m}{L}=m_1,\ L,\ \varrho,$$

où L est la longueur du coin suivant la quille, m_1 la masse du coin par unité de longueur.

Si L est très grand, on pourrait considérer le cas limite $L=\infty$. Dans le cas limite d'un coin plat indéfini, lorsque la surface mouillée n'atteint pas les bords du coin, la dimension linéaire s'élimine, si bien que le phénomène se définit uniquement par quatre grandeurs dimensionnées :

$$t,\ v_0,\ m_1,\ \varrho.$$

Toutes les caractéristiques adimensionnées se définissent par une seule quantité adimensionnée

$$\frac{tv_0}{\sqrt{\dfrac{m}{\varrho L}}}.$$

Les valeurs maxima et moyennes des caractéristiques mécaniques adimensionnées seront des constantes abstraites.

Ainsi donc, dans ce cas la force maximum du choc vérifie la formule

$$\frac{P_{\max}}{L}=c_3\sqrt{\varrho m_1}\,v_0^2$$

soit

$$P_{\max}=c_3\sqrt{\varrho mL}\,v_0^2.$$

On en conclut que pour des corps très étendus la force maximum est proportionnelle à la racine carrée de la masse du corps. La constante c_3 dépend

du carénage, elle peut être considérée comme fonction de l'angle de carénage β.

On voit sans peine que c_3 augmente à mesure que décroît l'angle de carénage. Pour des angles de carénage faibles on peut poser $c_3=c_4/\beta$ où c_4 pour β faibles peut être considéré comme indépendant de l'angle de carénage. Dans le cas général d'un coin fini, c_3 vérifie la formule

$$c_3=\frac{f\left(\frac{m}{\varrho L^3}, \beta\right)}{\beta}.$$

Le dépouillement des résultats expérimentaux est rendu plus aisé si l'on détermine la fonction $f(m/\varrho L^3, \beta)$, étant donné qu'avec β faibles et pour les coins fort étirés ou m petits, cette fonction dépend faiblement de ses arguments.

§ 12. Immersion uniforme d'un cône et d'un coin dans un liquide

Envisageons le problème de l'écoulement non stationnaire d'un liquide incompressible engendré par l'immersion dans le liquide d'un solide en forme d'un cône ou d'un coin. L'intérêt que présente la forme du cône dans le problème spatial ou la forme du plat-coin d'envergure infinie dans le problème bidimensionnel consiste en ce que leur surface est fixée complètement par la seule exigence de la similitude géométrique. La variété de cônes géométriquement semblables se réduit à un cône unique. La nappe du cône et la surface du plat-coin se déterminent entièrement par les grandeurs géométriques.

Supposons que le liquide occupe tout le demi-espace inférieur limité par un plan horizontal et que l'on peut négliger la pondérabilité et la viscosité du liquide. Donc le liquide peut être supposé incompressible, impondérable et parfait.

Soit $t=0$ l'instant initial où le corps entre en contact avec le liquide au repos. Le corps immergeant dans le liquide exécute une translation à une vitesse v de grandeur et de sens constants.

Supposons que sur la surface libre la pression p a une valeur constante p_0. Le liquide étant incompressible, la valeur p_0 sur la surface libre ne joue aucun rôle dans l'écoulement perturbé du liquide. Au lieu de la pression p on pourrait envisager la différence $p-p_0$; dans ce cas le paramètre p_0 devient non essentiel. Aussi les propriétés mécaniques du liquide se définissent-elles par un seul paramètre, la densité ϱ.

Il découle de ce qui précède que toutes les caractéristiques mécaniques de l'écoulement du liquide en chaque point sont définies par les quantités

$$\varrho, t, v, \alpha, \beta, x, y, z,$$

où α et β sont les angles donnant l'orientation de la vitesse v par rapport au corps et x, y, z les coordonnées du point considéré, soit dans un système

de coordonnées immobile dont l'origine coïncide avec le point de contact du sommet du cône avec le niveau du liquide, soit dans un système de coordonnées mobile solidaire du corps et dont l'origine est placée au sommet du cône.

Il est évident que toutes les grandeurs sans dimension en rapport éventuel avec le phénomène considéré sont définies par les paramètres

$$\alpha, \ \beta, \ \frac{x}{vt}, \ \frac{y}{vt}, \ \frac{z}{vt},$$

les paramètres x/vt, y/vt, z/vt n'ayant influence que sur les grandeurs dépendant de la position du point au sein du liquide. Les paramètres adimensionnés globaux (par exemple, la réaction résultante du liquide, etc.) ou les paramètres indépendants de la position du point dans l'espace dépendent des seuls angles α, β. Si l'orientation de la vitesse est fixée (par exemple, la vitesse est verticale), on peut considérer toutes les caractéristiques adimensionnées globales comme des constantes absolues, fonction de la seule forme du cône.

Désignons par $\varphi(x, y, z, t)$ le potentiel des vitesses de l'écoulement perturbé du liquide pour le cas où la vitesse du cône est donnée. L'écoulement étant non stationnaire, déterminer l'écoulement perturbé se ramène à déterminer le potentiel des vitesses en fonction de quatre variables indépendantes x, y, z, t.

Grâce à la théorie dimensionnelle on parvient sans peine à réduire ces quatre variables indépendantes à trois.

En effet, la quantité φ/v^2t étant adimensionnée, la formule suivante est valable :

$$\varphi = v^2 t f\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}, \frac{z}{vt}\right). \tag{12.1}$$

La vitesse d'un élément liquide $\bar{v}$ vérifie la relation de la forme

$$\bar{v} = v \vec{f}_1\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}, \frac{z}{vt}\right). \tag{12.2}$$

Les valeurs de la résistance résultante de l'eau P et de la surface mouillée S sont données par les formules

$$\left.\begin{aligned} P &= c_1 \varrho v^4 t^2, \\ S &= c_2 v^2 t^2, \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

les coefficients c_1, c_2 et l'orientation de la force P ne dépendant que de la forme du cône et de l'orientation de la vitesse de mouvement du cône. La première formule (12.3) révèle que la réaction de l'eau est proportionnelle à la densité du liquide, à la puissance quatre de la vitesse et au carré du temps. La surface mouillée est proportionnelle au carré de la vitesse et au carré du temps. Il s'ensuit que deux configurations différentes d'un même mouvement présentent une similitude dynamique.

Dans le cas du problème bidimensionnel d'immersion d'un plat-coin (dont le plan du mouvement est le plan xy) le potentiel et la distribution des vitesses vérifient les formules

$$\varphi = v^2 t f\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}\right),$$

$$\bar{v} = v f_1\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}\right).$$

Pour la force par unité de longueur et pour la longueur mouillée suivant la joue du coin on a les formules

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= c_1' \varrho v^3 t, \\ l &= c_2' v t. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

On déduit des formules (12.3) et (12.4) que lors d'une immersion uniforme du corps dans l'eau la valeur de la réaction de l'eau en fonction de la vitesse de déplacement se trouve différente pour des corps de formes différentes.

Les constantes c_1' et c_2' dépendent de l'angle de carénage, des angles d'inclinaison du plan de symétrie du coin et de sa vitesse par rapport au niveau non perturbé de la surface libre.

Pour le problème bidimensionnel il existe des solutions théoriques approchées pour l'immersion verticale et pour l'immersion de la plaque de faible inclinaison sur le niveau du liquide lorsque la composante horizontale de la vitesse de la plaque est grande*).

§ 13. Petites ondes sur une nappe de liquide incompressible

En traitant le problème de Cauchy-Poisson des ondes à la surface d'un liquide pesant incompressible N. Kotchine**) y appliqua les considérations de la théorie dimensionnelle et conféra à la solution de ce problème classique une nouvelle forme mathématique élégante.

En développant les raisonnements de la théorie dimensionnelle on parvient à établir***) sous une forme explicite et simple toute une classe de nouvelles solutions des problèmes des ondes. Dans la classe de solutions obtenue la solution de N. Kotchine représente un cas particulier.

Cette méthode et les solutions obtenues peuvent être généralisées au cas du problème spatial.

Le problème plan des ondes potentielles d'amplitude infinitésimale sur une nappe d'un liquide pesant incompressible remplissant tout le demi-espace inférieur peut se formuler ainsi.

---

*) Voir H. Wagner, ZAMM, 1932, nº 4; L. Sédov, Travaux de TZAGUI, op. 252, 1936.

**) N. Kotchine, *Sur la théorie des ondes de Cauchy-Poisson*, Travaux de MIAN de l'U. R. S. S., t. IX, 1935.

***) L. Sédov, *Sur la théorie des ondes à la surface d'un liquide incompressible* (en russe). Bulletin de l'Université de Moscou, nº 11, 1948.

Prenons le système de coordonnées cartésiennes; faisons coïncider l'axe des x avec le niveau non perturbé du liquide, dirigeons l'axe des y verticalement vers le haut. Le potentiel des vitesses $\varphi(x, y, t)$ pour $y<0$ est une fonction harmonique régulière, soit

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad \text{pour} \quad y<0. \tag{13.1}$$

Nous considérons les écoulements qui s'amortissent à mesure qu'augmente la profondeur du liquide, soit

$$[\operatorname{grad}\varphi]\to 0 \quad \text{pour} \quad y\to-\infty. \tag{13.2}$$

Sous la forme linéarisée la condition de la constance de la pression à la surface libre peut se présenter ainsi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{pour} \quad y=0 \quad \text{et} \quad t\geq 0, \tag{13.3}$$

g étant l'accélération de la pesanteur. Pour déterminer le potentiel des vitesses $\varphi(x, y, t)$ outre les conditions (13.1), (13.2) et (13.3) il faut donner d'autres conditions supplémentaires.

Ce peuvent être par exemple les conditions initiales : à $t=0$ on donne la forme de la surface libre et la distribution des pressions instantanées.

En formulant les conditions initiales sous la forme linéarisée on peut partir des relations :

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{y=0} \quad \text{et} \quad \frac{p_t}{\varrho}=-\varphi, \tag{13.4}$$

où $\zeta(x, t)$ est l'élévation des points de la surface libre au-dessus du niveau non perturbé, p_t la pression d'impulsion, ϱ la densité du liquide.

On peut conférer aux conditions initiales la forme suivante : pour $t=0$ on a

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{y=0}=f(x), \quad \varphi|_{y=0}=F(x). \tag{13.5}$$

Si les fonctions f et F sont simultanément non nulles ou différentes de l'infini et si de plus $f\neq kx$, alors manifestement ces fonctions doivent dépendre, outre de la variable x, de certaines constantes dimensionnées. Comme le problème est énoncé en grandeurs cinématiques, il est évident qu'on ne peut pas avoir plus de deux constantes dimensionnées à dimensions indépendantes dans les fonctions f et F.

On aura satisfait à l'équation de Laplace en posant

$$\varphi(x, y)=\operatorname{Re} w(x+iy), \tag{13.6}$$

où $w(z, t)$ $(z=x+iy)$ est une fonction caractéristique de l'écoulement. Supposons ensuite la fonction caractéristique $w(z)$ univoque, finie et régulière pour $t>0$ et pour x et $y<0$ finis.

Il découle de la condition (13.2) que la dérivée $\partial w/\partial z$ s'annule pour $y \to -\infty$.

La condition aux limites (13.3) peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+ig\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \quad \text{pour} \quad y=0. \tag{13.7}$$

Cette condition autorise de prolonger la combinaison

$$G(z)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+ig\frac{\partial w}{\partial z}$$

dans le demi-plan supérieur, d'où il résulte que la fonction $G(z)$ est univoque dans tout le plan de la variable complexe $z=x+iy$. D'après les hypothèses émises concernant le caractère général de l'écoulement, les points singuliers de $G(z)$ se situent sur l'axe réel.

Cherchons les solutions telles que la fonction caractéristique $w(z)$ dépend linéairement des constantes dimensionnées incluses dans les conditions supplémentaires définissant le potentiel des vitesses; on ne fixera pas la forme de ces conditions.

Le problème étant linéaire, il suffit de considérer le cas où l'on n'a qu'une constante dimensionnée a dont la fonction caractéristique $w(z)$ dépend linéairement (la constante a peut être complexe). Supposons que la dimension de la constante a soit donnée par la formule

$$[a]=\mathrm{L}^p\mathrm{T}^q.$$

D'après nos hypothèses, le système complet de paramètres de définition est

$$z=x+iy,\ t,\ g,\ a.$$

Posons maintenant

$$w=az^\alpha g^\beta \chi(z,\ t,\ g);$$

les exposants α et β sont choisis tels que χ soit une grandeur abstraite. Comme $[a]=\mathrm{L}^p\mathrm{T}^q$, ce choix est réalisé pour

$$p+\alpha+\beta=2,\ q-2\beta=-1,$$

d'où

$$\beta=\frac{1+q}{2},\quad \alpha=\frac{3-2p-q}{2}. \tag{13.8}$$

Selon la théorie dimensionnelle la fonction $\chi(z,\ t,\ g)$ ne dépend que de la combinaison

$$\lambda=\frac{gt^2}{z},$$

i.e.

$$w=ag^\beta z^\alpha \chi(\lambda). \tag{13.9}$$

De la formule (13.9) découlent les égalités suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial t}=ag^{\beta}z^{\alpha}\chi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=ag^{\beta}z^{\alpha}\left[\chi''(\lambda)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)^2+\chi'(\lambda)\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=ag^{\beta}z^{\alpha}\left[\frac{\alpha}{z}\chi(\lambda)+\chi'(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right]$$

et

$$G(z)=ag^{\beta}z^{\alpha}\left[\chi''\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)^2+\chi'\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+ig\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+\frac{ig\alpha}{z}\chi\right];$$

or

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=2\frac{\lambda}{t},\quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}=2\frac{\lambda}{t^2},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=-\frac{\lambda}{z},$$

si bien que

$$G=4ag^{\beta+\alpha}t^{2\alpha-2}\lambda^{2-\alpha}\left[\chi''+\left(\frac{1}{2\lambda}-\frac{i}{4}\right)\chi'+\frac{i\alpha}{4\lambda}\chi\right]. \tag{13.10}$$

La fonction $G(\lambda)$ est une fonction univoque de la variable complexe λ dans tout le plan. Les points singuliers ne peuvent se situer que sur l'axe réel. La fonction $G(\lambda)$ étant purement imaginaire pour tout λ réel, il est évident que pour tout point singulier de cette fonction les coefficients de la série de Lorand sont purement imaginaires. Désignons

$$a=a_0e^{i\delta}\quad\text{et}\quad G=4a_0g^{\beta+\alpha}t^{2\alpha-2}G_1(\lambda).$$

On obtient de (13.10)

$$e^{-i\delta}G_1(\lambda)=\lambda^{2-\alpha}\left[\chi''+\left(\frac{1}{2\lambda}-\frac{i}{4}\right)\chi'+\frac{i\alpha}{4\lambda}\chi\right]. \tag{13.11}$$

On arrive à satisfaire les conditions au sein du liquide et à la surface libre en prenant pour fonction $G_1(\lambda)$ toute fonction univoque n'ayant de singularités que sur l'axe réel où elle est purement imaginaire.

Pour déterminer la fonction caractéristique du mouvement ondulatoire correspondant il y a lieu d'intégrer l'équation différentielle (13.11) pour la fonction $\chi(\lambda)$. Dans le cas le plus général on obtient les mouvements ondulatoires présentant des singularités sur la surface libre du liquide.

Si l'on suppose régulier le mouvement du liquide sur la frontière libre pour $t>0$, alors du caractère fini de la combinaison

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+ig\frac{\partial w}{\partial z}$$

découle que la fonction $G_1(\lambda)$ se ramène à une constante imaginaire que l'on doit poser nulle en vertu de la condition (13.2) et de la condition supplémentaire stipulant la constance de la pression dans le temps pour $y\to-\infty$.

Notre problème s'est donc ramené à l'intégration de l'équation différentielle ordinaire

$$\chi''+\left(\frac{1}{2\lambda}-\frac{i}{4}\right)\chi'+\frac{i\alpha}{4\lambda}\chi=0. \tag{13.12}$$

Dans cette équation α est une constante arbitraire. On s'aperçoit sans peine que pour α complexe la solution de l'équation (13.12) aboutit également à un mouvement ondulatoire. La solution fondamentale analysée par N. Kotchine correspond à la valeur particulière $\alpha=-\frac{1}{2}$.

La substitution

$$\lambda=(4/i)\mu$$

ramène l'équation (13.12) à la forme

$$\mu\frac{d^2\chi}{d\mu^2}+\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\frac{d\chi}{d\mu}+\alpha\chi=0. \tag{13.13}$$

La solution de l'équation (13.13) s'exprime par les fonctions hypergéométriques confluentes $y=M(k, \gamma, x)$ qui satisfont à l'équation différentielle*)

$$xy''+(\gamma-x)y'-ky=0.$$

La solution générale de l'équation (13.13) a la forme

$$\chi=C_1M\left(-\alpha, \frac{1}{2}, \mu\right)+C_2\mu^{1/2}M\left(-\alpha+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \mu\right).$$

En se servant de cette solution pour la fonction caractéristique du mouvement ondulatoire on peut écrire :

$$w=A_1w_1+A_2w_2, \tag{13.14}$$

où

$$w_1(z, t, \alpha)=z^\alpha M\left(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{igt^2}{4z}\right), \tag{13.15}$$

$$w_2(z, t, \alpha)=z^\alpha\sqrt{\frac{igt^2}{4z}}\,M\left(-\alpha+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{igt^2}{4z}\right). \tag{13.16}$$

Les constantes arbitraires A_1 et A_2 peuvent être complexes.

On peut généraliser les solutions particulières (13.15) et (13.16) du problème d'onde dépendant d'une constante arbitraire α si l'on remplace t par $t-t_0$ et z par $z-z_0$. Les constantes t_0 et z_0 (z_0 est réel) traduisent la variation de la date initiale et le déplacement du point singulier correspondant à l'origine des coordonnées dans le plan de l'écoulement. En utilisant les solutions obtenues on peut construire par superposition des solutions plus générales; lorsqu'on fait la somme, les constantes A_1 et A_2 peuvent être considérées comme des fonctions des paramètres α, t_0 et z_0.

---

*) E. Jahnke, F. Emde, *Funktionnentafeln mit Formeln und Kurven.* 2te neubearb. Aufl. (7. Tausend) Leipzig—Berlin, 1933.

Les formules (13.15) et (13.16) permettent de dégager sans peine les propriétés suivantes des fonctions w_1 et w_2.

Pour $t=0$ on a

$$w_1(z, 0, \alpha)=z^\alpha, \quad \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}=0 \tag{13.17}$$

et

$$w_2(z, 0, \alpha)=0, \quad \left(\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)_{t=0}=\sqrt{\frac{ig}{4}}\cdot z^{\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{13.18}$$

Envisageons maintenant les mouvements ondulatoires dont les fonctions caractéristiques se définissent par les formules

$$\Omega_1(z, t)=-\frac{e^{\pi i\alpha}}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)w_1(z-x_0, t, \alpha)\,dx_0, \tag{13.19}$$

$$\Omega_2(z, t)=-\frac{2e^{\pi i\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{ig}\cdot\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0)w_2(z-x_0, t, \alpha)\,dx_0, \tag{13.20}$$

où $f(x_0)$ et $F(x_0)$ sont des fonctions telles que les intégrales des formules (13.19) et (13.20) soient convergentes.

Pour $t=0$ on a

$$\Omega_1=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)\,dx_0}{(x_0-z)^{-\alpha}}, \quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial t}=0, \tag{13.21}$$

$$\Omega_2=0, \quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial t}=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0)\,dx_0}{(x_0-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \tag{13.22}$$

La première équation (13.21) pour $\alpha=-1$ et $z=x$ donne

$$\Omega_1(x)=\Phi_1+i\Psi_1=f(x)-\frac{1}{\pi i}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)\,dx_0}{x_0-x}.$$

Ainsi donc, si $f(x)$ est réelle, la formule (13.19) pour $a=-1$ donne la solution du problème du mouvement ondulatoire aux conditions initiales suivantes :

$$\text{pour} \quad t=0 \quad \Phi_1(x_0)=f(x), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}=0.$$

La fonction $\Psi(x, y)$ doit satisfaire aux conditions initiales suivantes :

$$\text{pour} \quad t=0 \quad \Psi_1(x, 0)=\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)\,dx_0}{x_0-x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}=0.$$

Si $f(x)$ est purement imaginaire, les conditions initiales sont de forme analogue mais les fonctions Φ_1 et Ψ_1 changent de place.

Au cas où $\alpha=-\frac{1}{2}$ la seconde équation (13.22) pour $t=0$ et $z=x$ donne

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial t}=\frac{\partial(\Phi_2+i\Psi_2)}{\partial t}=F(x)-\frac{1}{\pi i}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0)\,dx_0}{x_0-x}.$$

Il s'ensuit que pour $F(x)$ réelle les conditions initiales prennent la forme :

$$\text{pour}\quad t=0\quad\text{et}\quad y=0\quad \Phi_2+i\Psi_2=0,\quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}=F(x).$$

Ce cas a été analysé par N. Kotchine. Eclaircissons maintenant le caractère des conditions initiales dans le cas général où $\alpha\neq-1,\ -\frac{1}{2}$.

Considérons les conditions initiales pour la fonction $\Omega_1(z,t)$. On a

$$\Omega_1(z,0)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_0-z)^\alpha f(x_0)\,dx_0.$$

Si α est un entier positif, il est évident que $\Omega_1(z,0)$ est un polynôme de degré α. En général, pour $\alpha>0$ la fonction $\Omega_1(z,t)$ tend vers l'infini lorsque $z\to\infty$, si bien que la condition d'évanouissement des vitesses pour $\alpha\geq1$ lorsque $y\to-\infty$ n'est plus satisfaite.

Posant $\alpha=-(1+s)$ où s est un entier positif, on a

$$\Omega_1(z,0)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)\,dx_0}{(x_0-z)^{1+s}}. \tag{13.23}$$

Supposons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0)\,dx_0$ soit finie*) et introduisons la fonction

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)\,dx_0}{x_0-z}. \tag{13.24}$$

Dans les hypothèses admises pour la fonction $f(x_0)$ il est légitime d'écrire

$$\frac{d^s\omega}{dz^s}=\omega^s(z)=\Gamma(s+1)\Omega_1(z,0), \tag{13.25}$$

$$\omega(z)=\Gamma(s+1)\int_{-i\infty}^{z_s}dz_s\int_{-i\infty}^{z_{s-1}}dz_{s-1}\ldots\int_{-i\infty}^{z_2}\Omega(z_1)\,dz_1=\int_{-i\infty}^{z}(z-u)^s\Omega_1'(u)\,du. \tag{13.26}$$

*) L'expression de $\Omega_1(z)$ a manifestement un sens dans plusieurs cas où l'intégrale de (13.24) diverge

Par conséquent, on a pour déterminer $f(x)$ la relation

$$\int_{-l\infty}^{x} (x-u)^s \Omega_1'(u)\, du = f(x) - \frac{\text{v.p.}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_0)\, dx_0}{x_0 - x}. \tag{13.27}$$

Ainsi donc, nous avons déduit à partir des formules (13.23) et (13.24), pour $s>0$ entiers, l'équation (13.27). Cette relation reste également valable pour tous $s>-1$ réels.

En effet, de (13.23) il vient

$$\Omega'(u) = -\frac{s+1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_0)\, dx_0}{(x_0-u)^{s+2}}.$$

En multipliant par $(z-u)^s$ et en intégrant on a

$$\int_{-l\infty}^{z} \Omega'(u)(z-u)^s\, du = -\frac{s+1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)\, dx_0 \int_{-l\infty}^{z} \frac{(z-u)^s\, du}{(x_0-u)^{s+2}}.$$

Effectuons le changement de variable dans l'intégrale intérieure

$$u = x_0 + (z-x_0)\frac{1}{\lambda};$$

d'où

$$x_0 - u = \frac{x_0 - z}{\lambda}, \quad z-u = \frac{x_0-z}{\lambda}(1-\lambda), \quad du = (x_0 - z)\frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

En faisant cette substitution dans l'intégrale intérieure on obtient

$$\frac{1}{x_0-z}\int_0^1 (1-\lambda)^s\, d\lambda = \frac{1}{(s+1)(x_0-z)}.$$

A partir de cette dernière relation on trouve

$$\int_{-l\infty}^{z} (z-u)^s \Omega'(u)\, du = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_0)\, dx_0}{x_0 - z}.$$

D'où pour $z \to x$ découle la formule (13.27).

La formule (13.25) peut être généralisée aux s fractionnaires à condition de définir la dérivée fractionnaire $\omega^s(z)$ par

$$\omega^s(z) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \int_{-l\infty}^{z} (z-u)^{-s} \omega'(u)\, du.$$

En effet,

$$\omega^s(z) = -\frac{1}{\pi i \Gamma(1-s)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)\, dx \int_{-l\infty}^{z} \frac{(z-u)^{-s}\, du}{(x_0-u)^2}.$$

Pour calculer l'intégrale intérieure effectuons le changement de variable

$$u=x_0+(z-x_0)\frac{1}{\lambda};$$

il vient

$$\int_{-i\infty}^{z}\frac{(z-u)^{-s}}{(x_0-u)^2}\,du=\frac{1}{(x_0-z)^{s+1}}\int_0^1\lambda^s(1-\lambda)^{-s}\,d\lambda=\frac{B(s+1,\,1-s)}{(x_0-z)^{s+1}};$$

comme

$$B(s+1,\,1-s)=\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(2)}\quad\text{et}\quad\Gamma(2)=1,$$

alors

$$\omega^s(z)=-\frac{\Gamma(s+1)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)\,dx_0}{(x_0-z)^{s+1}}=\Gamma(s+1)\Omega(z).$$

§ 14. Mouvements spatiaux automodèles des milieux continus

On peut étendre à des cas plus généraux les formulations des problèmes du mouvement d'un fluide incompressible données aux §§ 12 et 13 qui permettaient de réduire le nombre de variables indépendantes.

Appelons automodèles de centre de similitude à l'origine des coordonnées, les mouvements d'un milieu continu dont toutes les caractéristiques ne sont fonction que des combinaisons

$$\frac{x}{bt^\delta},\quad\frac{y}{bt^\delta},\quad\frac{z}{bt^\delta},$$

où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes, t le temps et b la constante ayant la dimension $\mathrm{LT}^{-\delta}$.

Il est aisé d'indiquer les caractéristiques des problèmes automodèles. Pour que le problème soit automodèle il suffit évidemment que le système de paramètres de définition dimensionnés donné par les conditions supplémentaires (les conditions aux limites, les conditions initiales, etc.) contienne au plus deux constantes à dimensions indépendantes outre les constantes de longueur et de temps.

En d'autres termes, le système de paramètres de définition doit être représenté par un tableau du type

$$a,\,b,\,x,\,y,\,z,\,t,\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,$$

où α_1, α_2 sont des combinaisons abstraites des constantes dimensionnées; leur nombre peut être quelconque et les constantes a et b vérifient les formules de dimension suivantes :

$$[a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s,\quad[b]=\mathrm{LT}^{-\delta},$$

où $\delta \neq 0$ et k et s peuvent être arbitraires. Sans restreindre la généralité la constante a peut être remplacée par la constante $A = ab^{s/\delta}$ de dimension

$$[A] = \mathrm{ML}^{\omega-3},$$

où ω peut être arbitraire.

Pour que le mouvement du milieu continu soit automodèle il faut que, d'une façon générale, les paramètres caractéristiques linéaires et temporelles n'entrent pas dans la formulation du problème (coin, cône, etc.).

Voici à titre d'exemple quelques-uns des mouvements automodèles.

1. Le problème du repoussage d'une masse fluide infinie initialement au repos par une cavité interne se dilatant depuis un point en conservant la similitude géométrique de sa forme.

Définissons les vitesses radiales de la frontière interne de la cavité par la formule

$$v(t, \theta, \psi) = bf(\theta, \psi)t^{\delta-1},$$

où θ et ψ sont les coordonnées polaires et b une constante : $[b] = \mathrm{LT}^{-\delta}$; pour $\delta > 0$ la surface intérieure se dilate continûment en conservant la similitude à partir du point zéro. L'écoulement perturbé du fluide incompressible est potentiel et il est défini par le système de paramètres

$$\varrho, b, r, \theta, \psi, t, f(\theta, \psi),$$

où ϱ est la densité; la pression initiale et celle à l'infini p_0 sont non essentielles car on peut considérer seulement les différences $p - p_0$.

Il est évident que dans ce cas le potentiel des vitesses vérifie la formule

$$\varphi = rbt^{\delta-1}\Phi\left(\theta, \psi, \frac{r}{bt^{\delta}}\right).$$

Le problème peut être modifié si l'on donne au lieu de la loi des vitesses de la dilatation de la cavité interne la loi des pressions s'exerçant sur la surface de la cavité :

$$p - p_0 = \varrho b^2 t^{2(\delta-1)} F(\theta, \psi).$$

L'un de ces problèmes sera analysé à la fin du paragraphe 11 du chapitre IV.

2. Les conclusions précédentes concernant la similitude du mouvement du fluide s'appliquent à l'étude du mouvement d'un fluide dont la surface libre coïncide initialement avec le plan si le centre de symétrie de la surface en dilatation donnée est situé sur ce plan. Ainsi l'on est amené à généraliser les problèmes d'immersion du cône et du coin au cas d'une surface arbitraire non solide, se dilatant avec conservation de la similitude, repoussant un liquide limité par une surface libre.

En particulier, on peut envisager l'écoulement automodèle du fluide dans lequel on immerge un coin ou un cône à une vitesse variable comme une puissance du temps.

Si l'on tient compte de la pondérabilité du fluide il faut alors ajouter au nombre de paramètres de définition l'accélération de la pesanteur. Pour conserver autosimilitude il faut que $[g] = [b]$, c'est-à-dire que $\delta = +2$.

Par conséquent, une immersion uniformément accélérée d'un coin ou d'un cône dans un fluide incompressible pesant provoque un écoulement perturbé automodèle de ce dernier.

L'écoulement d'un fluide à surfaces libres est également automodèle au cas où à l'instant initial la surface libre est conique ou cunéiforme et le centre de similitude se situe au sommet du cône ou du coin.

A titre d'exemple de solution automodèle pour un milieu élastique mentionnons la solution du problème de Boussinesq sur la distribution des contraintes et des déformations dans le demi-espace élastique limité par un plan en un point duquel est appliquée une force concentrée donnée P.

Dans les problèmes statiques le milieu élastique est complètement donné par le module de Young E et le coefficient de Poisson σ. La force extérieure est donnée par sa grandeur P et par les paramètres abstraits définissant son orientation.

Situons l'origine des coordonnées polaires r, θ au point d'application de la force dans le plan perpendiculaire à la frontière et contenant le vecteur force. Le système de grandeurs caractéristiques s'écrit

$$P, E, r, \theta, \psi, \sigma, \theta_0;$$

θ_0 étant l'angle d'inclinaison de la force P. Le problème étant linéaire, toutes les contraintes et les déformations sont des fonctions linéaires de P, donc la dépendance par rapport à P est connue à l'avance; la méthode dimensionnelle permet aisément d'établir la dépendance de toutes les grandeurs par rapport à E et r. On n'a que deux variables indépendantes, θ et ψ. En cas de symétrie axiale (la force P est perpendiculaire au plan de la frontière) ψ s'élimine, de sorte que la solution complète du problème s'obtient aisément par l'intégration d'une seule équation différentielle ordinaire.

Dans certains cas qu'on reconnaît sans peine, les développements précédents peuvent s'appliquer aux mouvements non stationnaires des milieux compressibles ayant différentes propriétés.

CHAPITRE III

APPLICATIONS À LA THÉORIE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX ET À LA THÉORIE DE LA TURBULENCE

§ 1. Diffusion des tourbillons dans un fluide visqueux

Les méthodes de la théorie dimensionnelle peuvent s'avérer très utiles dans la résolution mathématique de certains problèmes physiques. Le présent paragraphe et les paragraphes suivants contiennent des exemples de ce genre.

Considérons la diffusion des tourbillons au sein d'un fluide visqueux incompressible dans l'hypothèse de l'écoulement plan et en posant que le fluide occupe tout le plan*). L'écoulement envisagé est non stationnaire. Supposons qu'à l'instant $t=0$ l'écoulement potentiel ait lieu partout sauf au pôle O, qui constitue sur le plan du mouvement la trace d'un tourbillon rectiligne indéfini concentré à circulation Γ.

Admettons que l'écoulement possède la symétrie axiale. Désignons par Ω la vitesse angulaire des éléments fluides.

Comme on sait, la circulation suivant un cercle de rayon R centré en O est égale à

$$\Gamma_R=2\int_0^R\int_0^{2\pi}\Omega r\,dr\,d\theta=4\pi\int_0^R r\Omega(r)\,dr. \tag{1.1}$$

A l'instant initial, pour tout cercle si petit soit-il, on a

$$\Gamma_R=\Gamma. \tag{1.2}$$

L'équation de la propagation des tourbillons dans le cas étudié est de la forme

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right), \tag{1.3}$$

où ν est le coefficient de la viscosité cinématique ($\nu=\mu/\varrho$). Le problème consiste à déterminer la grandeur Ω en fonction du rayon r et du temps t.

Il découle de la formulation du problème que

$$\Omega=f(\Gamma,\nu,r,t).$$

---

*) Voir N. Kotchine, I. Kibel et N. Rosé, *Hydromécanique théorique* (en russe), p. II, Gostekhizdat, 1948. Ce livre contient une description détaillée de ce problème et sa résolution à l'aide des méthodes dimensionnelles.

La linéarité de l'équation (1.3) et la condition initiale font que Ω est proportionnel à Γ, soit

$$\Omega=\Gamma f_1(\nu, r, t). \tag{1.4}$$

La combinaison sans dimension $\Omega\nu t/\Gamma$ doit s'exprimer en fonction de l'unique quantité indépendante sans dimension $r^2/\nu t=\xi$, que l'on peut former à partir des paramètres dimensionnés ν, r, t. Ainsi

$$\Omega=\frac{\Gamma}{\nu t}\psi(\xi). \tag{1.5}$$

On déduit de la formule (1.5) que l'équation aux dérivées partielles (1.3) pour la fonction Ω à deux variables indépendantes r et t se ramène à une équation différentielle ordinaire à une seule variable inconnue ξ.

Portons l'expression de Ω de (1.5) dans l'équation (1.3), il vient

$$\psi(\xi)+\xi\psi'(\xi)+4[\psi'(\xi)+\xi\psi''(\xi)]=0.$$

En intégrant, on a

$$\xi\psi+4\xi\psi'=C.$$

La constante C est nulle dans la solution où $\psi(0)$ et $\psi'(0)$ sont bornés. En intégrant l'équation

$$4\frac{d\psi}{d\xi}+\psi=0,$$

on trouve

$$\psi=Ae^{-\frac{\xi}{4}}.$$

Ce qui donne pour la valeur du tourbillon Ω

$$\Omega=\frac{\Gamma}{\nu t}Ae^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

La constante A s'obtient à partir de la condition initiale. La circulation suivant le cercle de rayon R est égale à

$$\Gamma_R=4\pi\frac{A\Gamma}{\nu t}\int_0^R re^{-\frac{r^2}{4\nu t}}dr=8\pi A\Gamma\left(1-e^{-\frac{R^2}{4\nu t}}\right). \tag{1.6}$$

Pour $t=0$ pour tout $R>0$ on a

$$\Gamma_R=8\pi A\Gamma.$$

La condition initiale $\Gamma_R=\Gamma$ fournit

$$A=\frac{1}{8\pi}.$$

La solution définitive du problème est donnée par la formule

$$\Omega=\frac{\Gamma}{8\pi\nu t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{1.7}$$

Désignons par $v(r, t)$ la vitesse des éléments fluides. L'écoulement est à symétrie axiale, la vitesse des éléments fluides est perpendiculaire au rayon vecteur mené au point considéré dépuis le pôle O.

Compte tenu de l'orientation du vecteur vitesse on obtient la relation suivante entre Γ_R et v :

$$\Gamma_R = 2\pi r v.$$

En utilisant la formule (1.6) établissons la loi de distribution de la vitesse suivant le rayon r et pendant le temps t :

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right).$$

Pour $t=0$ on a une loi de distribution des vitesses correspondant au tourbillon ponctuel dans un fluide parfait. Pour $r>0$ et $t=0$ l'écoulement est potentiel, sans tourbillons; pour $r>0$ et $t>0$ l'écoulement est rotationnel en chaque point du fluide. La formule (1.7) donne la loi de propagation — de diffusion — des tourbillons. Il découle de cette formule que la grandeur du tourbillon en chaque point augmente avec le temps du zéro au maximum, atteignant $\Gamma/2\pi r^2 e$, pour ensuite tendre de nouveau vers zéro.

Comme l'équation (1.3) est linéaire on peut composer, par superposition, en utilisant la solution obtenue de la propagation d'un tourbillon ponctuel, la solution du problème du mouvement symétrique quelle que soit la distribution initiale des vitesses.

§ 2. Solutions exactes des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible

Considérons l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible remplissant tout l'espace.

L'équation de Navier-Stokes et l'équation de continuité peuvent s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\bar{v}\nabla\bar{v} = -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\varrho} - U\right) + \nu\Delta\bar{v}, \\ &\operatorname{div}\bar{v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Nous utilisons dans la suite les coordonnées sphériques.

Les variables indépendantes et les grandeurs caractéristiques seront

$$r, \theta, \lambda, v,$$

où r est la distance du point considéré au pôle, θ l'angle polaire, λ la longitude et ν le coefficient de la viscosité cinématique. Les quantités inconnues seront les projections de la vitesse v_r, v_θ, v_λ et la pression dynamique rapportée à la densité, égale à $p/\varrho - U$.

Analysons des solutions des équations (2.1) définies complètement par

les paramètres r, θ, λ, ν et par une seule constante dimensionnée A. Supposons que la dimension de A soit donnée par la formule

$$[A]=\mathrm{L}^p\mathrm{T}^q,$$

où p et q sont des constantes.

Dans cette hypothèse, toutes les combinaisons sans dimension des grandeurs introduites ne seront évidemment fonction que des trois paramètres abstraits :

$$\theta,\ \lambda,\ \pi=\frac{r^{p+2q}\nu^{-q}}{A}.$$

De sorte que les fonctions inconnues se mettent sous la forme

$$v_r=\frac{\nu}{r}f(\pi,\lambda,\theta),\qquad v_\theta=\frac{\nu}{r}\varphi(\pi,\lambda,\theta),$$

$$v_\lambda=\frac{\nu}{r}\psi(\pi,\lambda,\theta),\qquad U-\frac{p}{\varrho}=\frac{\nu^2}{r^2}F(\pi,\lambda,\theta).$$

Sous cette forme on peut représenter et analyser la solution la plus générale des équations (2.1).

On arrive à réduire le nombre de variables indépendantes en posant

$$p+2q=0.$$

Cette condition signifie que la dimension de la constante A représente une certaine puissance de la dimension du coefficient de la viscosité cinématique ν.

Outre cette hypothèse admettons encore que les écoulements étudiés possèdent la symétrie axiale ce qui élimine la variable λ.

Ces hypothèses entraînent que les grandeurs inconnues doivent vérifier les formules suivantes :

$$v_r=\frac{\nu}{r}f(\theta),\quad v_\theta=\frac{\nu}{r}\varphi(\theta),\quad v_\lambda=\frac{\nu}{r}\psi(\theta),\quad U-\frac{p}{\varrho}=\frac{\nu^2}{r^2}F(\theta).\tag{2.2}$$

Ces formules donnent le champ des vitesses et des pressions en fonction de la variable r. A partir des équations (2.1) on forme alors un système d'équations différentielles non linéaires ordinaires par rapport à quatre fonctions f, φ, ψ, F :

$$\left.\begin{aligned}
f''+f'(\operatorname{cotg}\theta-\varphi)+f^2+\varphi^2+\psi^2-2F&=0,\\
\varphi\varphi'-\psi^2\operatorname{cotg}\theta-f'-F'&=0,\\
\psi''-\varphi\psi'-\varphi\psi\operatorname{cotg}\theta+\psi'\operatorname{cotg}\theta-\frac{\psi}{\sin^2\theta}&=0,\\
f+\varphi'+\varphi\operatorname{cotg}\theta&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

En éliminant la fonction F et en effectuant des transformations simples on obtient :

$$\left.\begin{aligned} f'''+2\psi(\psi'+\psi\operatorname{cotg}\theta)+(f'\operatorname{cotg}\theta)'-(\varphi f')'+2ff'+2f'=0,\\ \varphi(\psi'+\psi\operatorname{cotg}\theta)=(\psi'+\psi\operatorname{cotg}\theta)',\\ f=-(\varphi'+\varphi\operatorname{cotg}\theta). \end{aligned}\right\} \quad (2.4)$$

La solution générale de ce système d'équations dépend de six constantes arbitraires.

Avant de passer à l'analyse des solutions de l'équation (2.4) il convient de noter certaines propriétés communes aux écoulements envisagés du fluide visqueux.

Les équations différentielles pour les projections des lignes de courant sur le plan du méridien s'écriraient ainsi

$$\frac{dr}{v_r}=\frac{r\,d\theta}{v_{\theta i}} \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{f(\theta)}=\frac{r\,d\theta}{\varphi(\theta)},$$

d'où

$$\ln\frac{r}{a}=\int\frac{f(\theta)\,d\theta}{\varphi(\theta)},$$

ici a est la constante d'intégration. En vertu de la dernière équation du système (2.4) on a

$$\frac{r}{a}=\frac{1}{\varphi\sin\theta}. \quad (2.5)$$

Il découle des raisonnements généraux de la théorie dimensionnelle et directement de l'équation (2.5) que les différentes lignes de courant sont semblables entre elles.

Appelons Q le débit volumique du fluide et J le flux volumique de quantité de mouvement à travers une surface fermée S, soit

$$Q=\int_S v_n\,d\sigma, \quad J=\int_S \bar{v}v_n\,d\sigma.$$

Les dimensions de Q et de J sont données par les formules

$$[Q]=\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}, \quad [J]=\mathrm{L}^4\mathrm{T}^{-2}.$$

En contractant en un point polaire la surface S on constate que les quantités Q et J ne soient fonction que du coefficient ν et de la constante A dont la dimension s'exprime au moyen de celle de ν. Les dimensions de Q et de ν étant indépendantes, le débit Q est évidemment soit nul, soit infini. La dimension de J s'exprimant par celle du coefficient ν, la quantité J peut être finie.

Il en va autrement pour les écoulements plans. Si le champ des vitesses d'un écoulement plan n'est fonction, dans tout le plan, que des coordonnées

du point et des constantes dont la dimension dépend de celle du coefficient de la viscosité cinématique ν, alors des formules analogues aux formules (2.2) sont valables en coordonnées polaires (r est le rayon vecteur dans le plan de l'écoulement).

Le débit et le flux de quantité de mouvement pour un écoulement plan peuvent être définis par les formules

$$Q=\int_L \mathfrak{v}_n\, dS, \quad J=\int_L \bar{\mathfrak{v}}\cdot\mathfrak{v}_n\, dS,$$

L étant un contour fermé entourant l'origine des coordonnées. Les dimensions de Q et de J sont représentées dans ce cas par

$$[Q]=\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}, \quad [J]=\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-1}.$$

On en déduit que les écoulements plans de ce type peuvent être caractérisés par un débit fini, les impulsions correspondantes étant alors soit nulles, soit infinies.

Cette circonstance a permis à Gamel et à d'autres auteurs d'obtenir, pour le problème de l'écoulement à l'intérieur d'un dièdre, des solutions exactes des équations de Navier-Stokes, en ramenant celles-ci à des équations différentielles ordinaires*).

Passons à l'étude de la solution du système d'équations (2.4). La première équation (2.4) peut s'écrire

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\Phi'}{\sin\theta}\right)'\right]=\frac{(\psi^2\sin^2\theta)'}{\sin^2\theta}, \tag{2.6}$$

où

$$\Phi=\left(\varphi'-\frac{1}{2}\varphi^2\right)\sin^2\theta-\varphi\sin\theta\cos\theta. \tag{2.7}$$

A partir de l'équation (2.6) on peut déduire l'intégrale suivante :

$$\psi^2\sin^2\theta-\sin\theta\left(\frac{\Phi'}{\sin\theta}\right)'+2\Phi+2\operatorname{cotg}\theta\cdot\Phi'=D, \tag{2.8}$$

où D est une constante d'intégration.

La fonction $\psi(\theta)$ définit la distribution des composantes des vitesses perpendiculaires au plan du méridien.

Il est facile de remarquer qu'avec $\psi=0$ ou avec $\psi\sin\theta=\text{const}$ le système d'équations (2.4) donne les mêmes relations pour la détermination des fonctions f et φ.

La condition $\psi=c/\sin\theta$ conduit à $v_\lambda=c\nu/r\sin\theta$; le champ des vitesses v_λ correspond au tourbillon rectiligne coïncidant avec l'axe de symétrie. Par conséquent, les équations du mouvement seront satisfaites si l'on ajoute,

*) Ces solutions sont analysées en détail dans le livre de N. Kotchine, I. Kibel et N. Rosé, *Hydromécanique théorique* (en russe), p. II, Gostekhizdat, 1948.

à n'importe quel champ des vitesses du type considéré, le champ des vitesses d'un tourbillon rectiligne.

Si l'on pose

$$\varphi \sin \theta = \text{const}, \tag{2.9}$$

l'équation (2.6) se laisse intégrer trois fois après quoi la résolution du problème se ramène à l'intégration de l'équation de Riccati :

$$\left(\varphi' - \frac{1}{2}\varphi^2\right) \sin^2 \theta - \varphi \sin \theta \cos \theta = M \cos 2\theta + N \cos \theta + R, \tag{2.10}$$

où M, N, R sont des constantes d'intégration arbitraires*).

Si l'on pose $M=N=R=0$, l'équation (2.10) s'intègre facilement et donne

$$\varphi = \frac{2 \sin \theta}{A + \cos \theta}, \quad \text{d'où} \quad f = -2 + \frac{2(A^2-1)}{(A+\cos\theta)^2}, \tag{2.11}$$

où A est une constante abstraite d'intégration. La solution (2.11) a été analysée par Landau**).

On vérifie sans peine que pour $|A|>1$ cette solution donne le débit du fluide nul à travers une surface entourant l'origine des coordonnées et pour $|A|<1$ ce débit est infini.

Le flux de projection de la quantité de mouvement sur l'axe de symétrie à travers toute sphère centrée à l'origine des coordonnées vérifie la formule suivante :

$$J = \varrho \nu^2 \left[8(A^2-1) \ln \frac{A-1}{A+1} + 8A - \frac{32A}{3(A^2-1)} + \frac{8A(3A^2-1)}{A^3-1}\right]. \tag{2.12}$$

On voit que la valeur de l'impulsion J ne dépend pas du rayon de la sphère et représente ainsi une caractéristique mécanique du point singulier qu'est l'origine des coordonnées. Les équations des lignes de courant d'un écoulement de ce type ont pour expression

$$\frac{r}{a} = \frac{A + \cos \theta}{2 \sin^2 \theta}.$$

La figure 20 montre comment vont les lignes de courant pour $A>1$.

L'allure des lignes de courant devient parabolique à mesure qu'elles s'éloignent à l'infinie. En se déplaçant le long d'une ligne de courant le rayon vecteur r atteint sa valeur minimum pour une certaine valeur $\theta=\theta^*$ définie par la relation

$$\cos \theta^* = -A + \sqrt{A^2-1}.$$

---

*) L'équation (2.10) fut obtenue d'une autre manière par N. Sleuzkine. Voir « Outchenyé zapiski » de l'Université de Moscou, op. 2, 1934.

**) L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des milieux continus* (en russe), Gostekhizdat, 1953.

L'écoulement correspondant peut être considéré comme l'écoulement d'un fluide visqueux remplissant tout l'espace engendré par un filet infiniment mince à l'origine des coordonnées sortant d'un tube infiniment délié dans la direction de l'axe des x, avec une impulsion finie.

On peut immédiatement donner plusieurs solutions de l'équation de Riccati (2.10) correspondant aux valeurs particulières des constantes M, N, R. Ainsi, pour $R=1$, $N=0$ et $M=\frac{1}{2}$ on a la solution

$$\varphi=-\left(\operatorname{cotg}\theta+\coth\frac{\theta+\theta_0}{2}\right),$$

où θ_0 est une constante arbitraire. Dans le cas de

$$N=0,\ M=\frac{1}{4}-m^2$$

$$\text{et}\quad R=\frac{9}{4}-(m+1)^2$$

on a la solution

$$\varphi=(2m-1)\operatorname{cotg}\theta-\frac{2\sin^{2m}\theta}{\int\sin^{2m}\theta\,d\theta},$$

et ainsi de suite.

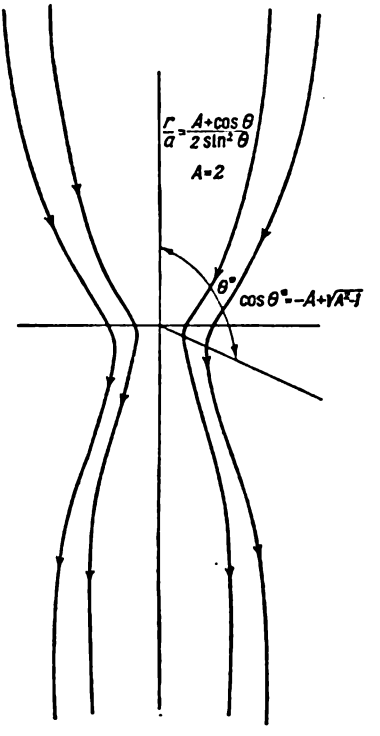


Fig. 20. Lignes de courant pour une source de puissance nulle et d'impulsion finie dans un fluide visqueux

Dans le cas général l'équation de Riccati (2.10) se résout en fonctions hypergéométriques*).

En utilisant les substitutions

$$\varphi=-2\frac{y'(\theta)}{y(\theta)},\qquad \mu=\cos^2\frac{\theta}{2},$$

on ramène l'équation (2.10) à la forme

$$\frac{d^2y}{d\mu^2}+\frac{\dfrac{M+R-N}{2}+(N-4M)\mu+4\mu^2M}{4\mu^2(\mu-1)^2}\,y=0. \tag{2.13}$$

*) Voir V. Yatsécv, Revue « Physique théorique et expérimentale », op. 11, 1950, p. 1031.

Cette équation est facilement intégrable à l'aide de fonctions hypergéométriques; son intégrale générale s'écrit sous la forme*)

$$Y(\theta)=\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\gamma}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{1+\alpha+\beta-\gamma}\left\{PF\left(\alpha,\beta,\gamma,\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+Q\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1-\gamma}F\left(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right\}, \qquad (2.14)$$

où les constantes α, β, γ sont liées à M, N et R par les formules

$$M=\frac{1-(\alpha-\beta)^2}{4},$$

$$N=1-(\alpha+\beta)^2+2\gamma(\alpha+\beta-1),$$

$$R=\frac{3[1-(\alpha+\beta)^2]}{4}-\alpha\beta-2\gamma^2+2\gamma(\alpha+\beta+1).$$

Au lieu de M, N, R on peut prendre comme constantes arbitraires les paramètres α, β, γ.

La solution obtenue pour φ dépend de quatre constantes arbitraires : de trois paramètres α, β, γ et du rapport P/Q.

Pour $M=N=R=0$ l'équation (2.13) est dégénérée en équation $y''(\mu)=0$ qui n'a qu'un seul point singulier régulier pour $\mu=\infty$. La solution correspondante a été analysée plus haut.

Si $N=-4M=-\frac{4}{3}R$, le facteur $(\mu-1)^2$ au dénoninateur de l'équation (2.13) se simplifie et il ne reste que deux points singuliers réguliers $\mu=0$ et $\mu=\infty$. L'équation (2.13) devient dans ce cas l'équation d'Euler

$$\mu^2\frac{d^2y}{d\mu^2}+My=0,$$

aisément intégrable**).

---

*) Si γ est un entier, la solution peut également s'écrire sous une forme quelque peu différente. Pour cela on peut utiliser la représentation des solutions d'une équation hypergéométrique sous la forme donnée dans L. Sedov, *Two-dimensional problems in hydrodynamics*, Wiley, 1952.

**) Tout comme les écoulements considérés du fluide visqueux, les écoulements méridiens du fluide incompressible conducteur ont une classe d'écoulements automodèles définis par une constante dimensionnée $[A]=L^pT^qM$ pour $p+2q+3=0$; voir G. Grodzovski, A. Dukalov, V. Tokarev et A. Tolstyh, « Izvestia Academii Naouk », Sciences techniques, n° 1, 1960.

§ 3. Couche limite lors de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une plaque plate

Considérons l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'une plaque plate infiniment mince. Supposons que loin en amont de la plaque le fluide est animé d'un mouvement de translation à une vitesse constante U_0. La plaque est de longueur infinie et elle est disposée le long du flux parallèlement à la vitesse U_0. Le problème est plan; l'écoulement est stationnaire, le fluide occupe tout le plan extérieur à la plaque. Ce problème de l'écoulement du fluide visqueux est très simple; mais, malgré cela on n'arrive pas à en obtenir de solution exacte à l'aide des équations de Navier-Stokes étant donné les difficultés mathématiques considérables auxquelles on se heurte. On fera l'étude de ce problème en partant des équations de Prandtl, qui s'obtiennent à partir des équations générales du mouvement du fluide visqueux si l'on admet certaines approximations*).

Les équations de la couche limite de Prandtl ont, dans le cas considéré, la forme

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

où u et v sont les projections de la vitesse d'un élément fluide sur les axes de coordonnées et ν le coefficient de la viscosité cinématique. L'axe des x est dirigé le long de plaque dans le sens du flux, l'axe des y est perpendiculaire à la plaque. Outre les équations (3.1) on dispose encore des conditions aux limites pour déterminer $u(x, y)$ et $v(x, y)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{pour} \quad x>0, \quad y=0 \quad u=v=0;\\ &\text{pour} \quad y=\pm\infty \qquad\quad u=U_0.\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Les paramètres de définition seront

$$U_0,\ \nu,\ x,\ y.$$

Etant donné que la plaque est plane et infiniment longue, il est impossible d'introduire la dimension caractéristique. Les raisonnements généraux de la théorie dimensionnelle permettent d'affirmer que toutes les grandeurs abstraites de ce problème sont fonction de deux combinaisons sans dimension

$$\frac{y}{x},\quad \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}.$$

*) L. Prandtl, Verhandl. der Dritten Intern. Math. Kongr. in Heidelberg (1904), Leipzig, 1905.

Voir également L. Sédov, *Mécanique des milieux continus*, t. 2, Ed. Mir, 1975.

C'est pourquoi le problème considéré vérifie les formules du type

$$u=U_0 f\left(\frac{y}{x}, \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right), \tag{3.3}$$

$$v=\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\,\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right). \tag{3.4}$$

Montrons maintenant que certaines particularités des équations (3.1) font que le premier paramètre y/x dans les formules (3.3) et (3.4) est non essentiel. A cette fin procédons au changement de variables

$$x=l\xi, \quad y=\sqrt{\frac{\nu l}{U_0}}\,\eta, \quad u=U_0 u_1, \quad v=\sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}\,v_1, \tag{3.5}$$

où l est une constante supérieure à zéro. En donnant à l la dimension de longueur on peut considérer les valeurs ξ, η, u_1, v_1 comme sans dimension.

Après la substitution (3.5) les équations (3.1) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} u_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta}&=\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2},\\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi}+\frac{\partial v_1}{\partial \eta}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Les conditions aux limites formulées par rapport aux nouvelles variables s'écriront

$$\left.\begin{aligned} &\text{pour} \quad \xi>0, \quad \eta=0 \quad u_1=v_1=0;\\ &\text{pour} \quad \eta=\pm\infty \quad u_1=1. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Les équations (3.6) et les conditions aux limites (3.7) répondent à la formulation du problème de la couche limite sous forme adimensionnée. La solution de ce problème ne saurait dépendre de la quantité $U_0 l/\nu=\mathbf{R}$, celle-ci ne figurant ni dans l'équation (3.6) ni dans les conditions aux limites (3.7)*). Par ailleurs, les formules générales (3.3) et (3.4) montrent que

$$u_1=\frac{u}{U_0}=f\left(\frac{\eta}{\xi\sqrt{\mathbf{R}}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\right), \tag{3.8}$$

$$v_1\sqrt{\xi}=\frac{v}{\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}}=\Phi\left(\frac{\eta}{\xi\sqrt{\mathbf{R}}}, \frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\right). \tag{3.9}$$

*) Cette circonstance est propre aux équations de Prandtl (3.1). Si l'on applique la transformation (3.5) aux équations de Navier-Stokes, on sera amené en fin de compte à envisager les équations sans dimension contenant le paramètre R, par conséquent les conclusions ultérieures ne peuvent trouver une application valable aux équations de Navier-Stokes.

La solution ne devant pas dépendre de **R**, il s'ensuit que le premier argument y/x ne peut pas entrer dans le second membre des formules (3.8) et (3.9).

Ainsi donc on a établi que la solution du problème doit être de la forme*)

$$u=U_0 f\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right), \tag{3.10}$$

$$v=\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\,\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right). \tag{3.11}$$

Introduisons maintenant une nouvelle variable

$$\lambda=\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}=\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}$$

et posons $f(\lambda)=\varphi'(\lambda)$. En portant u et v donnés par (3.11) dans l'équation de continuité, exprimons $\Phi(\lambda)$ en fonction de $\varphi(\lambda)$:

$$\Phi'(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda\varphi''(\lambda)=\frac{1}{2}(\lambda\varphi'-\varphi)'.$$

En utilisant cette égalité on peut conférer aux formules (3.10) et (3.11) la forme

$$u=U_0\varphi'(\lambda), \tag{3.10'}$$

$$v=\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\cdot\frac{1}{2}[\lambda\varphi'(\lambda)-\varphi(\lambda)]. \tag{3.11'}$$

En plaçant les expressions établies de u et v dans la première équation (3.1) on obtient l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre par rapport à $\varphi(\lambda)$:

$$2\varphi'''+\varphi\varphi''=0. \tag{3.12}$$

A partir des conditions aux limites (3.2) du problème on obtient pour la fonction inconnue $\varphi(\lambda)$, vérifiant l'équation (3.12), les conditions aux limites suivantes :

$$\varphi'(0)=\varphi(0)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(\infty)=1. \tag{3.13}$$

L'équation différentielle non linéaire (3.12) avec les conditions aux limites (3.13) se résout approximativement**). La méthode approchée proposée par Töpfer utilise la propriété générale de l'équation (3.12) qui consiste en ceci.

---

*) Une autre démonstration de la validité de la formule (3.10) est donnée dans le livre : L. Loïtsianski, *Aérodynamique de la couche limite* (en russe), p. 76, Gostekhizdat, 1941.

**) H. Blasius, Zeitschr. f. Math. und Phys., Bd. 56 (1908); K. Töpfer, Zeitschr. f. Math. und Phys., Bd. 60 (1912).

Si $\varphi_0(\lambda)$ est solution de l'équation (3.12), la fonction

$$\varphi(\lambda)=a\varphi_0(a\lambda)$$

l'est également (a est une constante quelconque). On s'en convainc aisément au moyen d'une vérification directe.

En guise de solution de travail $\varphi_0(\lambda)$ prenons celle de l'équation (3.12) satisfaisant aux conditions aux limites

$$\varphi_0(0)=\varphi_0'(0)=0 \quad \text{et} \quad \varphi_0''(0)=1.$$

On peut construire la fonction $\varphi_0(\lambda)$ en se servant des méthodes d'approximation usuelles. Dans la résolution approchée on calcule la limite

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi_0'(\lambda)=k.$$

Le calcul numérique donne $k=2{,}0854$. La solution de l'équation (3.12) représentée par la formule

$$\varphi(\lambda)=\alpha^{1/3}\varphi_0(\alpha^{1/3}\lambda)$$

satisfait aux conditions aux limites :

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0)=\alpha$$

avec

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \varphi'(\lambda)=k\cdot\alpha^{2/3}.$$

D'où il découle clairement que pour établir la solution cherchée il suffit de poser

$$\alpha=\frac{1}{k^{3/2}}=0{,}332.$$

Ayant déterminé $\alpha=\varphi''(0)$, on détermine sans peine avec la formule (3.10′) la résistance de frottement subie par la plaque.

La contrainte de frottement τ sur la plaque vérifie la formule

$$\tau=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}=\mu U_0\frac{\varphi''(0)}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}=0{,}332\sqrt{\frac{\varrho\mu U_0^3}{x}}. \tag{3.14}$$

Cela étant, calculons la résistance W d'une portion de la plaque de longueur l et de largeur b :

$$W=b\int_0^l \tau\,dx=0{,}664b\cdot\sqrt{\varrho\mu l U_0^3}. \tag{3.15}$$

La contrainte de frottement τ et la résistance W sont donc proportionnelles à la puissance un et demi de la vitesse d'écoulement.

La formule (3.15) conduit à la formule suivante pour c_f :

$$c_f=\frac{2W}{\varrho blU_0^2}=\frac{1{,}328}{\sqrt{\mathbf{R}}},$$

où

$$R=\frac{U_0 l}{\nu}.$$

Les données expérimentales*) sur les plaques planes lisses coïncident avec la loi de distribution des vitesses et de la résistance propre au régime laminaire d'écoulement caractérisé par de faibles valeurs du nombre de Reynolds

$$R=\frac{U_0 l}{\nu}<3\cdot 10^5.$$

Lorsque les nombres de Reynolds sont grands, l'écoulement laminaire stationnaire considéré est instable. Il se produit alors un écoulement turbulent modifiant profondément les lois de résistance et de distribution des vitesses au voisinage de la plaque.

§ 4. Ecoulements turbulents isotropes d'un fluide incompressible

1. Mise en moyenne d'un écoulement turbulent. De nombreux écoulements observés dans la nature et la majorité des écoulements rencontrés en technique se caractérisent par la présence d'un écoulement désordonné, non stationnaire du fluide qui se superpose à l'écoulement principal que l'on peut représenter comme une certaine moyenne statistique. De tels écoulements sont dits turbulents.

Dans un écoulement turbulent la vitesse, la pression et autres valeurs subissent en chaque point du flux des variations irrégulières autour de certaines valeurs moyennes. Pour cette raison il semble indiqué d'appliquer les notions de calcul des probabilités; dans ce cas les valeurs instantanées des caractéristiques mécaniques seraient des quantités aléatoires, leurs moyennes étant définies comme des espérances mathématiques**). Le plus souvent les valeurs moyennes sont définies comme des moyennes temporelles au sens usuel. Les intervalles de temps dans lesquels on prend la moyenne doivent être suffisamment grands par rapport au temps d'une pulsation isolée et petits par rapport au temps de la variation notable des valeurs moyennes si l'écoulement moyen est non stationnaire***).

Les valeurs moyennes des pressions, des projections des vitesses, des produits des projections de pulsations de vitesse pris au même point ou à des points différents voisins (les moments dits de couplage pour la vitesse), etc., dépendent, dans une large mesure, de la présence de la turbulence qui favorise le nivellement de la variation des valeurs moyennes en différents points de l'espace.

---

*) M. Hansen, ZAMM, Bd. 8, nº 3, 1928; Fage, ARC, R & M, nº 1580, 1934.

**) Voir par exemple M. Millionchikov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 22, nº 5, 1939.

***) Sur la mise en moyenne voir N. Kotchine, I. Kibel et N. Rosé, *Hydrodynamique théorique* (en russe), p. II, Physmatguiz, 1963.

L'expérience montre qu'avec de grands nombres de Reynolds, c'est-à-dire avec de grandes vitesses et de grandes échelles, les écoulements laminaires stationnaires deviennent instables et se transforment en écoulements turbulents non stationnaires pouvant bien souvent être stables en moyenne.

Les problèmes fondamentaux de la mécanique des fluides moderne concernant l'écoulement dans des espaces limités et la résistance subie par un corps mobile au sein du fluide sont étroitement liés à l'étude des flux turbulents.

Toutes les études théoriques consacrées à l'écoulement d'un fluide visqueux supposent valables les équations de Navier-Stokes pour le vrai écoulement non stationnaire et pulsatoire. Mais comme les trajectoires des particules fluides dans un écoulement turbulent sont sinueuses et complexes à l'extrême, ainsi le sont d'ailleurs toutes les relations fonctionnelles principales, résoudre les équations de Navier-Stokes est une tâche extrêmement ardue et difficile, comparable au problème de la description du mouvement d'une molécule isolée dans un grand volume de gaz. C'est pourquoi, dans la mécanique des fluides, tout comme dans la théorie cinétique des gaz, les problèmes fondamentaux de l'écoulement turbulent sont réduits aux problèmes de l'établissement des relations fonctionnelles entre les valeurs moyennes.

On peut établir les équations du mouvement pour les grandeurs moyennes en procédant à la mise en moyenne des équations du mouvement pour les grandeurs décrivant la configuration instantanée du mouvement. Etant donné que les équations du mouvement sont non linéaires, on obtient après la mise en moyenne un nombre d'inconnues supérieur à celui des équations, les valeurs moyennes des termes non linéaires, tels que les produits de deux ou plusieurs grandeurs, étant les nouvelles inconnues*). Ainsi donc en faisant la moyenne des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible**) on doit introduire, en plus de moyennes***) des projections de la vitesse $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, les moyennes des produits $\overline{u_i u_k}$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

Donc pour une étude mathématique des écoulements turbulents moyens les équations de la mécanique des fluides qui conviennent pleinement pour l'étude des vrais écoulements, ne suffisent plus. Une étude théorique complète des écoulements turbulents moyens n'est possible qu'à partir de certaines hypothèses supplémentaires que seule l'expérience peut confirmer en définitive****).

Plusieurs travaux consacrés à la recherche sur les écoulements turbulents ont surtout cherché à établir la validité de diverses hypo-

---

*) L. Keller, *Ueber die Aufstellung eines Systems von Characteristiken der atmosphärischen Turbulenz.* Journal « Géophysique et météorologie » (éd. en U. R. S. S.), t. 2, op. 3-4, 1925, pp. 275-290.

**) Nous conserverons l'hypothèse de l'incompressibilité du fluide dans tous les raisonnements ultérieurs.

***) Selon l'usage nous désignerons les valeurs moyennes par des lettres surlignées.

****) Nous supposons qu'il s'agit de la formulation d'un problème mathématique à un nombre fini d'inconnues.

thèses simples et naturelles, plus ou moins vraisemblables, que l'on peut soumettre à la vérification expérimentale et qui auront permis de formuler et de résoudre théoriquement les principaux problèmes de l'écoulement turbulent.

Actuellement, il n'existe pas encore de formulation mathématique générale du problème des écoulements turbulents moyens quelconques; les formulations mathématiques des problèmes rhéologiques des écoulements turbulents moyens diffèrent sensiblement et ne sont applicables qu'à des classes très restreintes de problèmes.

Les méthodes dimensionnelles et les considérations de similitude des écoulements étaient plus d'une fois utilisées comme les méthodes de base pour l'étude des écoulements turbulents.

2. Uniformité et isotropie. Soit l'écoulement turbulent d'un fluide visqueux remplissant tout l'espace*.

La configuration du mouvement à chaque instant t se définit par les perturbations initiales (perturbations du fluide à l'instant $t=0$) et par les propriétés d'inertie et de viscosité du fluide, soit par les valeurs ϱ et μ.

Prenons un système de perturbations initiales cinématiquement semblables. Tout état perturbé isolé peut être défini lorsqu'on se donne les échelles des longueurs et du temps, en indiquant pour cela une certaine vitesse caractéristique u_0 et une certaine quantité l_0 ayant la dimension de longueur.

Par conséquent, une configuration de l'écoulement turbulent se définit, pour le système de perturbations initiales cinématiquement semblables, par les paramètres

$$\varrho,\ \mu,\ l_0,\ u_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

où x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées des points de l'espace**).

L'ensemble des écoulements turbulents ainsi obtenu contient les écoulements dynamiquement dissemblables. Pour que deux écoulements turbulents soient semblables il faut et il suffit que le nombre de Reynolds ait la même valeur pour les deux écoulements :

$$\frac{u_{01}l_{01}\varrho_1}{\mu_1}=\frac{u_{02}l_{02}\varrho_2}{\mu_2}.$$

La date et les coordonnées des points correspondant aux états semblables se définissent par les relations

$$\frac{u_{01}t_1}{l_{01}}=\frac{u_{02}t_2}{l_{02}},\quad \frac{x_{i1}}{l_{01}}=\frac{x_{i2}}{l_{02}}\quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

*) Les développements ultérieurs peuvent se rapporter à l'écoulement dans un espace limité ou dans des volumes finis de fluide s'il est possible de négliger l'effet des frontières.

**) Les systèmes de coordonnées sont disposés de manière identique par rapport aux perturbations initiales.

Les valeurs u et l se déterminent par les fonctions de la forme

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{u_0}&=f\left(\frac{u_0t}{l_0},\ \frac{u_0l_0\varrho}{\mu},\ \frac{x_1}{l_0},\ \frac{x_2}{l_0},\ \frac{x_3}{l_0}\right),\\ \frac{l}{l_0}&=\varphi\left(\frac{u_0t}{l_0},\ \frac{u_0l_0\varrho}{\mu},\ \frac{x_1}{l_0},\ \frac{x_2}{l_0},\ \frac{x_3}{l_0}\right).\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

Des formules analogues seront vraies en principe pour toute caractéristique mécanique sans dimension associée à un point du fluide. Outre les paramètres indiqués, ces fonctions dépendent encore des paramètres sans dimension définissant les lois de distribution des perturbations initiales.

Dans une étude de l'écoulement turbulent on est amené à considérer les caractéristiques dépendant de la configuration de l'écoulement dans deux ou plusieurs points; ces caractéristiques peuvent dépendre des coordonnées de plusieurs points. Ainsi les valeurs moyennes des produits des projections de la vitesse en m points $M_1(x_1', x_2', x_3')$, $M_2(x_1'', x_2'', x_3'')$, ..., $M_m(x_1^m, x_2^m, x_3^m)$ sont égales à

$$\begin{aligned}&\tau_{k_1k_2\ldots k_n}(M_r, M_s, \ldots, M_d)=\\ &=\overline{u_{k_1}(M_r)u_{k_2}(M_s)\ldots u_{k_n}(M_d)}(k_1, k_2, \ldots, k_n=1, 2, 3)\end{aligned}\tag{4.2}$$

et forment un tenseur dont les composantes pour le système de perturbations initiales semblables dépendent encore de $3m$ coordonnées $x_i^k(i=1, 2, 3;\ k=1, 2, \ldots, m)$. Les indices $r, s, \ldots, d$ représentent une suite déterminée de numéros $1, 2, \ldots, m(m\leq n)$. Dans le cas général les quantités τ dépendent essentiellement de toutes les coordonnées.

Le flux turbulent est dit uniforme si les valeurs moyennes en chaque point ne dépendent pas de la position de celui-ci et les valeurs moyennes pour les grandeurs dépendant de plusieurs points ne dépendent que de leur disposition relative, c'est-à-dire des différences de coordonnées $x_i^p-x_i^q$. Dans un champ des vitesses turbulent uniforme les fonctions (4.1) ne dépendent pas de x_1/l_0, x_2/l_0, x_3/l_0. Les caractéristiques moyennes d'écoulement au voisinage de deux points quelconques sont égales. Il est clair que les perturbations initiales affectant un flux turbulent uniforme doivent présenter une certaine uniformité de distribution dans le volume fluide.

Un flux turbulent uniforme est dit isotrope si les tenseurs de couplage des projections des vitesses, définis par l'égalité (4.2) pour tous n et m, ne dépendent pas de l'orientation dans l'espace du polyèdre $M_1M_2\ldots M_m$ et se conservent par réflexion de ce dernier par rapport aux plans arithmétiques*).

Les composantes du tenseur de couplage peuvent dépendre de l'orientation des axes de coordonnées par rapport au polyèdre $M_1M_2\ldots M_m$ et du choix du sens positif le long des axes. Si l'on a un flux turbulent isotrope, les quantités $\tau_{k_1k_2\ldots k_n}$ ont une même valeur dans des repères orientés identiquement par rapport aux différentes positions d'un même polyèdre.

*) Si cette condition n'a lieu que pour $2\leq n<N$, $2\leq m<M$ où N et M sont des entiers, le flux en question peut être considéré comme approximativement uniforme.

Par définition, un écoulement turbulent isotrope est caractérisé par la propriété de symétrie en moyenne. On suppose que pendant un intervalle de temps suffisamment grand où l'on prend la moyenne, toutes les orientations de la vitesse en tout point de l'espace sont équiprobables; cela est compatible avec l'hypothèse qu'à chaque instant l'écoulement est continu et les points voisins ont approximativement les mêmes vitesses.

L'écoulement turbulent uniforme isotrope est la forme la plus simple d'écoulement turbulent. Un fluide perturbé abandonné à lui-même se meut par inertie; les forces visqueuses internes sont responsables de la dissipation de l'énergie cinétique et par suite l'écoulement s'amortit et les perturbations turbulentes dégénèrent. L'étude d'une turbulence isotrope se ramène précisément à déterminer les lois d'amortissement*).

Dans le cas général les écoulements turbulents se caractérisent par le nivellement, ou la diffusion, des perturbations. Il est souvent possible d'assimiler l'écoulement turbulent isotrope à une sorte d'écoulement turbulent limite de même qu'on remplace souvent approximativement l'écoulement non stationnaire par un écoulement stationnaire limite.

Comme le montrent les expériences, l'écoulement turbulent de l'air qui se crée derrière une grille à petite cellule se déplaçant rapidement, à des distances qui ne sont ni trop grandes, ni trop petites et où l'influence des limites du courant est faible, peut être approximativement assimilé à un écoulement turbulent isotrope. Il en est de même de l'écoulement turbulent de l'air soufflé à travers une grille immobile si l'on imprime à tout le système une translation uniforme. On rencontre souvent ce problème au cours des essais sur la turbulence dans les souffleries aérodynamiques.

3. Propriétés de symétrie des tenseurs des moments de couplage des vitesses. L'hypothèse de l'isotropie entraîne certaines particularités des relations entre les composantes du tenseur $\tau_{k_1k_2\ldots k_n}$. Par exemple, si les composantes du tenseur $\tau_{k_1k_2\ldots k_n}$ sont obtenues comme les moyennes des projections de la vitesse d'un même point $M_1=M_2=\ldots=M_m$, alors pour n impair, on a évidemment :

$$\tau_{k_1k_2\ldots k_n}=0.$$

Lorsque n est pair, seules les composantes où chaque projection de la vitesse entre dans sa puissance paire sont non nulles. En particulier, pour $n=1$ on a

$$\bar{u}_1=\bar{u}_2=\bar{u}_3=0;$$

pour $n=2$

$$\overline{u_1u_2}=\overline{u_1u_3}=\overline{u_2u_3}=0,\ \overline{u_1^2}=\overline{u_2^2}=\overline{u_3^2}=\frac{1}{3}\,\overline{v}^2\,; \tag{4.3}$$

pour $n=3$ toutes les composantes sont nulles, etc.

Si les points M_1, M_2, ..., M_m sont distincts ou si l'on n'a que deux points, il y aura certaines conditions de symétrie et, en outre, lorsqu'on a

*) Les questions d'existence et de diversité des types d'écoulements turbulents isotropes d'un fluide visqueux n'ont pas encore trouvé leur fondement théorique.

uniquement deux points, le tenseur de couplage ne dépend que de la distance r séparant les points considérés. Les composantes $\tau_{k_1k_2\ldots k_n}$ dépendent de r et de l'orientation des axes de coordonnées par rapport au segment M_1M_2.

Il est facile d'établir la validité des relations suivantes découlant de l'isotropie de l'écoulement :

$$\overline{u_i(M_1)u_j(M_2)}=\overline{u_i(M_2)u_j(M_1)} \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3). \tag{4.4}$$

Prenons un point M_1 à l'origine des coordonnées et un point M_2 sur l'axe x_1, il vient

$$\tau_{11}=b_d^d\neq 0, \quad \tau_{22}=\tau_{33}=b_n^n\neq 0, \quad \tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{23}=0. \tag{4.5}$$

Les indices supérieurs se rapportent au point M_2, les indices inférieurs, au point M_1. Il est clair que les quantités b_d^d et b_n^n dépendent de x_1 et de t et sont des fonctions paires de x_1.

Si le point M_2 se situe de façon quelconque par rapport aux axes de coordonnées, toutes les composantes τ_{ik} s'expriment sans difficulté par b_d^d et b_n^n. Les formules donnant les τ_{ik} en fonction de b_d^d et b_n^n représentent des formules de transformation des composantes tensorielles lorsqu'on passe du système spécial de coordonnées dont l'axe x_1 est mené par le point M_2 à un système de coordonnées arbitraire. Les formules ont la forme

$$\tau_{ik}=(b_d^d-b_n^n)l_{i1}l_{k1}+b_n^n\delta_{ik}\left(\delta_{ik}\begin{matrix}=1, i=k;\\=0, i\neq k\end{matrix}\right), \tag{4.6}$$

où l_{ik} sont les cosinus directeurs des axes du repère donné par rapport au repère spécial.

Pour $r=0$ on a

$$b_d^d=b_n^n=\frac{1}{3}\overline{v^2}=b. \tag{4.7}$$

Considérons maintenant les conditions de symétrie pour le tenseur de couplage du troisième ordre. Les formules de transformation des composantes du tenseur du troisième ordre lors du changement de repère s'écrivent

$$\Pi'_{ijk}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\Pi_{\alpha\beta\gamma}l_{\alpha i}l_{\beta i}l_{\gamma k}, \tag{4.8}$$

où l_{sm} sont les cosinus directeurs du nouveau repère. Soit la transformation

$$x'_1=-x_1, \; x'_2=x_2, \; x'_3=x_3$$

ne faisant qu'inverser le sens de l'axe x_1. Dans ce cas on a

$$l_{11}=-1, \quad l_{22}=l_{33}=1, \quad l_{sm}=0 \quad (s\neq m);$$

de sorte que si l'indice unité se rencontre parmi les indices i, j, k un nombre impair de fois, il vient de la formule (4.8)

$$\Pi'_{ijk}=-\Pi_{ijk}.$$

Supposons que le point M_1 coïncide avec l'origine des coordonnées et le point M_2 se situe sur l'axe des x_1. L'isotropie entraîne que les composantes du tenseur de couplage du troisième ordre formées pour les projections des vitesses des points M_1 et M_2 sont indépendantes de l'orientation des axes x_2 et x_3.

Il en découle que les composantes contenant les indices 2 ou 3 un nombre impair de fois sont nulles, car elles ne peuvent pas changer de signe lorsque les axes x_2 ou x_3 changent de sens.

Ainsi donc, si le point M_2 est sur l'axe x_1, le tenseur de couplage (constitué de deux projections de la vitesse du point M_1 et d'une projection de la vitesse du point M_2) a les cinq composantes non nulles suivantes :

$$\tau_{111}=b^d_{dd},$$
$$\tau_{122}=\tau_{133}=b^n_{dn},$$
$$\tau_{221}=\tau_{331}=b^d_{nn}.$$

Les composantes du tenseur de couplage du troisième ordre*) peuvent être exprimées par b^d_{dd}, b^n_{dn} et b^d_{nn} à l'aide des formules (4.8), quel que soit le repère utilisé. Dans le cas général au lieu de la variable x_1 on prend la distance des points M_1 et M_2 qui sera désignée dans la suite par la lettre r. A mesure que la distance des points augmente, leurs vitesses deviennent de plus en plus indépendantes en moyenne, de sorte que les composantes citées des tenseurs de couplage des vitesses doivent tendre vers zéro lorsque r croît indéfiniment.

Pour $r=0$ les points M_1 et M_2 coïncident; dans ce cas on a

$$b^d_{dd}=b^n_{dn}=b^d_{nn}=0.$$

Changer de place les points M_1 et M_2 équivaut à inverser le sens des axes de coordonnées; il s'ensuit que

$$\tau_{ijk}(M_1, M_1, M_2)=-\tau_{ijk}(M_2, M_2, M_1). \tag{4.9}$$

Ces relations peuvent revêtir une autre forme

$$\left.\begin{aligned} b^d_{dd}&=-b^{dd}_d,\\ b^n_{dn}&=-b^{dn}_n,\\ b^d_{nn}&=-b^{nn}_d.\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

On en déduit que les moments de couplage b^d_{dd}, b^n_{dn} et b^d_{nn} sont des fonctions impaires de la variable x_1 ou de la variable r.

Si les projections des vitesses des pulsations sont des fonctions régulières de coordonnées que l'on peut développer en série de Taylor, alors manifeste-

*) La théorie générale de la symétrie permet aisément d'établir les formules correspondantes pour les composantes des tenseurs des moments du quatrième ordre et d'un ordre plus élevé pour une turbulence isotrope ou lorsqu'il y a d'autres conditions de symétrie (par exemple en présence de la symétrie axiale, etc.). Voir l'article de V. Lokhine et L. Sédov contenu au Supplément I au livre de L. Sédov, *Mécanique des milieux continus*, t. I, Ed. Mir, Moscou, 1975.

ment les moments de couplage peuvent également être développés en séries de Taylor par rapport à r. Pour les moments du second ordre b_d^d et b_n^n les séries de Taylor ne contiennent que les puissances paires de r, et pour les moments du troisième ordre b_{dd}^d, b_{dn}^n et b_{nn}^d, elles ne contiennent que les puissances impaires de r.

Montrons que le développement en série de b_{dd}^d ne contient pas de terme de premier degré en r. En effet,

$$b_{dd}^d = \overline{u_1^2(0, 0, 0)u_1(r, 0, 0)} = \overline{u_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)}_{r=0} r + \frac{1}{6}\overline{u_1^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\right)}_{r=0} r^3 + \dots$$

Le premier terme se réduit à zéro puisque

$$\overline{u_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)}_{r=0} = \frac{1}{3}\left[\frac{\partial \overline{u_1^3}}{\partial r}\right]_{r=0},$$

et $\overline{u_1^3}(r) = 0$ vu l'isotropie du mouvement turbulent. Ainsi donc, le développement en série de puissances du moment b_{dd}^d peut commencer par des termes d'au moins troisième ordre en r.

4. Les conditions d'incompressibilité et les relations dynamiques. L'opération de mise en moyenne permet de tirer de l'équation d'incompressibilité et des équations de Navier-Stokes les relations suivantes entre les composantes indépendantes des tenseurs de couplage des vitesses*).

L'équation d'incompressibilité donne

$$b_n^n = b_d^d + \frac{r}{2}\frac{\partial b_d^d}{\partial r}, \tag{4.11}$$

$$b_n^{nd} = -b_d^{nn} - \frac{r}{2}\frac{\partial b_d^{nn}}{\partial r}, \tag{4.12}$$

$$b_d^{dd} = -2b_d^{nn}. \tag{4.13}$$

Dans les expériences, les moments de couplage b_d^d et b_n^n peuvent être mesurés directement et indépendamment l'un de l'autre. En utilisant les résultats expérimentaux de Simmons obtenus dans le tunnel aérodynamique, Taylor a montré**) que les expériences confirment très bien l'égalité (4.11) (fig. 21).

Les relations (4.12) et (4.13) montrent que pour des r petits les développements en séries de puissances en r des b_d^{nn} et b_n^{nd} doivent commencer par le terme d'au moins troisième ordre en r, car le développement de b_d^{dd} possède cette propriété. Il vient des égalités (4.11), (4.12) et (4.13) que la définition des tenseurs de couplage des projections des vitesses du second et du troisième ordre se ramène à la définition de deux fonctions $b_d^d(r, t)$ et $b_d^{nn}(r, t)$.

---

*) L. Keller, A. Friedmann, *Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressibelen Flüssigkeit*, in : Intrern. Congr. Appl. Mech. (1924); Th. Kármán, L. Howarth, *On the statistical Theory of Isotropic Turbulence*, Proc. Roy. Soc., London, v. A 164, n° 917, 1938, pp. 192-215.

**) G. Taylor, Journ. of the Aeronautical Sciences, n° 8, t. 4, June 1937.

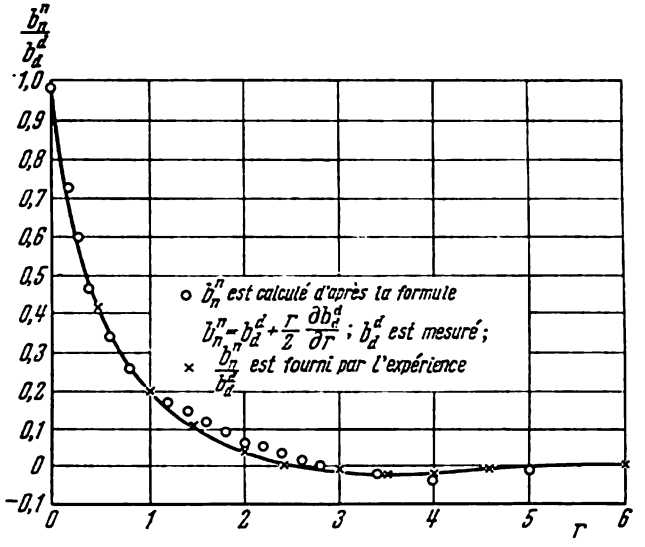


Fig. 21. Les données expérimentales sont en bon accord avec la formule théorique donnant la relation entre b_d^d et b_n^n

A partir des équations de Navier-Stokes on obtient pour ces grandeurs une seule équation

$$\nu\left(\frac{\partial^2 b_d^d}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial b_d^d}{\partial r}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial b_d^d}{\partial t}=\frac{\partial b_d^{nn}}{\partial r}+\frac{4}{r}b_d^{nn}, \tag{4.14}$$

où $\nu=\mu/\varrho$. Kármán et Howarth ont obtenu cette équation sous une forme légèrement modifiée pour les fonctions

$$f=\frac{b_d^d}{b} \quad \text{et} \quad h=\frac{b_d^{nn}}{b^{3/2}}.$$

Sous la forme (4.14) cette équation fut étudiée par L. Loïtsianski.

Multipliant l'équation (4.14) par r^4, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial b_d^d r^4}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\nu r^4\frac{\partial b_d^d}{\partial r}-r^4 b_d^{nn}\right]. \tag{4.14'}$$

En posant que pour $r\to+\infty$, l'ordre de disparition des fonctions $\partial b_d^d/\partial r$ et b_d^{nn} est plus élevé que $1/r^4$ et que l'expression dans le crochet s'annule pour $r=0$, on aboutit à

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty b_d^d r^4\,dr=0,$$

soit

$$\Lambda=\int_0^\infty b_d^d r^4\,dr=\text{const}. \tag{4.15}$$

L'existence d'une grandeur invariante Λ définie de cette manière fut mentionnée par L. Loïtsianski*). Notons tout de même que pour arriver à la finitude et à l'invariance de Λ on devait faire certaines hypothèses sur l'ordre de disparition de b_d^{nn} et de la dérivée $\partial b_d^d/\partial r$.

L'équation (4.14) ne suffit pas à elle seule à déterminer b_d^d et b_d^{nn}. La considération de moments de couplage du quatrième ordre et d'ordres supérieurs n'amène pas non plus au système d'équations fermé. L'équation des moments du troisième ordre contient les moments du quatrième ordre, les équations suivantes comportent les moments du cinquième ordre et ainsi de suite. Outre le fait que ces équations ne sont pas fermées, la donnée des conditions initiales présente un problème à part; il est clair donc qu'une étude théorique de la turbulence isotrope doit faire intervenir des hypothèses supplémentaires de nature mécanique**).

De telles hypothèses ont été avancées par Kármán et Howarth dans leur étude des écoulements avec de petits et grands nombres de Reynolds.

5. Stade terminal de la dégénérescence de la turbulence isotrope. Le mouvement turbulent d'un fluide s'amortit, par conséquent, $b=\overline{u_1^2}$ tend vers zéro pour t tendant à l'infini.

Lorsque les vitesses de pulsations sont très faibles, les composantes des moments de couplage du troisième ordre sont petites par rapport aux composantes des moments de couplage du deuxième ordre, ce qui permet de les négliger dans l'équation (4.14). En égalant le second membre à zéro dans l'équation (4.14), on obtient

$$\nu\left(\frac{\partial^2 b_d^d}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial b_d^d}{\partial r}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial b_d^d}{\partial t}=0. \tag{4.16}$$

Pour trouver une solution déterminée de l'équation (4.16) il est nécessaire de connaître la fonction $b_d^d(r, 0)$ donnant la distribution initiale du moment de couplage des vitesses longitudinales de deux points. Notre but est d'obtenir la solution de l'équation (4.16) pour les valeurs élevées du temps t. Pour les grands t, les particularités de la fonction $b_d^d(r, 0)$ deviennent secondaires, de sorte que pour l'étude du comportement asymptotique de la fonction $b_d^d(r, t)$ lorsque $t\to+\infty$, les conditions initiales peuvent être prises en considération sous une forme simplifiée.

Outre la distance r la fonction $b_d^d(r, 0)$ dépend encore de constantes dimensionnées obligatoirement présentes, étant donné que les dimensions de b_d^d et de r sont différentes.

Supposons maintenant que la distribution initiale des moments de couplage n'a d'effet sur le comportement asymptotique de b_d^d lorsque $t\to+\infty$ que par l'intermédiaire d'un seul facteur constant A de dimension L^pT^q. Cette constante pourrait caractériser, dans un certain sens, les pro-

*) L. Loïtsianski, Troudy TZAGUI, op. 440, 1939.

**) Ces questions furent discutées ainsi que les résultats des alinéas 5, 7, 8 dans la première édition de ce livre en 1944. Un bref exposé en est également donné dans l'article de L. Sédov « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 42, n° 3, 1944.

priétés sommaires de la distribution initiale du moment de couplage b_d^d. En particulier, la valeur de la constante A peut être définie par la formule

$$A=\left[\int_0^\infty b_d^d(r, t)\frac{r^{p+2q+1}}{\nu^{2+q}}\Phi\left(\frac{r^2}{\nu t}\right)dr\right]_{t=0},$$

où $\Phi\left(\frac{r^2}{\nu t}\right)$ est une fonction.

Posons

$$b_d^d=A\nu^{1-\frac{p}{2}}\frac{f(r, t, \nu)}{t^{1+q+\frac{p}{2}}}.$$

Comme la grandeur adimensionnée $f(r, t, \nu)$ dépend, par hypothèse, uniquement de trois paramètres dimensionnés r, t et ν, la fonction $f(r, t, \nu)$ ne dépend que de la combinaison $\xi=r^2/\nu t$. Par conséquent, la formule de la forme

$$b_d^d=\frac{A\nu^{1-\frac{p}{2}}}{t^{1+q+\frac{p}{2}}}f\left(\frac{r^2}{\nu t}\right) \tag{4.17}$$

est vérifiée.

On considérera dans ce qui suit les écoulements pour lesquels $f(\infty)=0$ et $f(0)=1$; la première condition correspond à l'indépendance statistique des vitesses de deux points lorsque $r\to+\infty$, la seconde est aisément satisfaite par le choix adéquat de la valeur numérique de la constante A.

Pour $r=0$ la formule (4.17) donne

$$b=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{A\nu^{1-\frac{p}{2}}}{t^{1+q+\frac{p}{2}}}. \tag{4.18}$$

Etant donné l'amortissement de l'écoulement turbulent, on doit avoir

$$1+q+\frac{p}{2}>0,$$

et comme $f(0)=1$, la distribution des perturbations décrites par la formule (4.17) est irrégulière à $t=0$.

Il est évident que la fonction

$$f\left(\frac{r^2}{\nu t}\right)=\frac{\overline{u_1(0, 0, 0, t)u_1(r, 0, 0, t)}}{\overline{u_1^2}}$$

représente le coefficient de la corrélation entre les projections des vitesses de deux points sur le segment qui les joint. Dans le cas considéré pour $t=0$ le coefficient de corrélation est nul si $r\neq 0$ et égal à l'unité si $r=0$.

Compte tenu de la formule (4.17) on obtient de l'équation (4.16)

$$f''+\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{2\xi}\right)f'+\frac{5\alpha}{4\xi}f=0, \tag{4.19}$$

où

$$\alpha=\frac{1+q+\frac{p}{2}}{10}.$$

Cette équation fut obtenue par Kármán et Howarth sur la base de l'unique hypothèse que le coefficient de corrélation n'est fonction que de la combinaison $r^2/\nu t$. Le nombre α est une constante arbitraire introduite par Kármán.

La solution de l'équation (4.19) dépend uniquement de la constante α.

Pour $\alpha=\text{const}$ la distinction entre les valeurs p et q n'est importante que pour indiquer la dimension de la constante A. Il vient de la formule (4.17) que seule la constante $A\nu^{1-p/2}$ qui a pour dimension

$$\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{q+p/2-1}=\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{10\alpha-2}$$

est importante.

La solution générale de l'équation (4.19) est régulière pour tous $\xi\neq 0, \infty$. La solution régulière pour $\xi=0$, vérifiant la condition $f(0)=1$, est donnée par la formule

$$f(\xi)=M\left(10\alpha, \frac{5}{2}, -\frac{\xi}{8}\right)=$$
$$=1-\alpha\xi+\frac{\alpha(10\alpha+1)}{4\cdot 7\cdot 2!}\xi^2-\frac{\alpha(10\alpha+1)(10\alpha+2)}{4^2\cdot 7\cdot 9\cdot 3!}\xi^3+\ldots, \tag{4.20}$$

où $M(\alpha, \gamma, x)$ est une fonction confluente hypergéométrique*). Cette solution pour de très grands $\xi\to+\infty$ vérifie le développement asymptotique

$$f(\xi)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)8^{10\alpha}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-10\alpha\right)}\frac{1}{\xi^{10\alpha}}\left[1+8\frac{10\alpha\left(10\alpha-\frac{3}{2}\right)}{\xi}+\right.$$
$$\left.+8^2\frac{10\alpha(10\alpha+1)\left(10\alpha-\frac{3}{2}\right)\left(10\alpha-\frac{1}{2}\right)}{2!\xi^2}+\ldots\right], \tag{4.21}$$

où $\Gamma(\chi)$ est le symbole de la fonction gamma d'Euler.

Les formules (4.17) et (4.21) permettent d'analyser le comportement du moment b_d^d lorsque $r\to+\infty$ ou lorsque $t\to 0$. Pour tous $\alpha>0$ on a la relation limite

$$\lim_{\frac{r^2}{\nu t}\to\infty} b_d^d r^{20\alpha}=A\nu^{2+q}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)8^{10\alpha}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-10\alpha\right)}. \tag{4.22}$$

*) E. Jahnke, F. Emde, *Funktionnentafeln mit Formeln und Kurven.* 2te neubearb. Aufl. (7 Tausend), Leipzig-Berlin, 1933.

Si

$$10\alpha-\frac{5}{2}=k,$$

soit

$$\alpha=\frac{1}{4}+k\cdot 0{,}1,$$

où k est un entier positif, la solution recherchée de l'équation (4.19) prend la forme finie suivante :

$$f=M\left(k+\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ -\frac{\xi}{8}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)}\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\lambda^{k+\frac{3}{2}}e^{-\frac{\xi\lambda}{8}}\right)\right]_{\lambda=1}=$$

$$=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}-\frac{k}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\frac{\xi}{8}+\frac{k(k-1)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)2!}\frac{\xi^2}{8^2}-\ldots+(-1)^k\frac{\xi^k}{\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)8^k}\right]e^{-\frac{\xi}{8}}.$$

Dans ce cas la distribution du moment b_d^d pour $t=0$ est du type source. Pour $r\neq 0$ et $t=0$ on a $b_d^d=0$; pour $r=0$ et $t\to 0$ on a $b_d^d\to\infty$.

L'équation (4.16) peut être interprétée comme une équation de conduction thermique dans un espace à cinq dimensions avec symétrie par rapport à l'origine des coordonnées. La solution correspondant à $\alpha=\frac{1}{4}$ (lorsque $k=0$) peut être assimilée à une source de chaleur dans un espace à cinq dimensions*). Dans ce cas la solution a la forme

$$b_d^d=A\nu^{1-\frac{p}{2}}\frac{e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}}{\sqrt{t^5}}. \tag{4.23}$$

La constante $A\nu^{1-p/2}$ pour $\alpha=\frac{1}{4}$ a la dimension $L^2T^{0,5}$.

On vérifie aisément que les solutions étudiées plus haut pour

$$\alpha=\frac{1}{4}+0{,}1k,$$

où $k>0$ est un entier, pourraient être déduites de la solution (4.23) correspondant à une source simple par dérivation par rapport au temps :

$$b_d^d=\frac{A\nu^{1-\frac{p}{2}}}{(-1)^k\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdots\left[\frac{5}{2}+(k-1)\right]}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}}{t^{5/2}}\right). \tag{4.24}$$

*) Voir L. Loïtsianski, Troudy TZAGUI, op. 440, 1939; M. Millionntchikov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. XXII, n° 5, 1939.

Il s'ensuit clairement que ces solutions décrivent les dipôles temporels dont l'ordre est donné par le nombre k. Les variations du coefficient de corrélation $f(r/\sqrt{\nu t})$ dans ces cas sont représentées à la figure 22.

On voit sans peine que pour $\alpha=\frac{1}{4}$ le paramètre Λ a une valeur finie non nulle.

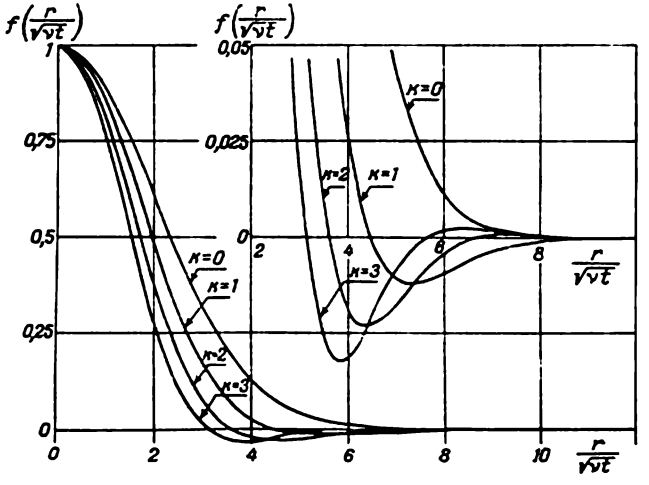


Fig. 22. Coefficient de corrélation pour les écoulements du type source pour différents k

En vertu de la formule (4.17) on peut écrire

$$\Lambda=\int_0^\infty b_d^d r^4\,dr=\frac{A\nu^{1-\frac{p}{2}}}{2}\,\frac{(\nu t)^{5/2}}{t^{10\alpha}}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{3/2}\,d\xi. \tag{4.25}$$

Cette égalité montre que la constance dans le temps de $\Lambda\neq 0$, ∞ est incompatible avec l'inégalité $\alpha\neq\frac{1}{4}$. Il découle du développement (4.21) que pour $0<\alpha<\frac{1}{4}$ on a $\Lambda=\infty$. Pour $\alpha>\frac{1}{4}$ on a $\Lambda=0$; dans ce dernier cas $f(\xi)$ change obligatoirement de signe lorsque ξ varie du zéro à l'infini.

Les solutions (4.17) et (4.20) donnent les lois continues de distribution de $b_d^d(r, t_0)$ pour tous α et $t_0>0$. Dans ces cas particuliers et donc dans le cas général, la loi d'amortissement dépend avant tout des propriétés des perturbations initiales. C'est pourquoi pour obtenir les lois asymptotiques d'amortissement à l'aide des solutions étudiées il faut encore avoir recours soit à des hypothèses supplémentaires de nature mécanique, soit à des données expérimentales.

6. Problème de l'écoulement turbulent dans une soufflerie. On l'a déjà indiqué, la turbulence isotrope est étudiée à l'aide de souffleries où l'écoulement turbulent s'obtient grâce aux grilles spéciales.

Voyons comment se forme l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible derrière une grille animée d'un mouvement de translation à une vitesse constante u le long de l'axe x. Pour simplifier, supposons que le fluide est illimité et que la grille représente un système bipériodique de cellules congruentes décalées les unes par rapport aux autres dans un plan perpendiculaire à l'axe x. Considérons la classe de mouvements des grilles à géométrie fixée.

L'écoulement dans le plan perpendiculaire à l'axe x est défini par le système de paramètres

$$\varrho,\ \mu,\ u,\ M, \qquad x=u(t-t_0),$$

où M est une dimension caractéristique de la grille, et x la coordonnée du plan considéré; la constante t_0 est définie par l'instant où l'on commence à mesurer x.

Les caractéristiques adimensionnées de l'écoulement dépendent de deux*) paramètres

$$\frac{x}{M} \quad \text{et} \quad \frac{\varrho u M}{\mu}.$$

Supposons que pour des valeurs x/M suffisamment grandes on peut admettre que l'écoulement turbulent est isotrope et que dans différents plans perpendiculaires à l'axe x l'évolution de la turbulence isotrope ne diffère que par la phase. Dans ce cas les caractéristiques de l'écoulement turbulent sont définies par les paramètres ϱ, μ, u, M, t.

Les coefficients de corrélation $f=b_d^d/b$ et $h=b_d^{nn}/b^{3/2}$ dépendent des paramètres adimensionnés

$$\frac{\varrho u M}{\mu},\quad \frac{ut}{M},\quad \frac{r^2}{\nu t}.$$

La formule (4.17) s'obtient alors si l'on admet l'hypothèse selon laquelle le paramètre ut/M devient non essentiel lorsqu'il atteint des valeurs suffisamment grandes.

Il découle de la formule (4.18) que

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b_0}}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{5\alpha};$$

en posant $t=t_0+x/u$, il vient

$$\frac{u}{\sqrt{b}}=\frac{u}{\sqrt{b_0}}\left(1+\frac{x}{ut_0}\right)^{5\alpha}. \tag{4.26}$$

*) Dans les expériences avec les écoulements turbulents, le flux derrière les grilles n'est pas illimité, donc la forme de la conduite ou du jet peut affecter de différentes façons certaines caractéristiques de l'écoulement (en particulier, par l'intermédiaire de L ou de $\varrho uL/\mu$ respectivement).

La formule (4.26) traduit la loi d'amortissement des pulsations turbulentes le long de l'axe de la soufflerie.

En partant d'un certain nombre de données expérimentales obtenues dans les souffleries, Taylor a proposé la formule empirique

$$\frac{u}{\sqrt{b}}=A+B\,\frac{x}{M}, \tag{4.27}$$

où A et B sont des constantes.

Pour accorder les formules (4.26) et (4.27) il faut poser $\alpha=\frac{1}{5}$. Pour $\alpha=\frac{1}{5}$, on a

$$\left[Av^{1-\frac{p}{2}}\right]=L^2.$$

7. **Mouvements turbulents à grandes pulsations.** Si le paramètre $\frac{ut}{M}$ est négligeable, les coefficients de corrélation conservent une valeur constante pour

$$\chi=\frac{r}{\sqrt{\nu t}}=\frac{r}{l}=\text{const}.$$

L'influence du temps t se réduit au changement d'échelle pour r.

Dans les solutions envisagées le changement d'échelle se définit par la relation

$$l=\sqrt{\nu t}=\sqrt{\frac{\nu(x+x_0)}{u}}. \tag{4.28}$$

Il découle de la formule (4.28) que lorsque $x=\text{const}$, i.e. à un point par rapport à la grille, l'échelle l est constante dans le temps. En outre la formule (4.28) montre que cette échelle dépend de la vitesse u.

Dans l'ouvrage cité, Taylor mentionne certaines données expérimentales qui ne confirment pas ce dernier résultat. On a été amené à améliorer et à modifier quelque peu la théorie dans le cas de grandes pulsations. On remarque que dans ce cas c'est l'échange des quantités de mouvement entre les masses miscibles du fluide qui joue le rôle de premier plan. Ces processus sont influencés avant tout par l'inertie du fluide.

La viscosité se fait sentir surtout dans l'évolution des mouvements à pulsations relativement petites caractérisés essentiellement par la dissipation de l'énergie cinétique. Notre objet d'étude étant les grandes pulsations, nous admettons, en suivant Kármán et Howarth, que pour des r suffisamment grands les formules suivantes

$$\frac{b_d^d}{b}=f\left(\frac{r}{l}\right), \tag{4.29}$$

$$\frac{b_d^{nn}}{b^{3/2}}=h\left(\frac{r}{l}\right) \tag{4.30}$$

sont valables, où l est une certaine grandeur linéaire qui peut varier selon le temps et selon les paramètres constants définissant le mouvement turbulent isotrope*). Les formules (4.29) et (4.30) montrent que l'influence du temps sur les coefficients de corrélation se ramène à une modification de l'échelle pour la distance l. L'influence de la viscosité sur la dissipation de l'énergie se manifeste indirectement par les grandeurs b et l.

Nous n'attribuerons pas un sens géométrique ou mécanique exact à la grandeur l. La définition de l peut être considérée comme une hypothèse supplémentaire. En particulier, si l'on admet que l'invariant $\Lambda \neq 0, \infty$, autrement dit qu'il existe une intégrale correspondante et que sont satisfaites les conditions formulées à la page 127, la relation entre l et b est établie. En effet

$$\Lambda = b\int_0^\infty f\left(\frac{r}{l}\right) r^4\, dr = bl^5 \int_0^\infty f(\chi)\chi^5\, d\chi.$$

D' où on tire

$$l = a\left(\frac{\Lambda}{b}\right)^{1/5}, \tag{4.31}$$

où a est une constante. Si l'on pose en outre $l=\sqrt{\nu t}$, ce qui correspond à la solution ci-dessus pour les petites pulsations, on aboutit immédiatement à la loi d'amortissement correspondant à $\alpha=\frac{1}{4}$:

$$b = \frac{a^5\Lambda}{(\nu t)^{5/2}}.$$

---

*) Les résultats ultérieurs publiés déjà en 1944 dans la première édition de ce livre s'appuient essentiellement sur les hypothèses contenues dans les formules (4.29) et (4.30).

Depuis 30 ans la question de la concordance avec l'expérience des hypothèses (4.29) et (4.30) restait ouverte. On mit plus d'une fois en doute la validité de ces hypothèses en ce qui concerne la description des résultats expérimentaux.

Après une analyse minutieuse des données expérimentales publiées A. Kornéev a montré récemment que si l'on choisit correctement les constantes apparaissant au cours de la résolution mathématique du problème, les hypothèses (4.29) et (4.30) permettent une bonne interprétation des résultats expérimentaux non seulement d'un point de vue qualitatif mais aussi d'un point de vue quantitatif. Voir A. Kornéev, « Prikladnaja matematika i mekhanika », t. 37, op. 5, 1973, pp. 864-881, ainsi que la thèse de A. Kornéev soutenue en 1974.

Dans les ouvrages cités A. Kornéev a également examiné les lois analogues asymptotiques d'amortissement de la turbulence isotrope uniforme dans des hypothèses plus générales de la forme suivante :

$$b_d^{dd} = b_1(t) - b_2(t)\beta_2(r/l),$$

$$b_d^{nn} = b_3^{3/2}\beta_3(r/l),$$

qui n'ont lieu que sur un certain intervalle : $0 \leq \chi_1 \leq r/l \leq \chi_2 \leq \infty$, où χ_1 et χ_2 sont des grandeurs bornées. Ces hypothèses plus générales coïncident sur cet intervalle avec (4.29) et (4.30) si $b_2/b_1 = \text{const}$ et $b_3/b_1 = \text{const}$.

A. Kornéev a souligné que la théorie envisagée reste valable pour la plupart des cas si l'on affaiblit les hypothèses (4.29) et (4.30) en posant qu'elles ont lieu uniquement sur l'intervalle : $0 \leq \chi_1 \leq \chi \leq \chi_2 \leq \infty$.

Avec les formules (4.29) et (4.30), l'équation (4.14) donne

$$h'(\chi)+\frac{4h(\chi)}{\chi}-\frac{1}{2}\chi f'(\chi)\frac{1}{b^{1/2}}\frac{dl}{dt}+\frac{1}{2}f(\chi)\frac{l}{b^{3/2}}\frac{db}{dt}=\frac{\nu}{b^{1/2}l}\left(f''(\chi)+\frac{4f'(\chi)}{\chi}\right). \tag{4.32}$$

Cette relation est satisfaite à l'aide de diverses hypothèses. En suivant Kármán et Howarth, envisageons les mouvements correspondant aux grandes valeurs du nombre de Reynolds $\sqrt{b}l/\nu$ et donc négligeons le second membre de l'équation (4.32). Il vient

$$h'+\frac{4h'}{\chi}=\frac{1}{2}\chi f'kc+\frac{1}{2}fc, \tag{4.33}$$

où

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dl}{dt}=kc, \tag{4.34}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^3}}\frac{dl}{dt}=-c. \tag{4.35}$$

Les grandeurs sans dimension kc et c ne dépendent pas de χ. L'équation (4.33), ainsi que des propriétés générales de la fonction $f(\chi)$ montrent que les grandeurs kc et c sont constantes.

En intégrant les équations (4.34) et (4.35), on trouve

$$\frac{l}{l_0}=\left(\frac{b_0}{b}\right)^k. \tag{4.36}$$

Pour $k\geq-\frac{1}{2}$, on a*)

$$\frac{b}{b_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{-\frac{2}{2k+1}}$$

et

$$\frac{l}{l_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{\frac{2k}{2k+1}}, \tag{4.37}$$

t_0 étant l'instant auquel correspondent les valeurs l_0 et b_0.

En ajoutant aux formules obtenues (4.37) l'hypothèse selon laquelle l'invariant $\Lambda\neq0$ existe, on déduit à partir de la formule (4.31) que $k=\frac{1}{5}$. Mettons $k=\frac{1}{5}$ dans (4.37), nous aboutissons aux résultats de A. Kolmogorov**)

$$\frac{b}{b_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{-10/7},\quad \frac{l}{l_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{2/7} \tag{4.37'}$$

---

*) La condition $k\geq-\frac{1}{2}$ doit être satisfaite pour que la moyenne de la vitesse de l'écoulement turbulent ne s'annule pas pendant un certain laps de temps fini.

**) A. Kolmogorov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. XXXI, n° 6, 1941.

qu'il a obtenus à partir de certaines hypothèses, y compris les hypothèses exprimées par les égalités (4.29) et (4.31)*).

Dans les raisonnements précédents le coefficient k est arbitraire. Si l'on admet que pour la soufflerie l'échelle l a une valeur constante proportionnelle aux dimensions M des cellules de la grille, $l=\text{const}\ M$, on a $k=0$ et

$$\frac{u}{\sqrt{b}}=\frac{u}{2\sqrt{b_0}}\left(1+\frac{t}{t_0}\right)=A+B\,\frac{x}{M}.$$

Cette formule coïncide bien avec celle de Taylor (4.27).

8. Lois de dégénérescence de la turbulence compte tenu des moments du troisième ordre. Les lois d'évolution de la turbulence traduites par les formules (4.37) ont été établies à partir de l'hypothèse supplémentaire de Kármán et Howarth consistant à poser nul le second membre de l'équation (4.32). Si l'on égalise à zéro le second membre de l'équation (4.32), on obtient l'équation suivante pour la fonction $f(\chi)$:

$$f''+\frac{4f}{\chi}=0$$

qui n'a pas de solutions satisfaisant à la condition $f(0)=1$ sauf la solution $f(\chi)=1$ qui ne satisfait pas à la condition physique $f(\infty)=0$.

Il s'ensuit que la solution de Kármán et Howarth est approchée; en même temps elle ne fournit pas de relations pour déterminer les fonctions $f(\chi)$ et $h(\chi)$. C'est pourquoi cette solution ne saurait être admise.

Nous allons établir par la suite toutes les solutions exactes physiquement admissibles de l'équation (4.14) en ne conservant que les principales hypothèses de Kármán et Howarth résumées par les deux formules

$$\frac{b_d^{d}}{b}=f\left(\frac{r}{l}\right) \tag{4.29}$$

et

$$\frac{b_d^{nn}}{b^{3/2}}=h\left(\frac{r}{l}\right), \tag{4.30}$$

où l et b sont des fonctions du temps.

En vertu de ces hypothèses l'équation (4.14) est réduite à la relation (4.32). Traitons de plus près les solutions exactes de cette équation**). En

*) On verra dans le p. 8 que les hypothèses (4.29), (4.30) et (4.31) sont contradictoires si $h\neq 0$, d'autre part, si $h=0$, on obtient des relations différentes de (4.37').

**) L'équation (4.14) et donc l'équation (4.32), qui en découle étant une conséquence, contiennent plusieurs fonctions inconnues. A première vue il paraît impossible de déterminer plusieurs fonctions à partir d'une seule équation. Cependant une analyse approfondie de la structure mathématique de cette équation permet de considérer tous les cas possibles et de déterminer, à une constante essentielle α près (voir plus loin), toutes les solutions du problème en question. Cette circonstance avait échappé à l'attention de beaucoup d'auteurs qui s'occupaient des théories des écoulements turbulents et du dépouillement des données expérimentales.

dérivant l'équation (4.32) par rapport au temps en considérant χ comme un paramètre, on obtient

$$\frac{1}{2}\chi f'(\chi)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b^{1/2}}\frac{dl}{dt}\right)-\frac{1}{2}f(\chi)\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{b^{3/2}}\frac{db}{dt}\right)+$$
$$+\left(f''(\chi)+\frac{4f'(\chi)}{\chi}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\nu}{\sqrt{bl}}\right)=0. \qquad (4.38)$$

Voyons quels cas sont possibles pour les fonctions entrant dans la relation (4.38) :

1°. Les fonctions $\chi f'(\chi)$, $f(\chi)$ et $f''(\chi)+4f'(\chi)/\chi$ sont linéairement indépendantes.

2°. Il n'existe qu'une seule relation linéairement indépendante aux coefficients constants du type

$$c_1\chi f'+c_2 f+c_3\left(f''+\frac{4f'}{\chi}\right)=0, \qquad (4.39)$$

dans laquelle c_1, c_2, c_3 ne sont pas tous nuls.

3°. Les fonctions

$$\chi f',\ f, f''+\frac{4f'}{\chi}$$

admettent deux relations linéairement indépendantes aux coefficients constants. Etant donné que $f\not\equiv 0$, ces relations peuvent toujours se mettre sous la forme

$$f'\chi=c_1' f \quad \text{et} \quad f''+\frac{4f'}{\chi}=c_2' f.$$

On voit sans difficulté que dans le dernier cas on doit avoir

$$c_1'=c_2'=0 \quad \text{et} \quad f=\text{const}.$$

Cette solution n'ayant aucun intérêt physique, le troisième cas est écarté.

Dans le premier cas tous les coefficients de la relation (4.38) sont nuls, de sorte que

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dl}{dt}=kc, \quad \frac{l}{\sqrt{b^3}}\frac{db}{dt}=-c, \quad \frac{\nu}{\sqrt{bl}}=\frac{1}{mc}, \qquad (4.40)$$

k, c et m étant des constantes. Le système de relations (4.40) fournit

$$l=c\sqrt{m\nu(t+t_0)}, \quad b=\frac{m\nu}{t+t_0}, \quad k=\frac{1}{2}. \qquad (4.41)$$

On obtient donc une loi bien déterminée de variation de l et de b en fonction du temps. Cette loi*) coïncide avec la loi (4.37) pour $k=\frac{1}{2}$. On obtient dans ce cas pour deux fonctions $f(\chi)$, $h(\chi)$ une seule équation.

*) Il est évident que dans ce cas la valeur Λ ne saurait être un invariant fini et non nul sinon l'égalité (4.31) contredirait l'égalité (4.41).

Analysons maintenant le second cas. On voit aisément que le coefficient c_3 de la relation (4.39) doit différer de zéro sinon la fonction $f(\chi)$ répondrait à l'équation

$$c_1 f + c_2 \chi f' = 0$$

qui, pour $c_1 \neq 0$, n'a pas de solution satisfaisant à la condition $f(0)=1$, et pour $c_1=0$ on obtient $f'=0$, soit $f=\text{const}\neq 0$, ce qui est impossible, étant donné la condition $f(\infty)=0$.

Comme $c_3 \neq 0$, la relation (4.39) peut s'écrire

$$f'' + \frac{4}{\chi} f' + \frac{a_1}{2} \chi f' + \frac{a_2}{2} f = 0, \tag{4.42}$$

où a_1 et a_2 sont des coefficients constants.

On trouve à partir des équations (4.38) et (4.42)

$$\frac{1}{2}\chi f' \left[\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dl}{dt} - a_1 \frac{d}{dt}\frac{\nu}{\sqrt{bl}}\right] - \frac{1}{2} f \left[\frac{d}{dt}\frac{l}{\sqrt{b^3}}\frac{db}{dt} + a_2 \frac{d}{dt}\frac{\nu}{\sqrt{bl}}\right] = 0.$$

Les fonctions $\chi f'$ et f étant linéairement indépendantes, l'expression du crochet s'annule évidemment, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dl}{dt} = a_1 \frac{\nu}{\sqrt{bl}} + p, \qquad \frac{l}{\sqrt{b^3}}\frac{db}{dt} = -a_2 \frac{\nu}{\sqrt{bl}} + q, \tag{4.43}$$

où p et q sont des constantes d'intégration.

En substituant les relations (4.43) dans (4.32) et en tenant compte de l'équation (4.12) on trouve l'équation permettant de déterminer $h(\chi)$ sous la forme

$$h' + \frac{4h}{\chi} - \frac{1}{2}\chi f' p + \frac{1}{2} f q = 0. \tag{4.44}$$

On a établi auparavant que le développement de la fonction $b_d^{nn}/b^{3/2} = h$ en série de puissances de $r/l = \chi$ doit commencer par les termes en χ^3, de sorte que l'équation (4.44) conduit à $q=0$.

Ainsi donc dans le cas 2° envisagé on a trouvé un système complet d'équations (4.42), (4.43) et (4.44) permettant de déterminer h et f en fonction de la variable χ et les valeurs l et b en fonction du temps t.

Ces équations contiennent trois constantes abstraites a_1, a_2 et p. On voit sans peine qu'une de ces constantes est non essentielle. En effet, la transformation $\chi = \lambda\chi'$, où λ est une certaine constante, amène à multiplier l'échelle l, qui n'est pas encore définie, par la constante $1/\lambda$ ($l = l'/\lambda$). En procédant à cette transformation dans les équations (4.42), (4.43) et (4.44), on arrive aux mêmes équations mais avec les valeurs a_1', a_2' et q' définies par les formules

$$a_1' = a_1\lambda^2, \quad a_2' = a_2\lambda^2, \quad p' = p\lambda.$$

Fixer une valeur déterminée de $a_1 \neq 0$ ou de $a_2 \neq 0$ revient à choisir une échelle déterminée de l.

En vertu de la seconde équation (4.43) il découle de la condition d'amortissement des pulsations turbulentes ($b \to 0$ lorsque $t \to \infty$) que $a_2 > 0$.

Ensuite, on admettra en tant que condition physique que $l \to +\infty$ pour $t \to \infty$ ou $b \to 0$.

L'équation (4.43) peut être intégrée, ce qui donne les relations suivantes pour $\frac{1}{l}$:

$$\frac{1}{l} = \frac{2p}{\nu(a_2 - 2a_1)} \sqrt{b} + c b^{a_1/a_2} \quad \text{pour} \quad a_2 - 2a_1 \neq 0, \tag{4.45}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{p}{\nu} \sqrt{b} (\operatorname{Log} b - c_1) \quad \text{pour} \quad a_2 - 2a_1 = 0, \tag{4.46}$$

où c et c_1 sont des constantes d'intégration.

De la formule (4.45), de l'inégalité $a_2 > 0$ et de la condition $l \to \infty$ lorsque $b \to 0$ il découle que $a_1 > 0$ si $c \neq 0$.

Etudions encore le cas où $c = 0$ et $a_1 = 0$. Pour $a_1 = 0$ l'équation (4.42) a une solution unique satisfaisant à la condition $f(0) = 1$.

Cette solution a la forme

$$f(\chi) = 3 \left[\frac{\sin \sqrt{\frac{a_2}{2}}\, \chi}{\left(\sqrt{\frac{a_2}{2}}\, \chi\right)^3} - \frac{\cos \sqrt{\frac{a_2}{2}}\, \chi}{\frac{a_2}{2} \chi^2} \right].$$

La fonction obtenue oscille avec l'accroissement de $\chi = r/l$, possède un nombre infini de zéros et diminue lentement comme $1/\chi^2$. Cela étant, nous pouvons éliminer désormais le cas $a_1 = 0$.

Le choix du paramètre λ étant libre, posons $a_1 = \frac{1}{2}$; l'équation (4.42) s'écrira alors sous la forme

$$f'' + \left(\frac{4}{\chi} + \frac{\chi}{4}\right) f' + \frac{a_2}{2} f = 0. \tag{4.47}$$

Notons $a_2 = 10\alpha > 0$ et effectuons le changement de variable

$$\frac{r^2}{l^2} = \chi^2 = \xi,$$

l'équation (4.47) se transforme en l'équation (4.19) que l'on a analysée lors de l'étude de l'amortissement de très petites pulsations. Par conséquent, on obtient pour $f(\xi)$ la même solution que dans le cas de petites pulsations

$$f(\xi) = M\left(10\alpha, \frac{5}{2}, -\frac{\xi}{8}\right), \tag{4.48}$$

à cette différence près que maintenant $l \neq \sqrt{\nu t}$ et $h \neq 0$. Ainsi donc, l'effet des moments du troisième ordre ne s'exerce sur le coefficient de corrélation $f = b_d^d/b$ que par l'intermédiaire de la variation de l'échelle linéaire l en fonction du temps.

Grâce à l'équation (4.44) ($q=0$) la fonction $h(\chi)$ est facilement explicitée par la fonction f. En intégrant l'équation (4.44) et compte tenu de la condition $h=0$ pour $\chi=0$, on a

$$h=\frac{p}{2}\frac{1}{\chi^4}\int_0^{\chi}\chi^5 f'(\chi)\,d\chi. \tag{4.49}$$

Si $\alpha=\frac{1}{4}$ et $h\neq 0$, il est clair que la fonction $h(\chi)$ s'évanouit pour $\chi\to\infty$ comme $1/\chi^4$; c'est pourquoi le moment du troisième ordre b_{ii}^{mn} décroît comme $1/r^4$ lorsque $r\to+\infty$ et, donc, les conditions nécessaires à l'invariance de Λ (cf. page 127) ne sont pas remplies.

Ainsi donc, pour $\alpha<\frac{1}{4}$ on a $\Lambda=\infty$, pour $\alpha>\frac{1}{4}$ on a $\Lambda=0$ et pour $\alpha=\frac{1}{4}$ et $p\neq 0$ (moments du troisième ordre non nuls) Λ est finie et non nulle mais ce n'est pas un invariant. En effet, pour $\alpha=\frac{1}{4}$ on obtient à partir des équations (4.14') et (4.49) :

$$\frac{d\Lambda}{dt}=-p\int_0^{\infty}\chi^5 f'(\chi)\,d\chi\, l^4 b^{3/2}\neq 0.$$

Si $p=0$, l'intégrale Λ est finie et invariante mais dans ce cas les moments du troisième ordre sont nuls.

Ainsi donc, si les moments du troisième ordre ne sont pas nuls et si les hypothèses traduites par les égalités (4.29) et (4.30) sont remplies, alors l'intégrale Λ est nulle ou infinie et, donc, inapplicable à la détermination des échelles conformément à l'égalité (4.31), ou bien, pour $\alpha=\frac{1}{4}$, Λ varie avec le temps et ne peut donc pas être considérée comme une constante caractéristique.

En multipliant l'équation (4.47) par $\chi^4\,d\chi$ et intégrant on obtient

$$\int_0^{\chi}\chi^5 f'\,d\chi=-4\chi^4 f'-20\alpha\int_0^{\chi}\chi^4 f\,d\chi=-4\chi^4 f'-4\alpha\chi^5 f+4\alpha\int_0^{\chi}\chi^5 f'\,d\chi.$$

En utilisant cette relation pour $\alpha\neq\frac{1}{4}$ on a

$$h=\frac{2p}{4\alpha-1}\left[f'(\chi)+\alpha\chi f(\chi)\right]. \tag{4.50}$$

Pour déterminer l et b en fonction du temps on dispose des équations (4.43) qui, pour $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=10\alpha$ et $q=0$, prennent la forme

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dl}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\nu}{\sqrt{bl}}+p,\qquad \frac{l}{\sqrt{b^3}}\frac{db}{dt}=-10\alpha\frac{\nu}{\sqrt{bl}}. \tag{4.51}$$

On voit sans peine que dans le cas particulier où $p=0$ le système d'équations (4.51) et (4.47) a la solution

$$l=\sqrt{\nu t},\quad b=\frac{A'}{(\nu t)^{10\alpha}},\quad f=M\left(10\alpha,\frac{5}{2},-\frac{\xi}{8}\right)\quad \text{et}\quad h\equiv 0$$

qui correspond à la solution de Kármán et Howarth pour les petites pulsations.

Introduisons maintenant la micro-échelle linéaire de Taylor $\lambda(t)$ utilisée dans de nombreux ouvrages sur la turbulence isotrope :

$$\frac{1}{\lambda^2}=-\frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial r^2}\bigg|_{r=0}.$$

En s'aidant de la formule (4.48) de $f(\xi)(\xi=r^2/l^2)$, contenant la fonction confluente connue, on déduit aisément la relation suivante entre l et λ :

$$l=\lambda\sqrt{\alpha}. \tag{4.52}$$

Considérons maintenant le cas où $p\neq 0$ et écrivons les formules (4.45) et (4.46) en utilisant au lieu de l l'échelle λ et les désignations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^*=\frac{\nu}{|p|\sqrt{b^*}}>0,\\ &w=\frac{b}{b^*};\quad \mu=\frac{1-10\alpha}{20\alpha},\end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

avec $b^*>0$ défini dans la formule (4.45) pour $\alpha\neq 0{,}1$ par l'égalité

$$\left|\frac{c(a_2-2a_1)}{2p}\right|=\left|\frac{c(10\alpha-1)}{2p}\right|=b^{*-\mu};$$

lorsque $\alpha=0{,}1$, la constante b^* est liée à c_1 dans la formule (4.46) par

$$c_1=\operatorname{Log} b^*.$$

Les constantes p et c pour $\alpha\neq 0{,}1$ ou p et c_1 pour $\alpha=0{,}1$ doivent être remplacées par les constantes d'échelle λ^* de dimension de longueur et b^* de dimension de vitesse.

(4.45) conduit aux relations suivantes :

pour $\alpha\neq 0{,}1$

$$p(10\alpha-1)>0;\quad c>0;\quad 0<w<\infty;$$

désignons par α_+ la famille de solutions qui s'ensuivent :

$$\frac{\lambda^*}{\lambda}=\frac{2\sqrt{\alpha_+ w}}{|10\alpha_+-1|}\,[1+w^{\mu}]; \tag{4.54}$$

pour $\alpha\neq 0{,}1$

$$c(10\alpha-1)>0;\quad p<0,\quad 0<w<1$$

désignons par α_- cette famille de solutions :

$$\frac{\lambda^*}{\lambda}=\frac{2\sqrt{\alpha_- w}}{(1-10\alpha_-)}[1-w^\mu]. \tag{4.55}$$

Parallèlement, on trouve à partir de (4.46) pour $\alpha=0{,}1$, $p<0$, $0<w<1$:

$$\frac{\lambda^*}{\lambda}=-\sqrt{\frac{w}{10}}\,\mathrm{Log}\,w. \tag{4.56}$$

On a écrit ici les relations entre λ et w compte tenu des conditions $\lambda^*>0$, $\lambda>0$ et $\lambda\to\infty$ pour $w\to 0$. C'est ainsi que s'établissent les inégalités $p(10\alpha-1)>0$ dans (4.54) et $p<0$ dans (4.56) et (4.55) et que se déterminent les intervalles de variation éventuelle de $w=b/b^*$.

La seconde équation (4.51) permet d'établir les relations entre t et w sous les formes suivantes :

dans le cas de (4.54)

$$\tau=\frac{\nu(t+t^*)}{\lambda^{*2}}=\frac{(10\alpha_+-1)^2}{40\alpha_+}\int_w^\infty w^{-2}(1+w^\mu)^{-2}\,dw, \tag{4.57}$$

dans le cas de (4.55)

$$\tau=\frac{\nu(t+t^*)}{\lambda^{*2}}=\frac{(10\alpha_--1)^2}{40\alpha_-}\int_w^{w_0} w^{-2}(1-w^\mu)^{-2}\,dw \tag{4.58}$$

et pour $\alpha=0{,}1$

$$\tau=\frac{\nu(t+t^*)}{\lambda^*}=\int_w^{w_0} w^{-2}\,\mathrm{Log}^{-2}\,w\,dw. \tag{4.59}$$

Ici τ est le temps adimensionné et t^* la constante d'intégration ayant la dimension du temps. Dans les formules (4.58) et (4.59) la valeur de t^* dépend du choix de w_0. Pour fixer les idées on suppose que w_0 remplit la condition

$$\left.\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\tau=1}=\left.\frac{d\lambda}{d\tau}\right|_{\tau=1}=0,$$

c'est-à-dire que w_0 et $\tilde{w}$ sont définis par les équations

$$\int_{\tilde{w}}^{w_0} w^{-2}(1\pm w^\mu)^{-2}\,dw=\frac{40\alpha}{(10\alpha-1)^2}\quad\text{et}\quad\left|\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\tilde{w}}=\left|\frac{d\lambda}{dt}\right|_{\tilde{w}}=0,$$

ou par

$$\int_{\tilde{w}}^{w_0} w^{-2}\,\mathrm{Log}^{-2}\,w\,dw=1\quad\text{et}\quad\left|\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\tilde{w}}=\left|\frac{d\lambda}{dt}\right|_{\tilde{w}}=0.$$

On voit donc que les systèmes de solutions exactes envisagés dépendent de quatre paramètres constants $\alpha(\alpha_+$ ou α_- ou $\alpha=0{,}1)$, b^*, λ^* et t^* dont les trois derniers jouent le rôle de constantes d'échelle.

La famille de fonctions sans dimension

$$f\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad \frac{1}{p}h\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad \frac{b}{b^*}(\tau) \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau)$$

ne dépend que d'un seul paramètre adimensionné $\alpha(\alpha_+$ ou α_- ou $\alpha=0{,}1)$; ici $p=\pm\nu/\lambda^*\sqrt{b^*}$ d'après (4.53). Donc α est l'unique paramètre essentiel des solutions trouvées. Les fonctions $f(r/\lambda)$ et $h(r/\lambda)/p$ sont identiques pour les deux familles lorsque $\alpha_+=\alpha_-$, la distinction n'apparaissant que pour les fonctions

$$\frac{b}{b^*}(\tau, \alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau, \alpha).$$

Considérons encore les formules asymptotiques de b/b^* et λ/λ^* pour $\tau=\frac{\nu(t+t^*)}{\lambda^2}\to\infty$. Ces formules ont la même forme pour les deux familles :

pour $\alpha>0{,}1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda^*} &\simeq \frac{1}{\lambda^*}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}(t+t^*)}, \\ \frac{b}{b^*} &\simeq \left[\frac{(10\alpha-1)^2\lambda^{*2}}{4\nu(t+t^*)}\right]^{10\alpha}; \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

pour $\alpha<0{,}1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda^*} &\simeq \frac{1}{\lambda^*}\sqrt{10(t+t^*)\nu}, \\ \frac{b}{b^*} &\simeq \frac{(10\alpha-1)^2\lambda^{*2}}{40\alpha\nu(t+t^*)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

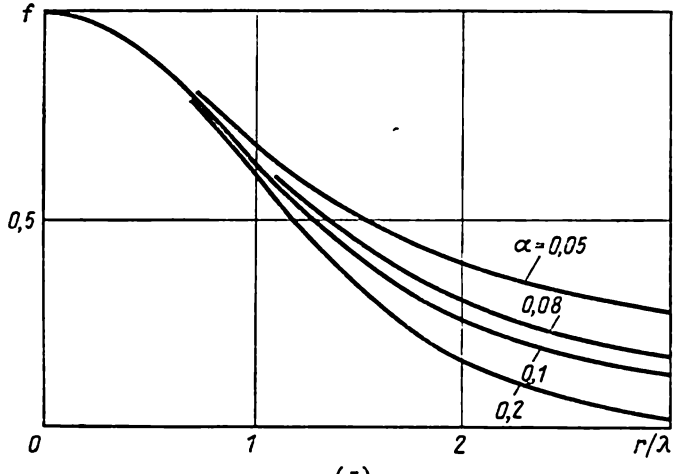


Fig. 23. Graphiques de la fonction $f\left(\frac{r}{\lambda}\right)$, formule (4.20), pour différents α

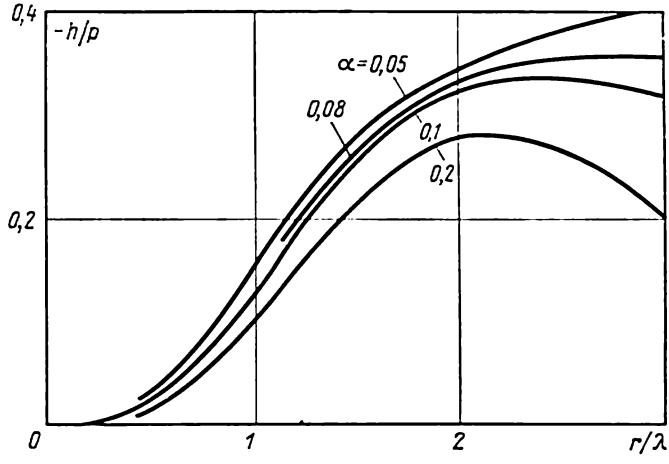


Fig. 24. Graphiques de la fonction $-\frac{1}{p}h\left(\frac{r}{\lambda}\right)$, formule (4.50), pour différents α

Les résultats du calcul d'après les formules exactes et asymptotiques pour $\alpha=0{,}05$; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2 sont groupés sur les figures 23-26. Pour α rationnels les intégrales des formules (4.55) et (4.54) se calculent en fonctions élémentaires. Sur les figures 25 et 26 sont représentées en pointillé, à l'échelle logarithmique, les droites correspondant aux lois asymptotiques pouvant être ramenées aux lois de puissances selon les formules (4.57) et (4.58). On voit qu'avec de grands $t\to\infty$ les lois de dégénérescence de la turbulence isotrope déduites [dans les hypothèses minimales fondées sur les égalités (4.29) et (4.30)] et les lois exactes tendent vers les lois de puissances. Dans la théorie développée ici cette circonstance est une conséquence et non pas une hypothèse de départ.

Il découle des formules (4.17) et (4.18) pour $\alpha>0{,}1$ que les lois asymptotiques (4.60) établies compte tenu des moments du troisième ordre sont les mêmes qu'au cas où l'on néglige ces derniers. Toutefois, si $\alpha<0{,}1$ (ce qu'on montre plus loin en calculant α à partir des données expérimentales), les lois asymptotiques (4.61) pour b/b^* diffèrent des lois (4.18) obtenues dans l'hypothèse que les moments du troisième ordre sont nuls ($p=0$).

Il a été montré par Kornéev dans l'ouvrage cité plus haut que l'application à la turbulence uniforme anisotrope des hypothèses du type (4.29) et (4.30) conduit aux mêmes lois de variation de $l(t)$ et $b(t)$ que celles établies ci-dessus.

Lorsque $\chi=r/l\to\infty$, les formules de f et de h (4.21) et (4.49) conduisent aux formules asymptotiques suivantes :

$$f=A\left(\frac{l}{r}\right)^{20\alpha}$$

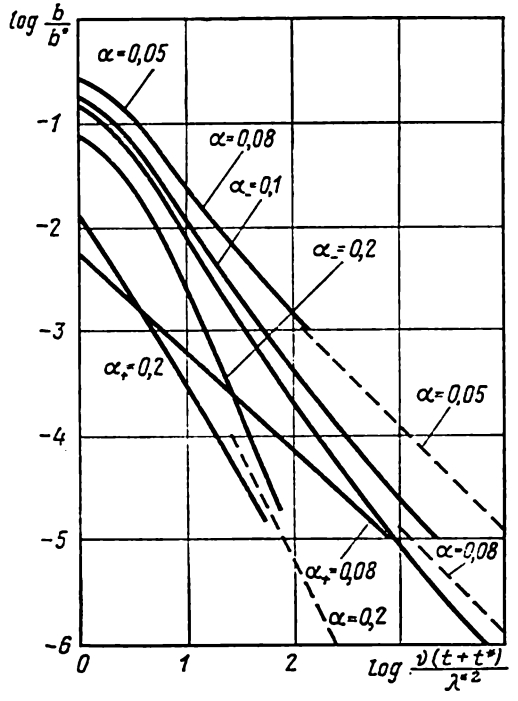


Fig. 25. Courbes théoriques de $\frac{b}{b^*}$ en fonction de t pour différents α

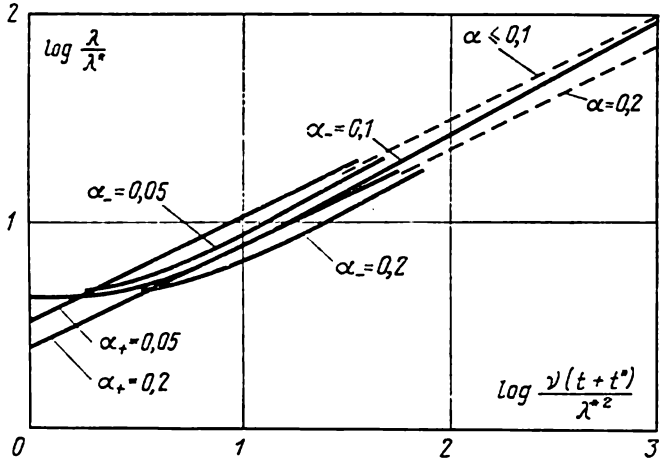


Fig. 26. Courbes théoriques de λ/λ^* en fonction de t pour différents α

et

$$h=\frac{2\alpha p}{4\alpha-1}A\left(\frac{l}{r}\right)^{20\alpha-1},$$

où

$$A=\frac{2^{30\alpha}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-10\alpha\right)},$$

et $\Gamma(z)$ est la fonction gamma d'Euler. C'est uniquement pour $\alpha>0{,}05$ qu'on a $h\to 0$ lorsque $r/l\to\infty$.

Il découle des formules asymptotiques de f et de h que les intégrales de ces fonctions par rapport à r de zéro à l'infini sont divergentes pour $\alpha\leq 0{,}1$. Notons que les transformations intégrales de Fourier des formules asymptotiques n'ont pas de sens pour les moments du second et du troisième ordre et, éventuellement, d'ordres supérieurs*). Les intégrales de Fourier tridimensionnelles correspondantes divergent pour $\alpha\leq 0{,}05$.

Les lois de décroissance lente pour $r\to\infty$ de divers moments, obtenues comme solutions exactes, sont tout à fait admissibles du point de vue physique.

En procédant à la vérification expérimentale de la théorie on prend comme exemple de turbulence isotrope l'écoulement de l'eau ou de l'air derrière des grilles bipériodiques à cellules carrées de dimension M à travers lesquelles s'écoule un flux perturbé animé d'une vitesse moyenne de translation $\bar{U}$ normale au plan médian de la grille. A strictement parler, ce flux turbulent n'est pas homogène dans la direction de la vitesse $\bar{U}$ et d'une façon générale ne l'est pas non plus dans les directions perpendiculaires à $\bar{U}$ à cause de l'influence des conditions aux frontières des sections droites, aux parois de la soufflerie ou sur les couches limites séparant le flux turbulent du milieu environnant. Les propriétés primitives du flux incident seraient également une source d'inhomogénéité et d'anisotropie du flux turbulent derrière la grille.

On voit donc que dans les conditions expérimentales réelles, les écoulements turbulents des fluides derrière la grille diffèrent sensiblement de ceux qu'on envisage dans la position théorique du problème, où l'écoulement turbulent est supposé homogène, isotrope et animant un fluide illimité. Naturellement, ces différences sont surtout sensibles au voisinage de la grille. Les données expérimentales montrent que pour des nombres de Reynolds $\mathbf{R}_M=UM/\nu\approx 10^3$ le flux est approximativement isotrope à des distances $x>20M$ de la grille et pour les coefficients de corrélation, étant donné le déphasage d'affaiblissements en x, seulement lorsque r/l ne sont pas trop grands, ce qui peut s'avérer de première importance pour les

*) Cette remarque ainsi que la remarque faite précédemment sur le comportement de l'« invariant » de Loïtsianski s'avère essentielle pour les théories de la turbulence fondées sur l'application de la transformation de Fourier.

moments d'ordre trois et plus élevé. En particulier, il a été établi expérimentalement*) que dans certains cas la turbulence dégénérée derrière la grille ne manifeste aucune tendance à devenir isotrope. Ainsi par exemple, dans les expériences citées le rapport des valeurs moyennes des carrées des pulsations longitudinales aux valeurs moyennes des pulsations transversales de la vitesse diffère de l'unité et s'élève à $1{,}3 \pm 0{,}2$.

Il convient d'ajouter à ce qui a été dit précédemment sur les propriétés internes des flux turbulents que les mesures effectuées dans les expériences étaient entachées d'erreurs inévitables, en particulier, à cause des perturbations que les capteurs de mesure introduisaient dans les flux étudiés. Il va de soi que les sources mentionnées de discordances possibles entre la théorie et l'expérience doivent être prises en considération lorsqu'on compare les résultats.

Une première approche porterait à croire qu'on peut se contenter d'une correspondance qualitative entre la théorie et l'expérience. Or, on montrera plus loin que la théorie développée précédemment permet une description quantitative très satisfaisante des résultats expérimentaux, ceci grâce au fait que les hypothèses de base et les lois théoriques obtenues sont applicables non seulement à l'exemple particulier choisi de la turbulence homogène isotrope, mais également à des cas plus généraux**).

Une confrontation détaillée de la théorie avec les expériences est faite dans l'ouvrage cité de A. Kornéev où sont traitées toutes les données expérimentales publiées jusqu'à 1974. Nous nous bornerons à comparer la théorie avec quelques expériences seulement, en donnant à l'appui les graphiques caractéristiques.

Considérons une série d'expériences faites par S. C. Ling, T. T. Huang et C. A. Wan portant sur la dégénérescence des écoulements turbulents de l'eau derrière les grilles immobiles et vibrantes***). Les grilles immobiles avaient les cellules carrées de côté M formées de tiges rondes de diamètre d avec $M/d=2{,}8$, $M=3{,}56$ cm (grille A); $M/d=2{,}8$, $M=1{,}78$ cm (grille B) et $M/d=5$ (grille C). La grille vibrante représentait une rangée de tiges rondes oscillant autour de leurs axes et dont étaient solidaires des plaques (voir fig. 27). La vitesse maximale V_p des extrémités des plaques oscillant ensemble avec les tiges était plus grande de 3 fois dans un cas et de 17 fois dans l'autre que la vitesse de translation moyenne de l'eau derrière la grille. On a obtenu, dans ces expériences, un bon nivellement omnidirectionnel des valeurs moyennes des carrés des composantes des vitesses des pulsations. Les différences ne dépassaient pas 5 %.

Dans le tableau ci-joint sont rassemblées les données des expériences et des calculs des constantes d'échelle t^*, b^* et λ^*. Les écarts quadratiques moyens entre les données expérimentales sur $b(t)$ et $\lambda(t)$ et leurs valeurs

*) G. Compte-Bellot, S. Corrsin. J. Fluid Mech., v. 25, n° 4, 1966.
G. Batchelor, R. Stewart. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 3, n° 1, 1950.
**) Voir la thèse et l'ouvrage cité de A. Kornéev.
***) S. C. Ling, T. T. Huang. Phys. Fluids, v. 13, n° 12, 1970.
S. C. Ling, C. A. Wan. Phys. Fluids, v. 15, n° 8, 1972.

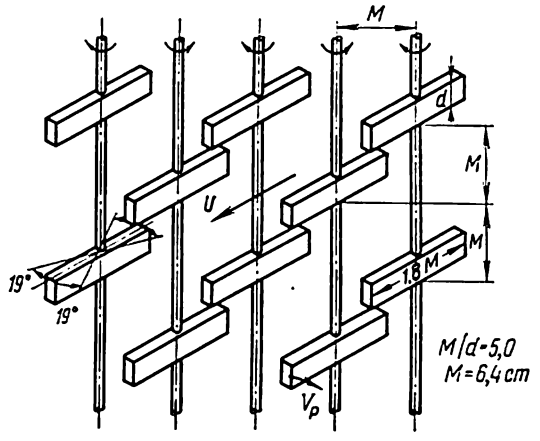


Fig. 27. Grille à plaques vibrantes utilisée comme générateur de tourbillons dans les expériences de S. C. Ling et C. A. Wan (1972)

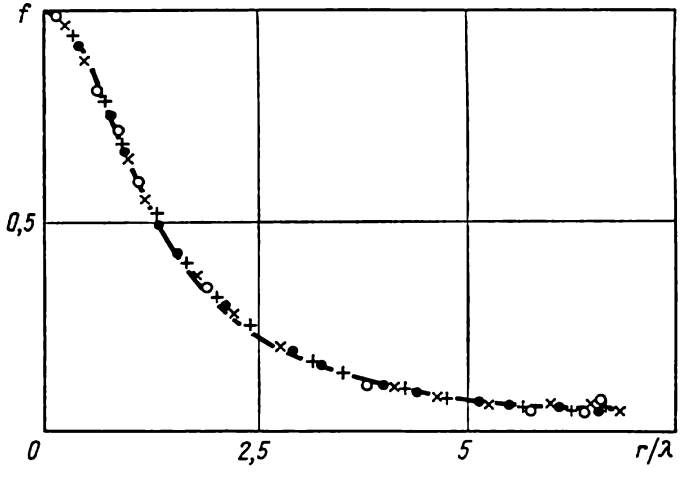


Fig. 28. Comparaison de la courbe théorique de f en fonction de $\frac{r}{\lambda}$ pour $\alpha_- = 0{,}08$ (courbe en trait continu) avec les données expérimentales de S. C. Ling, T. T. Huang et C. A. Wan (les symboles employés sont donnés au tableau)

théoriques sont désignés par ε_b et ε_λ. Dans tous les cas les courbes théoriques (courbes pleines des figures 28, 29, 30) répondent à la même valeur universelle $\alpha_- = 0{,}08$.

L'analyse de ces graphiques montre que la théorie concorde pleinement avec les expériences. De toute évidence, la loi $b_d^d/b = f(r/\lambda)$ traduit la propriété

d'autosimilitude et coïncide quantitativement avec la formule théorique (4.48) pour $\alpha_- = 0{,}08$.

Les écoulements turbulents de l'air soufflé à travers les grilles dans les expériences de Batchelor et Townsend*) peuvent également être fort bien décrits par la loi $f(r/\lambda)$, avec cette particularité que le paramètre α diminue de $\alpha = 0{,}2$ à $\alpha = 0{,}05$ pour les nombres de Reynolds $\mathbf{R}_M$ variant entre 650 et 5620, et que les solutions correspondantes passent de la famille α_+ à la famille α_-.

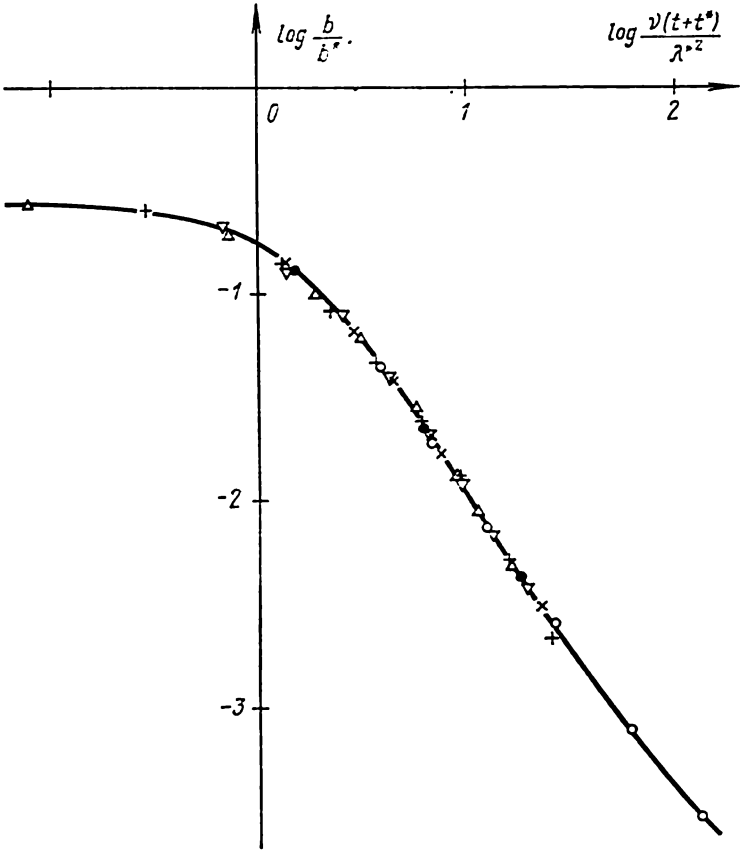


Fig. 29. Comparaison de la courbe théorique de $\frac{b}{b^*}$ en fonction du temps pour $\alpha_- = 0{,}08$ (courbe en trait continu) avec les données expérimentales de S. C. Ling, T. T. Huang et. C. A. Wan (les symboles employés figurent au tableau)

*) G. K. Batchelor, A. A. Townsend, Proc. Roy. Soc., A 193, n° 1035, 1948; A 194, n° 1039, 1948.

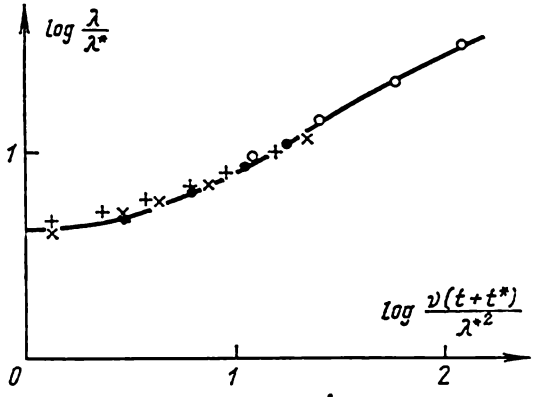


Fig. 30. Comparaison de la courbe théorique de $\frac{\lambda}{\lambda^*}$ en fonction du temps pour $\alpha_- = 0{,}08$ (courbe en trait plein) avec les données expérimentales de S. C. Ling, T. T. Huang et C. A. Wan (les symboles employés figurent au tableau)

Tableau

Type de grille / Caractéristique	Immobiles				Vibrantes	
	A	B	C	$A+B$ *)	$\frac{V_p}{U}=3$	$\frac{V_p}{U}=17$
R_M	940	470	840	—	2000	2000
M/d	2,8	2,8	5	—	5	5
U, cm/s	2,9	2,9	2,9	2,9	3,14	3,14
M, cm	3,56	1,78	3,18	—	6,4	6,4
t^*, s	−22,2	−17,9	−11,8	−19,7	−5,9	1,25
U^2/b^*	15,9	20	84,7	29,4	33,3	0,445
λ^{*2}/ν, s	14,3	10,9	6,97	17,1	8,12	1,57
ε_b, %	4,5	8	1	3,6	1	2
ε_λ, %	—	9	6	—	2,5	3,8
Symboles employés pour désigner les points expérimentaux sur les figures 28 à 30	∇	+	×	⊿	●	○

*) La grille A se situe devant la grille B à une distance de 30 cm; le temps est compté à partir de la grille A.

Sur les figures 29 et 30 sont donnés les courbes théoriques et les points expérimentaux pour les fonctions $\frac{b}{b^*}(\tau)$ et $\frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau)$ tirés des expériences de Ling, Huang et Wan. Ces graphiques montrent également un bon accord de la théorie avec l'expérience. Pour de grands t ces lois deviennent des lois de puissances (lois linéaires à l'échelle logarithmique). Si l'on utilise au lieu de la constante d'échelle t^*, introduite précédemment, une autre valeur convenable t_0, les courbes correspondantes des figures 29 et 30 tendront plus rapidement vers les droites asymptotiques.

En ce qui concerne la concordance des données d'expériences avec les fonctions théoriques du coefficient de corrélation h et la constante p répondant aux moments d'ordre trois, elle ne suscite aucun doute sérieux en cas de turbulence homogène isotrope dès que les lois pour $f\left(\frac{r}{\lambda}\right)$, $\frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau)$ et $\frac{b}{b^*}(\tau)$ établies précédemment concordent avec données expérimentales; pour peu qu'on soit certain que l'équation de Kármán et Howarth peut servir de base à une théorie décrivant la turbulence homogène isotrope, il est aisé de déduire les formules (4.30) et (4.53) de l'équation de Kármán et Howarth et des lois obtenues pour $f\left(\frac{r}{\lambda}\right)$, $\frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau)$ et $\frac{b}{b^*}(\tau)$. Les publications sur les mesures des moments du troisième ordre sont peu nombreuses. Beaucoup d'auteurs n'ont point procédé à ces mesures; d'autres auteurs, Ling et Huang en particulier, ne publient pas les résultats de leurs expériences, ne les considérant pas comme sûrs. Car les moments d'ordre trois et d'ordres supérieurs sont plus sensibles aux perturbations de l'homogénéité et de l'isotropie du flux turbulent ayant lieu dans les expériences que ne le sont les moments du second ordre. Seuls R. W. Stewart et A. A. Townsend ont publié*) en 1951 les résultats des mesures indirectes de la grandeur $h(r, t)$ (depuis on n'a pas publié d'autres mesures systématiques de h).

Les résultats de R. W. Stewart et A. A. Townsend concordent bien qualitativement, et pour de petits r quantitativement, avec la loi universelle automodèle de la forme $\frac{1}{p}\, h\left(\frac{r}{\lambda}\right)$. De plus, il est remarquable que la valeur correspondante de λ se détermine à partir des données expérimentales sur la fonction $f(r/\lambda)$ et, d'après (4.53), la constante $p = \pm v/\lambda^*\sqrt{b^*}$ se calcule à l'aide des lois régissant $l(w)$ et $b(t)$. Pour de grands r/λ les données expérimentales fournies par les auteurs s'écartent généralement un peu de la loi automodèle. On a énuméré plus haut les causes éventuelles de ces discordances.

On ne possède pas encore de données expérimentales tant soit peu systématisées sur la mesure des moments de l'ordre supérieur à trois. On peut imaginer une étude théorique des moments d'ordre supérieur en admettant l'isotropie uniquement pour les moments du second et du troisième ordre (voir la note au bas de la page 122) ainsi qu'en posant le

*) R. W. Stewart, A. A. Townsend, Phys. Trans. Roy. Soc., A 243, n° 867, 1951.

problème de manière plus restreinte dans l'hypothèse de l'isotropie pour les moments d'ordre supérieur. On peut adopter les hypothèses automodèles (4.29) et (4.30) uniquement pour les moments du second et du troisième ordre et considérer l'équation obtenue précédemment.

Pour aborder des problèmes liés à la détermination des moments d'ordre supérieur à trois et en éliminer l'arbitraire il faut obligatoirement introduire des hypothèses supplémentaires. Car une fois les moments du second et du troisième ordre fixés, on peut calculer les moments d'ordres supérieurs à partir des équations correspondantes aux dérivées partielles compte tenu des hypothèses supplémentaires. En s'appuyant sur la solution obtenue pour les moments du second et du troisième ordre, il est possible de développer des théories fondées sur diverses hypothèses (conditions) pour la description des écoulements turbulents des fluides ne se distinguant les uns des autres que par le comportement des moments d'ordres supérieurs. En particulier, on peut appliquer des hypothèses automodèles semblables à celles de (4.29) et (4.30), toutefois on peut se passer de ce genre d'hypothèses*).

§ 5. Ecoulements turbulents stationnaires

Dans nombre de cas, notamment dans celui de l'écoulement dans les tubes et canaux, l'on se trouve en présence d'écoulements turbulents pour lesquels l'écoulement moyen est stationnaire; ces flux sont dits flux turbulents stationnaires.

Considérons le problème de l'écoulement turbulent stationnaire d'un fluide incompressible dans un tube lisse cylindrique circulaire indéfini immobile.

Supposons que l'écoulement moyen possède la symétrie axiale et que les vitesses moyennes sont dirigées le long de l'axe du tube. Il découle de l'équation d'incompressibilité que les vitesses moyennes ne dépendent pas de la coordonnée x le long de l'axe du tube : dans la section du tube la vitesse moyenne est variable, étant fonction de la distance r du point considéré au centre du tube.

On voit sans peine que les caractéristiques de l'écoulement moyen peuvent être définies par le système de paramètres suivant :

$$\varrho,\ \mu,\ a,\ \tau_0=-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}a,\quad r=a-y, \tag{5.1}$$

où a est le rayon du tube, $\partial\bar{p}/\partial x$ la valeur moyenne du gradient de pression le long du tube et τ_0 la contrainte de frottement sur les parois du tube. Toutes les grandeurs adimensionnées sont fonctions des deux paramètres

$$\mathrm{R}=\frac{v_* a\varrho}{\mu},\quad \frac{r}{a}=1-\frac{y}{a}, \tag{5.2}$$

où $v_*=\sqrt{\tau_0/\varrho}$ représente la vitesse dite de contrainte tangentielle de frottement sur les parois du tube. Les grandeurs adimensionnées caractérisant

*) Voir à ce sujet l'article de A. Kornéev dans « Prikladnaja matematika i mekhanika », op. 3, 1975.

les propriétés de l'écoulement dans l'ensemble ne dépendent pas de la variable r et, par conséquent, ne sont définies que par le nombre de Reynolds.

Désignons par u la vitesse de l'écoulement moyen et par u_{max} la vitesse le long de l'axe du tube. La théorie dimensionnelle donne

$$\frac{u_{max}}{v_*} = f(\mathrm{R}) \tag{5.3}$$

et

$$\frac{u_{max} - u}{v_*} = F\left(\mathrm{R}, \frac{(a-y)}{a}\right). \tag{5.4}$$

La quantité $u_{max} - u$, appelée défaut de vitesse, caractérise la distribution de la vitesse le long de la section du tube par rapport à l'écoulement au centre du tube.

Dans ce qui suit il sera question des écoulements nettement turbulents, ceux qui correspondent aux grands nombres de Reynolds.

La distribution des vitesses dans le tube est intimement liée au phénomène du mélange turbulent au cours duquel les couches fluides voisines échangent de quantités de mouvement. Le nivellement des vitesses occasionné par le transfert des quantités de mouvement est dû à l'inertie du fluide.

D'après la théorie cinétique de la matière, la viscosité serait due à l'agitation thermique des molécules favorisant le nivellement des vitesses de l'écoulement observé et occasionnant la transformation de l'énergie cinétique de ce dernier en énergie de l'agitation thermique.

Selon la loi de conservation de l'énergie la somme de l'énergie mécanique du mouvement observé et de l'énergie du mouvement des molécules est constante. Les deux espèces d'énergie peuvent être considérées comme les diverses composantes de l'énergie mécanique. Si l'on laisse de côté les forces intermoléculaires, la viscosité pourrait se définir par les caractéristiques cinématiques moyennes de la configuration du mouvement moléculaire et par l'inertie des molécules fluides.

Le mélange turbulent désordonné et l'écoulement moyen sont dans le même rapport que le mouvement moléculaire et le mouvement turbulent vrai. Les pulsations turbulentes sont analogues aux pulsations de l'agitation moléculaire désordonnée, seulement les valeurs moyennes caractérisant les mouvements de pulsation diffèrent. Dans un mélange turbulent on a non pas un mouvement de molécules isolées lié à un processus thermique mais un mouvement de pulsation des « moles », volumes de fluide très grands par rapport aux dimensions et masses des molécules. En outre, les vitesses moyennes de pulsations dans un écoulement turbulent sont très faibles comparées à celles de l'agitation thermique.

Lors d'un écoulement turbulent, on peut considérer la transformation de l'énergie d'écoulement moyen en énergie d'écoulement molaire turbulent. Dans ce sens on pourrait parler d'une dissipation de l'énergie d'écoulement moyen, dissipation qui n'est pas liée directement à la transformation de l'énergie mécanique en chaleur et donc est indépendante de la viscosité du fluide. La redistribution de l'énergie cinétique entre l'écoulement moyen

observé et le mouvement de pulsation peut être également envisagée dans un fluide parfait. Comme on sait, la transformation de l'énergie mécanique en chaleur est impossible dans le cas d'un fluide parfait incompressible. Par conséquent, la transformation de l'énergie d'écoulement moyen en énergie d'écoulement turbulent molaire de pulsation serait due essentiellement à la propriété d'inertie.

L'écoulement dans un tube s'accompagne d'une perte de l'énergie mécanique et par conséquent il doit y avoir des domaines où l'influence de la viscosité est importante. Etant donné l'adhérence du fluide aux parois du tube, les vitesses instantanée et moyenne du fluide sont nulles aux parois. Pour cette raison il n'y a pas de mélange intense du fluide au voisinage immédiat des parois du tube. Ce qui implique qu'au voisinage immédiat des parois lisses la brusque variation de la vitesse serait due à la viscosité du fluide et qu'il y aurait une couche à écoulement laminaire. Ce qui est confirmé de manière satisfaisante par les données expérimentales.

Supposons qu'au cœur du flux turbulent, au voisinage de l'axe du tube, le nivellement des vitesses est occasionné par le mélange molaire du fluide, la viscosité du fluide y jouant un rôle secondaire, non essentiel. Désignons par δ l'épaisseur de la couche fluide au voisinage des parois, couche dans laquelle on ne peut en aucune manière négliger la viscosité. La quantité δ serait approximativement égale à l'épaisseur de la couche laminaire au voisinage des parois du tube. Pour $y > \delta$ la viscosité est non essentielle par hypothèse et, donc, dans la formule (5.4), pour $y > \delta$, le nombre de Reynolds est non essentiel, c'est-à-dire

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = F\left(\frac{a-y}{a}\right). \tag{5.5}$$

L'égalité (5.5) révèle l'existence d'une loi universelle régissant la distribution des vitesses dans les tubes.

Les mesures expérimentales de la distribution des vitesses des écoulements turbulents dans les tubes effectuées avec différents nombres de Reynolds confirment l'existence de la loi universelle indépendante du nombre de Reynolds (fig. 31). Dès 1858, Darcy*) proposa la formule empirique

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = 5{,}08\left(1 - \frac{y}{a}\right)^{3/2}. \tag{5.6}$$

La représentation graphique des résultats expérimentaux de mesure de la quantité $(u_{\max} - u)/v_*$ en fonction de y/a est également donnée dans les travaux de Stanton**), Fritsch***) et Nikuradse****). Ces auteurs ont révélé l'existence d'une loi universelle régissant la distribution des vitesses dans la partie centrale des tubes lisses et rugueux, indépendamment de la rugosité,

*) H. Darcy, *Mémoires de divers savants étrangers*, t. 15, 1858.
**) Th. Stanton, Proc. Roy. Soc. (A), t. 85, 1911.
***) W. Fritsch, ZAMM, Bd. 8, 1928, et Aachener Abhand., VIII, 1928.
****) J. Nikuradse, Proc. of the third Intern. Congress, 1930.

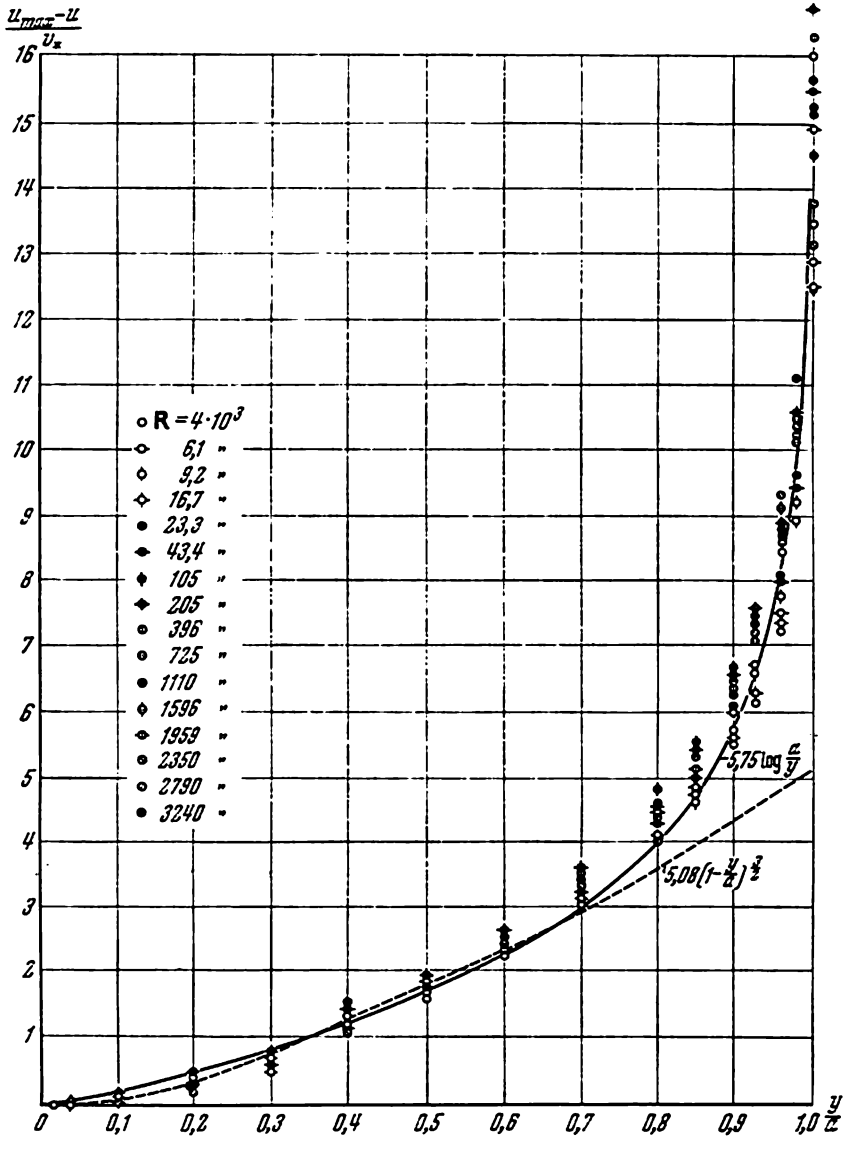


Fig. 31. Vérification expérimentale de la loi universelle de distribution des vitesses au voisinage de l'axe du tube

bien que la résistance ainsi que le rapport u_{max}/v_*, etc. dépendent essentiellement du nombre de Reynolds et de la rugosité.

Nous sommes arrivés à la conclusion sur la validité de la loi (5.5) par l'analyse dimensionnelle, en négligeant la viscosité pour l'écoulement relatif le long de l'axe du tube. Cette explication est donnée dans les ouvrages de Prandtl et de Kármán.

Proposons-nous maintenant d'étudier le problème consistant à déterminer la forme de la fonction donnant la loi de distribution des vitesses dans la section droite d'un tube lors d'écoulement turbulent. Prenant les grands nombres de Reynolds, ce qui revient à se donner de grands rayons a pour v_* et μ/ϱ fixes, considérons le cas limite où $a \to +\infty$. On a donc à envisager le problème de l'écoulement turbulent dans le demi-espace $y>0$ limité par le plan $y=0$.

Le système de paramètres caractéristiques est le suivant :

$$\varrho,\ \mu,\ \tau_0,\ y.$$

La distribution des vitesses moyennes peut être décrite par la formule

$$\frac{u}{v_*}=\varphi(\eta), \quad \text{où} \quad \eta=\frac{v_*\varrho y}{\mu}. \tag{5.7}$$

Dans le cas d'un écoulement laminaire la forme de la fonction $\varphi(\eta)$ est facilement établie théoriquement. En effet, lors d'un écoulement laminaire dans un tube cylindrique tous les éléments fluides sont animés d'un mouvement rectiligne et uniforme et la propriété de l'inertie est non essentielle, donc la distribution des vitesses ne doit pas dépendre de la valeur ϱ. Les paramètres de définition étant τ_0, μ et y, la théorie dimensionnelle donne

$$u=k\tau_0\frac{y}{\mu}=k\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\,\frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\,\varrho y}{\mu},$$

où k est une constante adimensionnée. En composant la relation

$$\tau_0=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

on obtient $k=1$. Ainsi donc, un écoulement laminaire vérifie la formule

$$\varphi(\eta)=\eta. \tag{5.8}$$

Si on admet que dans le cas général d'un écoulement turbulent il existe une couche laminaire au voisinage de la paroi, la fonction (5.8) définira la forme de la fonction $\varphi(\eta)$ au voisinage immédiat de la paroi.

Pour un écoulement turbulent la fonction $\varphi(\eta)$ peut être déterminée expérimentalement. Mais les mesures dans les tubes de rayon fini font intervenir, outre le paramètre η, le nombre de Reynolds $\mathbf{R}=v_*\varrho a/\mu$.

Dans l'étude de la distribution des vitesses dans un écoulement turbulent un grand rôle revient aux monômes de puissance empiriques de la forme

$$\frac{u}{v_*}=A\eta^n, \tag{5.9}$$

où A et n sont des constantes. On détermine ces dernières soit en mesurant directement la distribution des vitesses, soit en établissant expérimentalement la loi que suit la résistance du tube. Pour mieux comprendre le dernier procédé exprimons la résistance du tube en fonction de la loi de distribution des vitesses suivant le rayon du tube.

Le coefficient de résistance d'un tube rond est donné par l'égalité

$$\psi=\frac{(p_1-p_2)a}{l\cdot\varrho\dfrac{u^2}{2}}=\frac{4\tau_0}{\varrho\overline{u^2}}=4\left(\frac{v_*}{\bar{u}}\right)^2, \tag{5.10}$$

où

$$\bar{u}=\frac{Q}{\pi a^2};$$

$\bar{u}$ étant la vitesse moyenne dans la section du tube; Q le débit volumique du fluide. En général la distribution des vitesses suivant le rayon du tube vérifie la relation de la forme

$$\frac{u}{v_*}=\varphi\left(\mathbf{R}_1=\frac{\varrho a\bar{u}}{\mu},\ \frac{\varrho v_* y}{\mu}\right).$$

En procédant à la mise en moyenne sur la section du tube on obtient

$$\frac{\bar{u}}{v_*}=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \varphi\cdot 2\pi(a-y)\,dy=2\int_0^1 \varphi\left(\mathbf{R}_1,\ \frac{v_*}{\bar{u}}\,\mathbf{R}_1\lambda\right)(1-\lambda)\,d\lambda. \tag{5.11}$$

En explicitant cette équation par rapport à $v_*/\bar{u}$ on trouve ψ en fonction de $\mathbf{R}_1$.

On voit sans difficulté que si la loi de distribution des vitesses est donnée par la formule (5.9) et si A et n sont indépendants du nombre de Reynolds $\mathbf{R}_1$, le coefficient ψ a pour expression

$$\psi=\frac{a}{\mathbf{R}_1^m}, \tag{5.12}$$

où a et m sont des constantes. En effet, en portant

$$\varphi=A\left(\frac{\varrho v_* y}{\mu}\right)^n=A\cdot\mathbf{R}_1^n\left(\frac{v_*}{\bar{u}}\right)^n\lambda^n$$

dans les relations (5.11) on trouve

$$\frac{\bar{u}}{v_*}=\frac{2A}{(n+1)(n+2)}\mathbf{R}_1^n\left(\frac{v_*}{\bar{u}}\right)^n,$$

d'où l'on détermine $v_*/\bar{u}$ que l'on substitue dans (5.10) pour trouver

$$\psi=4\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2A}\right]^{\frac{2}{n+1}}\frac{1}{\mathbf{R}_1^{\frac{2n}{n+1}}}. \tag{5.13}$$

En confrontant les formules (5.12) et (5.13) on dégage des relations simples entre les constantes m et n et les constantes a, A et n.

La formule empirique de Blasius donnant la résistance des tubes cylindriques lisses s'écrit

$$\psi=\frac{0{,}132}{\mathbf{R}_1^{1/4}}. \tag{5.14}$$

Si on adopte pour loi de distribution des vitesses la loi de puissance, la formule de Blasius (5.14) conduit à « la loi d'un septième »,

$$\frac{u}{v_*}=8{,}7\left(\frac{v_*\varrho y}{\mu}\right)^{1/7}. \tag{5.15}$$

Les formules (5.14) et (5.15) sont en accord avec l'expérience pour les nombres de Reynolds $2\mathbf{R}_1$ dans l'intervalle de 10^4 à 10^5; pour les valeurs inférieures à 10^4 il vaut mieux utiliser la formule (5.9) avec $n=\frac{1}{6}$. Pour les $2\mathbf{R}_1>10^5$ l'exposant doit diminuer.

Les résultats expérimentaux (fig. 32) montrent que la formule empirique de la forme

$$\frac{u}{v_*}=\varphi(\eta)=5{,}75\log\eta+5{,}5 \tag{5.16}$$

est en meilleur accord avec l'expérience.

Les formules (5.9) et (5.16) cessent de jouer au voisinage immédiat des parois où $\eta=0$. Au voisinage des parois il y a une couche laminaire pour laquelle $\varphi(\eta)=\eta$. Si l'on admet que la couche laminaire est contiguë au flux turbulent et si l'on stipule qu'il y a un passage continu des vitesses des éléments fluides à la frontière de la couche laminaire aux distributions des

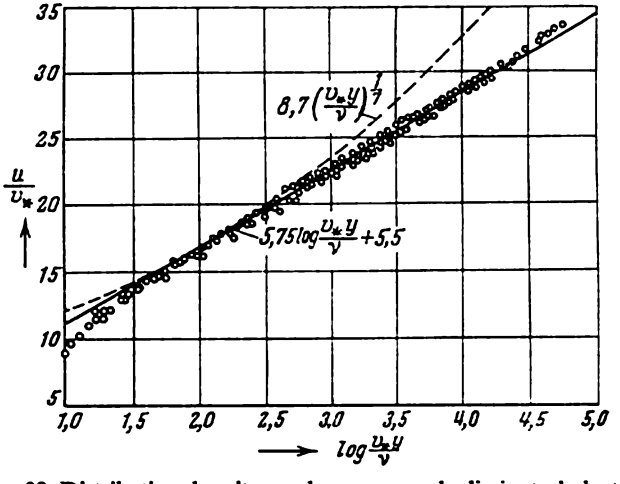


Fig. 32. Distribution des vitesses dans une couche limite turbulente

vitesses propres à l'écoulement turbulent, définies par les formules (5.15) et (5.16), l'on est en mesure de déterminer l'épaisseur de la couche laminaire soit à partir de l'équation

$$\eta = 5{,}75 \log \eta + 5{,}5,$$

soit à partir de l'équation

$$\eta = 8{,}7\eta^{1/7}.$$

La résolution de ces équations aboutit à la valeur η voisine de $\eta \approx 12$. En posant $\eta = 12$ on obtient la formule de l'épaisseur de la couche laminaire

$$\frac{\delta}{a} = 12\frac{\mu}{\varrho v_* a} = \frac{24}{\mathrm{R}_1\sqrt{\psi}}. \tag{5.17}$$

En posant $\mathrm{R}_1 = 40\,000$ et en se servant de la formule de Blasius on obtient

$$\frac{\delta}{a} = \frac{68}{\mathrm{R}_1^{7/8}} = 0{,}0065.$$

D'où on peut conclure que l'épaisseur de la couche laminaire est faible devant le rayon du tube a.

Abordons maintenant les considérations théoriques de Prandtl et de Kármán concernant la détermination de la forme de la fonction $\varphi(\eta)$. Désignons par u' et v' les projections sur les axes x et y de la vitesse des pulsations turbulentes. La valeur moyenne de la quantité de mouvement fluide transférée le long de l'axe y et rapportée à l'unité de temps et de surface se traduit par la formule $\tau = \varrho\overline{u'v'}$. En appliquant le théorème de la variation de la quantité de mouvement au volume fluide enfermé dans un cylindre rond de rayon r coaxial au tube (fig. 33), on obtient après la mise en moyenne

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = \tau \cdot 2\pi r L + \mu \frac{d\bar{u}}{dy} 2\pi r L.$$

D'où, en utilisant la relation $(p_1 - p_2)a = 2\tau_0 L$, on trouve

$$\tau + \mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_0\left(1 - \frac{y}{a}\right). \tag{5.18}$$

Dans un écoulement laminaire $\tau = 0$ et on a l'écoulement de Poiseuille. Ce cas

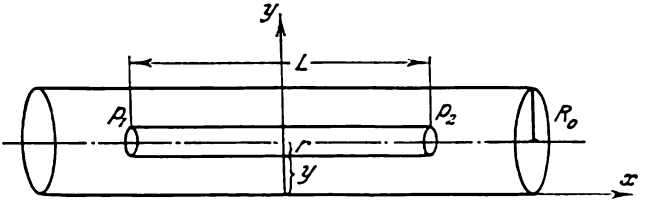


Fig. 33. Calcul de l'écoulement turbulent dans un tube cylindrique circulaire

correspond à la carte parabolique de distribution des vitesses. Dans un écoulement turbulent, il y a pour $y=0$ une couche laminaire au voisinage immédiat des parois, où $\tau=0$ et $y/a\approx 0$ si bien que l'équation (5.18) se ramène à la relation

$$\mu\frac{d\bar{u}}{dy}=\tau_0,$$

d'où

$$\bar{u}=\frac{\tau_0 y}{\mu} \quad \text{ou} \quad \frac{\bar{u}}{v_*}=\frac{\varrho v_* y}{\mu},$$

ce qui coïncide avec la formule (5.8).

Du point de vue de la théorie cinétique des gaz la contrainte tangentielle du frottement visqueux $\mu\, d\bar{u}/dy$ peut être considérée comme la valeur moyenne de la quantité de mouvement transférée, rapportée à l'unité de temps et de surface et occasionnée par l'agitation thermique désordonnée des molécules isolées. Dans ce sens les deux termes du premier membre de l'équation (5.18) sont de la même nature.

Dans le domaine de la turbulence très prononcée $\tau\neq 0$ et est grand comparé à $\mu\, d\bar{u}/dy$ de sorte que l'on peut se permettre de négliger le terme $\mu\, d\bar{u}/dy$ par rapport à τ.

La détermination de τ en fonction des caractéristiques de l'écoulement moyen se ramène à la détermination de la quantité l ayant la dimension de longueur et liée à τ par la relation

$$\tau=\varrho l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|\frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{5.19}$$

Une analyse plus détaillée du mécanisme de mélange turbulent qui fait appel à certaines suppositions intuitives permet de considérer la longueur l comme une grandeur analogue au libre parcours des molécules gazeuses en agitation thermique*). D'où son nom de « parcours de mélange ».

Le passage de τ à l est justifié par le caractère plus évident de l. Si la viscosité ne joue pas, τ dépend du carré de la vitesse et l n'en dépend pas, ce qui permet d'avancer des hypothèses intuitives concernant l'établissement des relations de l avec les dimensions caractéristiques. Une analyse plus poussée montre que l diminue à mesure qu'on s'approche de la paroi et qu'il est possible de lier la quantité l au voisinage des parois avec les caractéristiques de la rugosité.

Pour $a=\infty$ on peut admettre que le « parcours de mélange » se définit par les paramètres ϱ, μ, v_* et y; donc on a dans ce cas la formule

$$l=y\cdot\Phi\left(\frac{\varrho v_* y}{\mu}\right).$$

*) Pour plus de détail voir l'article de L. Prandtl, *The mecanics of viscous fluids* in *Aerodynamic theory. A general review of progress*, W. F. Durand, ed. in chief, Berlin, Springler, 1935, vol. 3, Div. G.

Supposons non essentielle la viscosité pour un certain choix de l'origine des y. Il découle de cette hypothèse que

$$l = ky,$$

où k est une constante sans dimension. En négligeant les termes $\mu\, du/dy$ et $y/a \approx 0$ dans l'équation (5.18) on a

$$\tau = \tau_0 = \varrho k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2.$$

En intégrant cette équation on trouve

$$u = \left(\frac{v_*}{k}\right) [\operatorname{Log} y - \operatorname{Log} y_0]. \tag{5.20}$$

Sur l'axe de similitude pour $y=0$ on a $u=-\infty$. La constante d'intégration y_0 est la distance séparant le point où $u=0$ de l'axe de similitude. Au voisinage immédiat de la paroi il existe une couche laminaire contiguë à l'écoulement turbulent; si l'on prolonge l'écoulement turbulent jusqu'à la paroi où se remplit la condition $u=0$, on trouve que y_0 est égal à la distance de la paroi à l'axe de similitude; y_0 étant défini par les quantités ϱ, μ et v_*, il vient

$$y_0 = \beta \frac{\mu}{\varrho v_*},$$

où β est une constante sans dimension.

Dans un écoulement fortement turbulent la valeur y_0 est petite. En substituant la valeur obtenue de y_0 dans la formule (5.20) on aura

$$u = \frac{v_*}{k} (\operatorname{Log} \eta - \operatorname{Log} \beta). \tag{5.21}$$

Dans le domaine de l'écoulement turbulent la formule (5.21) peut être considérée comme une justification théorique de la formule empirique (5.16). Les constantes k et β doivent être tirées de l'expérience. A mesure qu'on augmente le nombre de Reynolds les hypothèses servant à établir la formule (5.21) deviennent plus exactes. Ce qui permet de conclure que la formule (5.16) concordera bien avec la réalité pour les nombres de Reynolds croissants.

En supposant que la loi logarithmique de distribution des vitesses (5.21) d'un écoulement turbulent dans un tube rond est valable jusqu'à l'axe du tube, on obtient la formule

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = F\left(\frac{y}{a}\right) = 5{,}75 \log \frac{a}{y}$$

confirmée par les données expérimentales tant pour les tubes lisses que pour les tubes rugueux; ce dernier cas s'explique par le fait que l'influence de la rugosité peut être ramenée à la modification de la valeur y_0 qui s'élimine lors de la déduction de cette formule*).

*) Voir la note à la page 161.

Arrêtons-nous encore sur quelques considérations de similitude suggérées par la théorie dimensionnelle que l'on peut appliquer au problème de l'écoulement turbulent envisagé.

Soient v_x, v_y les projections de la vitesse de l'écoulement instantané et u' et v' les projections de la vitesse des pulsations. Dans le problème étudié de l'écoulement moyen rectiligne on a

$$v_x = u + u', \; v_y = v'.$$

Considérons le champ des vitesses de l'écoulement relatif défini par les projections $u + u' - u_M$, v', où u_M est la vitesse moyenne en un point M arbitraire.

L'hypothèse de base de Kármán consiste à supposer que les champs turbulents des vitesses de l'écoulement relatif sont cinématiquement semblables en différents points du flux. En procédant à la mise en moyenne on s'aperçoit que le champ des vitesses moyennes relatives $[u(y) - u_M, 0]$ est également cinématiquement semblable en différents points du flux.

Il est aisé de calculer comment changent toutes les valeurs cinématiques lorsqu'on passe d'un point à l'autre au moyen des échelles de passage pour deux grandeurs cinématiques indépendantes. On peut définir les valeurs de ces échelles en faisant appel à la loi de distribution des vitesses moyennes.

La loi de distribution des vitesses moyennes relatives au voisinage d'un point donné peut être décrite par une suite des dérivées de la vitesse moyenne u par rapport à la coordonnée y :

$$u', u'', u''', u^{\mathrm{IV}}, \ldots \tag{5.22}$$

Deux dérivées quelles qu'elles soient sont de dimensions indépendantes; trois dérivées donnent une combinaison sans dimension. A partir des trois premières dérivées on peut former la combinaison sans dimension

$$\frac{u''^2}{u'u'''} = k.$$

Toutes les dérivées étant fonction d'une même variable, il est évident qu'entre deux combinaisons sans dimension quelconques formées à partir de la suite (5.22) existe une relation fonctionnelle dépourvue de constantes dimensionnées. Par exemple

$$\frac{u'''^2}{u'u^{\mathrm{IV}}} = \Phi\left(\frac{u''^2}{u'u'''}\right).$$

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante de similitude des écoulements relatifs pour toutes les valeurs y est

$$\frac{u''^2}{u'u'''} = k = \text{const}. \tag{5.23}$$

Cette condition représente une équation différentielle pour $u(y)$. En l'intégrant on obtient pour $k \neq 1$ et $k \neq 2$:

$$u = A(y + B)^{\frac{2-k}{1-k}} + C, \tag{5.24}$$

où A, B, C sont des constantes d'intégration dimensionnées. Pour $k=1$ la solution a la forme

$$u=Me^{y/d}+N \tag{5.25}$$

et, enfin, pour $k=2$ on a

$$u=P\,\mathrm{Log}\,(y+Q)+S, \tag{5.26}$$

où M, d, N, P, Q, S sont des constantes d'intégration.

Ainsi donc il est évident que l'hypothèse de la similitude exacte entraîne des lois de distribution des vitesses moyennes de formes spéciales bien déterminées.

La formule (5.26) traduit la loi logarithmique de distribution des vitesses.

La condition de similitude implique pour le parcours de mélange l et pour le transfert turbulent de la quantité de mouvement τ les formules suivantes :

$$l=k_1\frac{u'}{u''}, \tag{5.27}$$

$$\tau=\varrho l^2u'^2=\varrho k_1^2\frac{u'^4}{u''^2}, \tag{5.28}$$

où k_1 est une constante sans dimension.

Si l'on a les lois de distribution des vitesses (5.24) et (5.26) et si l'on choisit l'origine des y de manière adéquate, la formule (5.27) entraîne la relation $l=k_1y$, que l'on avait obtenue auparavant comme une conséquence de l'hypothèse selon laquelle la viscosité est non essentielle.

A la loi de distribution des vitesses (5.26) correspond $\tau=\tau_0=\text{const}$. Au cas des lois (5.25) et (5.24) τ est variable.

La condition (5.23) restreint fortement les lois possibles de distribution des vitesses moyennes. La condition initiale de la similitude exacte peut être atténuée : il suffit de supposer semblables les champs relatifs des vitesses au voisinage de tout point seulement aux infiniment petits du second ordre près. Dans cette hypothèse la suite (5.22) ne conserve que u' et u'', de sorte que l'équation (5.23) s'élimine tandis que les formules (5.27) et (5.28) restent en vigueur.

La formule (5.28) et l'égalité (5.18) permettent d'établir les formules théoriques de la loi de distribution des vitesses moyennes*).

P. Lykoudis**) a développé cette théorie en rendant les relations fonctionnelles pour le parcours de mélange l plus complexes, ce qui permet de

*) Voir les articles : Th. v. Kármán, *Ueber die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz*, Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut Aachen, n° 5, 1925; Th. v. Kármán, *Some aspects of the theory of turbulent motion*, Proceeding of the International Congress for applied mechanics, Cambridge, 1934; Th. v. Kármán, *Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz*, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Kl., 1930.

**) P. Lykoudis, *Etude expérimentale des phénomènes de transfert dans un courant turbulent de milieu conducteur en présence du champ magnétique* (en russe) dans le recueil « Plasma froid », Moscou, Ed. « Mir », 1967, pp. 513-527.

tenir compte de l'influence du champ magnétique sur l'écoulement turbulent d'un fluide conducteur dans un tube cylindrique rond. Le champ magnétique amortit les pulsations. Dans l'ouvrage de N. Vassetskaïa et V. Iossélévitch*) on trouvera une formule de l qui tient compte de l'action conjuguée intense de petites additions de polymères, de la rugosité des parois et du nombre de Reynolds sur la distribution des vitesses et sur la résistance des tubes offerte à un écoulement turbulent.

Les auteurs ont établi que l'influence des additions de polymères se traduit par un épaississement de la couche au voisinage de la paroi accompagné d'une modification radicale du profil des vitesses; cela a pour effet la diminution des gradients de vitesses dans la direction des parois et une diminution respective de la résistance de frottement. S'agissant d'un écoulement turbulent le long des parois rugueuses et des nombres de Reynolds suffisamment grands, la couche au voisinage de la paroi disparaît et avec elle disparaît l'influence des additions de polymères sur les profils des vitesses moyennes et sur la résistance de frottement**).

---

*) N. Vassetskaïa, V. Iossélévitch, *Sur l'élaboration d'une théorie semi-empirique de la turbulence dans des faibles solutions de polymères* (en russe), MJG, n° 2, 1970.

**) Les théories tenant compte de l'influence des petites additions de polymères, de la rugosité des parois, du nombre de Reynolds et d'autres facteurs ont récemment été développées dans les ouvrages suivants :

V. Iossélévitch, V. Pilipenko, *Sur l'écoulement turbulent d'un liquide avec additions de polymères dans la couche limite au gradient longitudinal de pression*, DAN SSSR, 1973, t. 213, n° 4; V. Iossélévitch, V. Pilipenko, *Profil logarithmique de la vitesse en écoulement d'une faible solution polymère au voisinage d'une surface rugueuse*, DAN SSSR, 1973, t. 213, n° 6; V. Pilipenko, *Ecoulement des faibles solutions polymères dans la couche limite d'un disque en rotation*, Travaux de l'Institut de Mécanique de l'Université de Moscou, 1974, n° 31; N. Vassetskaïa, V. Iossélévitch, *Additions polymères dans la couche limite d'une plaque plane*, Travaux de l'Institut de Mécanique de l'Université de Moscou, 1974, n° 32; V. Iossélévitch, V. Pilipenko, *Sur la résistance d'une plaque plane dans une veine de solution polymère à concentration variable*, Bull. de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., MJG, 1974, op. 1; L. Sédov, N. Vassetskaïa, V. Iossélévitch, *Calculation of turbulent boundary layers with polymer additives*, International Conference Drag Reduction, 4th-6th September, 1974, Cambridge, England.

CHAPITRE IV

ÉCOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS NON STATIONNAIRES DU GAZ

§ 1. Ecoulements automodèles du gaz par ondes sphériques, cylindriques et planes

1. Notion d'autosimilitude. Les écoulements unidimensionnels d'un fluide sont définis comme des mouvements dont toutes les caractéristiques ne sont fonction que d'une seule coordonnée géométrique et du temps. On montre que les écoulements unidimensionnels ne sont possibles que par ondes sphériques, cylindriques ou planes*). Les méthodes dimensionnelles permettent de trouver les solutions exactes de certains problèmes de l'écoulement unidimensionnel non stationnaire d'un fluide compressible**). Ces problèmes présentent souvent un grand intérêt pratique et théorique. Mais même dans les cas où la formulation du problème n'a pas d'intérêt immédiat, les solutions exactes qu'on en tire peuvent servir à confirmer diverses méthodes approchées de résolution des problèmes de la gazodynamique.

Pour caractériser les problèmes résolubles par les méthodes dimensionnelles considérons les fonctions inconnues et les paramètres de définition

---

*) Voir R. Lipschitz, Z. f. reine und angew. Math., t. 100 (1887), p. 89. Voir également G. Lubimov, *Sur les formes éventuelles des écoulements unidimensionnels non stationnaires d'un gaz visqueux* (en russe). Recueil d'articles « Teoretitcheskaïa hydromekhanika », n° 19, op. 7, Oboronguiz, 1956.

**) Cette classe de solutions a été mentionnée dans l'ouvrage de L. Sédov, *Ecoulements non stationnaires d'un fluide compressible* (en russe), « Prikladnaïa mathematika i mekhanika », t. IX, op. 4, 1945. Voir également « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 47, n° 2, 1945, p. 91. Des solutions analogues, qui ne font appel ni aux méthodes dimensionnelles ni à celles de la théorie des groupes et sans rapport avec les formulations des problèmes étudiés plus loin, ont fait l'objet de l'ouvrage de K. Bechert, *Differentialgleichungen der Wellenausbreitung in Gasen*, Annalen der Physik, t. 39 (1941), p. 357 (Bechert envisage uniquement les écoulements polytropes) et de l'ouvrage de K. Stanukovitch, *Sur les solutions automodèles des équations de l'hydrodynamique possédant la symétrie centrale* (en russe), « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 48, n° 5, 1945, p. 331.

L'application des méthodes que nous avons développées à la théorie de filtration du liquide dans un milieu poreux et la généralisation de ces méthodes à la recherche des écoulements tendant vers les écoulements automodèles (voir § 4) sont données dans les ouvrages de G. Barenblatt, *Sur les écoulements automodèles d'un fluide compressible dans un milieu poreux* (en russe), « Prikladnaïa mathematika i mekhanika », t. XVI, op. 6, 1952; *Sur les écoulements automodèles limites de la théorie de filtration non stationnaire d'un gaz dans un milieu poreux et ceux de la théorie de la couche limite* (en russe), « Prikladnaïa mathematika i mekhanika », t. XVIII, op. 4, 1954.

de l'écoulement unidimensionnel. Les principales fonctions inconnues si l'on admet la description eulérienne sont la vitesse v, la densité ϱ et la pression p; les paramètres de définition sont la coordonnée linéaire r, le temps t et les constantes incluses dans les équations et les conditions aux limites et initiales du problème. Etant donné que les dimensions des valeurs ϱ et p contiennent le symbole de la masse, il doit se trouver parmi les paramètres caractéristiques au moins une constante a dont la dimension contient également M. Sans restreindre la généralité supposons que sa dimension soit $[a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s$. Pour les fonctions inconnues de la vitesse, de la densité et de la pression, on peut alors toujours écrire les formules

$$v=\frac{r}{t}V, \quad \varrho=\frac{a}{r^{k+3}t^s}\mathcal{R}, \quad p=\frac{a}{r^{k+1}t^{s+2}}P, \tag{1.1}$$

où V, $\mathcal{R}$ et P sont des quantités abstraites et peuvent donc dépendre uniquement des combinaisons sans dimension renfermant r, t et d'autres paramètres du problème.

En général elles sont fonction de deux variables sans dimension. Mais si parmi les paramètres de définition on trouve en plus de a encore une, et une seule, constante b de dimension indépendante de a*), alors les r, t, a et b conduisent à une seule combinaison variable abstraite.

Comme la dimension de la constante a contient le symbole de la masse, il est possible, sans restreindre la généralité, d'introduire la constante b telle que sa dimension ne contienne pas le symbole de l'unité de masse, i.e. $[b]=\mathrm{L}^m\mathrm{T}^n$. S'il en est ainsi, la seule combinaison variable adimensionnée sera : $r^m t^n/b$ à laquelle on peut substituer pour $m\neq 0$ la variable

$$\lambda=\frac{r}{b^{\frac{1}{m}}t^{\delta}}, \quad \text{où} \quad \delta=-\frac{n}{m}. \tag{1.2}$$

Si $m=0$, V, $\mathcal{R}$, P ne sauraient dépendre que du temps t; dans ce cas la vitesse v est proportionnelle à r; les écoulements particuliers correspondants sont traités en détail plus loin au § 15.

En plus du paramètre variable λ la solution peut dépendre encore de plusieurs paramètres constants abstraits.

Ainsi donc, si parmi les paramètres de définition du problème en plus de r et t il n'y a que deux constantes de dimensions indépendantes, les équations aux dérivées partielles, auxquelles doivent satisfaire la vitesse, la densité et la pression de l'écoulement unidimensionnel non stationnaire d'un fluide compressible, peuvent être remplacées par les équations différentielles ordinaires pour les grandeurs V, $\mathcal{R}$ et P.

---

*) En principe, les constantes de définition peuvent être nombreuses mais leurs dimensions dépendraient alors de a et de b. Il importe pour la suite qu'il n'y ait parmi les constantes de définition que deux, a et b, de dimensions indépendantes, aux exposants fixes k, s, m, n, pouvant être entiers, fractionnaires ou transcendants. La définition de ces exposants dans les problèmes concrets est liée à la formulation du problème et aux propriétés des solutions cherchées, questions sortant du cadre de la théorie dimensionnelle.

Or, on peut toujours trouver pour les équations différentielles ordinaires soit une solution exacte, sous forme fermée, soit une solution approchée, en faisant appel à une intégration numérique.

Les écoulements décrits sont dits automodèles. Arrêtons-nous sur la formulation de certains problèmes dont la solution s'obtient aisément par la méthode que nous venons de décrire.

Pour fixer les idées supposons que le gaz est parfait, non visqueux et non conducteur de chaleur, l'écoulement n'étant accompagné d'aucune transformation physique ou chimique (on verra plus loin dans quelle mesure on peut renoncer à ces hypothèses dans les problèmes concrets). Les équations du mouvement, de la continuité et de l'énergie s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}&=0,\\ \frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \varrho v}{\partial r}+(\nu-1)\frac{\varrho v}{r}&=0,\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\varrho^{\gamma}}\right)+v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\varrho^{\gamma}}\right)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

où γ est l'indice de l'adiabatique, $\nu=1$ pour les ondes planes, $\nu=2$ pour les ondes cylindriques et $\nu=3$ pour les ondes sphériques.

Les équations ne contiennent aucune constante dimensionnée. Aussi, pour assurer que l'écoulement considéré soit automodèle il suffit que les conditions supplémentaires du problème ne contiennent tout au plus que deux paramètres de dimensions indépendantes. Traitons les exemples de problèmes automodèles*).

2. Problème de l'écoulement du gaz étant donné la distribution initiale des vitesses $v_0(r)$, de la densité $\varrho_0(r)$ et des pressions $p_0(r)$ (problème de Cauchy). Il est facile de dégager la forme des lois de distribution des $v_0(r)$, $\varrho_0(r)$ et $p_0(r)$ à l'instant initial ($t=0$) lorsque l'écoulement qui naît aux instants ultérieurs $t>0$ est automodèle.

En effet, l'écoulement dans son ensemble étant défini par deux constantes dimensionnées a et b de dimensions indépendantes seulement, les distributions initiales doivent se définir par trois quantités a, b, r.

Nous admettons par la suite que les dimensions de b et de r sont indépendantes**), donc $n\neq 0$. Pour $m\neq 0$ on pose, sans restreindre la généralité, que $[b]=\mathrm{LT}^{-\delta}$.

*) Au cours des dernières années on a vu paraître un grand nombre d'ouvrages qui traitent de solutions automodèles analogues pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles rencontrés dans divers domaines de la science.

**) Si les dimensions de b et r sont interdépendantes, alors $n=\delta=0$ de sorte qu'il existe une combinaison adimensionnée br^{-m}. La théorie dimensionnelle laisse tout lieu à croire que la vitesse initiale ne serait que nulle ou infinie comme d'ailleurs le seraient la densité et la pression initiales lorsque $s\neq 0$ ou $s\neq -2$.

Si $n=0$ et $s=0$, la densité initiale peut être une fonction arbitraire de r, mais la pression et la vitesse sont soit nulles, soit infinies. Si $n=0$ et $s=-2$, la pression initiale peut être arbitraire tandis que la vitesse et la densité sont soit nulles, soit infinies.

La théorie dimensionnelle conduit aux formules du type suivant pour les distributions initiales :

$$v_0=\alpha_1 b^{\frac{1}{\delta}} r^{1-\frac{1}{\delta}}, \quad \varrho_0=\alpha_2 a b^{\frac{s}{\delta}} r^{-\left(k+3+\frac{s}{\delta}\right)}, \quad p_0=\alpha_3 a b^{\frac{s+2}{\delta}} r^{-\left(k+1+\frac{s+2}{\delta}\right)}, \tag{1.4}$$

où α_1, α_2, α_3 sont des constantes abstraites données; dans le cas des ondes planes les valeurs de ces constantes peuvent être différentes selon que $r>0$ ou $r<0$.

La résolution du problème initial considéré sur un intervalle de r infini, les caractéristiques de l'écoulement étant éventuellement infinies pour $r=0$ ou $r=\infty$, pose la question essentielle de l'unicité et de l'existence de la solution.

En résolvant les problèmes initiaux avec k, s et δ arbitraires on est obligé d'envisager les écoulements automodèles de la forme la plus générale.

3. Problème du piston. Un long tube cylindrique fermé à une extrémité par un piston contient un gaz. A l'instant initial le gaz étant au repos ($v_1=0$), le piston se met à se déplacer à une vitesse constante U (fig. 34).

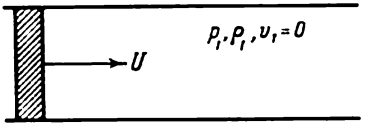


Fig. 34. Le piston se met en mouvement à une vitesse constante U; le gaz devant le piston est initialement au repos et possède une densité ϱ_1 et une pression p_1 uniformes

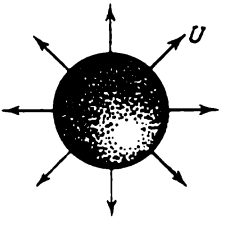


Fig. 35. Dilatation à une vitesse constante U d'une sphère ou d'un cylindre circulaire au sein d'un gaz initialement au repos. Au moment zéro le rayon de la sphère ou du cylindre est nul. La densité initiale ϱ_1 et la pression initiale p_1 sont constantes

Les paramètres de définition de ce problème comptent outre r et : la densité initiale du gaz ϱ_1, la pression initiale p_1 et la vitesse du piston U. Les dimensions de ϱ_1, p_1 et de U étant liées par la relation

$$[U^2]=\frac{[p_1]}{[\varrho_1]},$$

on n'a en fait que deux constantes de dimensions indépendantes.

Un problème analogue peut être formulé pour les écoulements à symétries cylindrique et sphérique : à l'instant initial le gaz remplissant tout l'espace commence à être repoussé respectivement par un cylindre ou par une sphère dont le rayon croît à partir de zéro proportionnellement au temps (fig. 35).

Si la vitesse du piston n'est pas constante mais proportionnelle à une certaine puissance du temps par exemple,

$$U = ct^n,$$

on aura une troisième constante essentielle dont la dimension est indépendante (pour $n \neq 0$) de celles de ϱ_1 et p_1 :

$$[c] = \mathrm{LT}^{-n-1},$$

si bien que l'écoulement perturbé du gaz correspondant ne sera pas automodèle.

L'écoulement dont la vitesse varie selon une telle loi (pour $n \neq 0$) tend vers l'écoulement automodèle dans le cas limite où $p_1 = 0$ et où, par conséquent, les données du problème ne contiennent que deux constantes dimensionnées indépendantes, ϱ_1 et c.

4. Problème de la convergence d'un gaz vers un point et de la divergence à partir d'un point. A l'instant initial et lorsque $p_1 = \text{const}$ et $\varrho_1 = \text{const}$, toutes les particules d'un gaz homogène remplissant l'espace ont la même vitesse dirigée vers le centre (convergence) ou à partir du centre (divergence).

En cas de symétrie cylindrique toutes les particules ont la même vitesse dirigée vers l'axe de symétrie ou en sens inverse.

Il est clair que le problème analogue des ondes planes se ramène au problème du mouvement du piston à une vitesse constante, si l'on ajoute à la vitesse initiale du gaz une vitesse de translation égale mais de sens opposé.

Dans le cas des symétries sphérique ou cylindrique les problèmes considérés ne se ramènent pas aux problèmes analogues des pistons sphérique et cylindrique.

Comme dans le problème précédent, parmi les constantes dimensionnées entrant dans les conditions initiales et les conditions aux limites on ne trouve que deux de dimensions indépendantes (p_1, ϱ_1).

Les problèmes de la convergence et de la divergence d'un gaz avec les conditions initiales données représentent les cas particuliers du problème plus général, premier problème de Cauchy. Dans d'autres cas où les constantes caractéristiques ont des dimensions distinctes et indépendantes de celles de la vitesse, de la pression et de la densité, les distributions initiales le long du rayon doivent être variables si elles sont non nulles.

5. Propagation du front de flamme ou de détonation. Un mélange combustible homogène ayant une densité ϱ_1 et une pression p_1 uniformes dans l'espace qu'il remplit est mis en combustion à l'instant $t = 0$ le long d'un plan (cas plan), d'une droite (symétrie cylindrique) ou en un point (symétrie sphérique). Un front de flamme ou de détonation plan, cylindrique, sphérique se propagera au sein du mélange.

Comme on sait, l'épaisseur de la zone de combustion, dans les conditions ordinaires, est extrêmement faible (de l'ordre d'une fraction de millimètre).

Si l'on fait abstraction des processus se déroulant à l'intérieur de la zone de combustion, il est possible de poser nulle son épaisseur, c'est-à-dire d'admettre que le gaz se consume instantanément le long d'une certaine surface géométrique. Les paramètres de définition sont dans ce cas : la densité initiale du mélange ϱ_1, la pression initiale p_1, la quantité de chaleur Q dégagée au cours de la combustion d'une unité de masse du gaz et, au cas de la propagation du front de flamme, sa vitesse u de propagation par particules, qui est une constante physico-chimique connue du mélange donné.

La dimension de Q en unités mécaniques peut s'exprimer par celles de ϱ_1 et de p_1 :

$$[Q]=\frac{[p_1]}{[\varrho_1]}.$$

Par conséquent, des quatre paramètres de définition deux seulement de nouveau ont des dimensions indépendantes.

Si la densité initiale ϱ_1 varie selon la loi

$$\varrho_1=\frac{A}{r^\omega},$$

les constantes caractéristiques seront A, p_1, Q si bien que l'écoulement perturbé du gaz ne sera pas automodèle.

L'analyse des équations et des conditions aux limites montre que la pression initiale p_1 n'entre que dans la condition sur l'onde de choc; si l'on y néglige la pression p_1 faible par rapport à une grande pression derrière le front de détonation, la valeur p_1 est éliminée du nombre de paramètres de définition. Dans cette formulation approchée le problème devient automodèle avec deux constantes caractéristiques dimensionnées indépendantes

$$[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3} \quad \text{et} \quad [Q]=\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}.$$

6. Problème de la décomposition d'une discontinuité arbitraire dans un mélange de combustion. A l'instant $t=0$ à gauche du plan $r=0$ (cas $\nu=1$) se trouve un gaz caractérisé par la vitesse v_1, la densité ϱ_1 et la pression p_1 constantes, et à droite, un mélange de combustion ayant la vitesse v_2, la densité ϱ_2 et la pression p_2 constantes. Les conditions de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie n'étant pas remplies sur cette discontinuité, celle-ci ne pourra plus exister de manière isolée à l'instant suivant mais il devra se créer un écoulement du gaz ayant une ou plusieurs surfaces de discontinuité sur chacune desquelles seront déjà remplies les conditions de conservation (un front de flamme ou de détonation se propagerait alors à travers le mélange de combustion). Parmi les paramètres du problème — v_1, ϱ_1, p_1, v_2, ϱ_2, p_2, Q (quantité de chaleur dégagée lors de la combustion de l'unité de masse de gaz) et u (vitesse du front de flamme) — il n'y en a que deux de dimensions indépendantes. Par conséquent, l'écoulement qui s'établit est automodèle.

En abordant le problème de Cauchy à ondes planes pour des valeurs arbitraires des constantes k, s et δ, α_1^+, α_2^+, α_3^+ pour $r>0$ et α_1^-, α_2^-, α_3^- pour

$r<0$ dans les formules 1.4, on doit se proposer de résoudre un problème automodèle plus général de la décomposition d'une discontinuité correspondante pour $r=0$.

Dans les cas où la solution existe et est unique, la décomposition de la discontinuité correspondante représente un phénomène local défini par le type de la singularité.

7. **Problème de l'explosion forte.** A l'instant $t=0$ il se produit au centre de symétrie d'un gaz immobile une explosion ponctuelle, c'est-à-dire le dégagement instantané d'une énergie finie E_0. Dans cette formulation on néglige la masse et le volume de la substance dégageant l'énergie. Le problème de l'explosion forte ainsi posé permet de se représenter ce qui se passe lors de l'explosion d'une bombe atomique; au § 11 on cite les données expérimentales.

Les données du problème comprennent trois constantes de dimensions indépendantes : la densité initiale du gaz ϱ_1, la pression initiale p_1 et l'énergie d'explosion E_0.

Le système de paramètres de définition de l'écoulement perturbé adiabatique du gaz résultant d'une explosion se compose des grandeurs

$$\varrho_1, p_1, E_0, r, t, \gamma.$$

Selon la théorie dimensionnelle, toutes les grandeurs adimensionnées dépendantes ne sauraient être fonction que de trois paramètres adimensionnés :

$$\gamma; \quad \frac{\varrho_1^{1/5} r}{E_0^{1/5} t^{2/5}} = \lambda; \quad \frac{p_1^{5/6} t}{E_0^{1/3} \varrho_1^{1/2}} = \tau, \tag{1.5}$$

parmi lesquels λ et τ sont variables. L'expérience et la théorie montrent que lors de l'explosion, il se produit, à la frontière du domaine de l'écoulement perturbé du gaz, un changement brusque des caractéristiques du mouvement, une onde dite de choc. Dans le problème proposé ce sera une sphère dont le rayon croît avec le temps. L'influence de la pression initiale p_1 et, par suite, du paramètre τ n'apparaît que dans les conditions dynamiques sur l'onde de choc.

Toutefois, si l'explosion est forte (E_0 grand), la pression derrière l'onde de choc accompagnant l'explosion dépassera de beaucoup la pression initiale du gaz de sorte que l'écoulement du gaz derrière l'onde de choc, à de petites distances du centre d'explosion, sera indépendant de la pression initiale p_1. Ainsi il ne reste que deux constantes dimensionnées essentielles ϱ_1 et E_0.

On exprime mathématiquement la possibilité de négliger la pression initiale en posant nulle la pression de l'écoulement non perturbé p_1 dans les conditions sur l'onde de choc; grâce à cela le paramètre p_1 disparaît en même temps que la variable indépendante τ. Ces modifications nous autorisent de considérer l'écoulement perturbé du gaz comme automodèle.

A mesure que l'onde de choc s'affaiblit, il n'est plus permis de négliger la pression initiale — « contre-pression » p_1 — et, par conséquent, le pro-

blème de l'écoulement perturbé d'un gaz lors d'une explosion ponctuelle cesse d'être automodèle à de grandes distances du centre d'explosion.

Notons que si l'on veut résoudre numériquement le problème de l'explosion ponctuelle compte tenu de la contrepression p_1, il suffit d'effectuer le calcul pour un seul cas concret; cela permettra d'obtenir toutes les grandeurs inconnues en fonction des grandeurs adimensionnées λ, τ et, ensuite, de déterminer aisément pour une même valeur γ les caractéristiques du champ de perturbation de l'explosion quelles que soient E_0, la densité initiale ϱ_1 et la pression initiale p_1.

En cas de symétrie cylindrique l'explosion s'effectue le long d'une droite*), en cas d'ondes planes, le long d'un plan**). Par E_0 on désigne respectivement l'énergie dégagée et rapportée à l'unité de longueur ou de surface.

Evidemment, le problème de l'explosion peut être généralisé au cas où l'on a une densité initiale variable suivant la loi $\varrho_1 = A/r^{\omega}$. On prendra alors comme paramètre de définition, au lieu du paramètre constant ϱ_1, la constante A de dimension $[A] = \mathrm{ML}^{\omega-3}$.

Au lieu des variables (1.5) on prendra dans ce cas les variables

$$\gamma, \quad \left(\frac{A}{E_0}\right)^{\frac{2}{5-\omega}} \frac{r}{t^{\frac{2}{5-\omega}}} = \lambda, \qquad \frac{p_1^{\frac{5-\omega}{6}} t}{A^{1/2} E_0^{\frac{2-\omega}{6}}} = \tau.$$

Lorsque le paramètre τ est petit, il est possible, étant donné une grande énergie dégagée E_0, la petite pression initiale p_1 ou le petit intervalle de temps t, de négliger l'influence du second paramètre; on arrive alors à un problème automodèle de propagation de l'explosion forte au sein d'un milieu de densité variable.

Les problèmes de l'explosion forte que nous venons de formuler sont résolus aux §§ 11, 12, 14.

8. Propriétés des milieux parfaits et autosimilitude. On a vu plus haut que si les conditions aux limites et les conditions initiales servant à déterminer l'écoulement unidimensionnel adiabatique***) non stationnaire d'un gaz parfait (non visqueux) ne contiennent que deux variables dimensionnées indépendantes, on a un problème automodèle.

On s'aperçoit sans difficulté qu'au cas où les constantes caractéristiques ont des dimensions qui dépendent de la densité ϱ_1 et de la pression p_1, l'écoulement est automodèle dans tout autre milieu parfait (en l'absence de

*) Une forte explosion le long d'une droite peut parfois être assimilée à une décharge électrique de grande intensité dans le gaz.

**) Ces cas d'ondes cylindriques et planes diffèrent par la dimension de E_0 et, par suite, des paramètres λ et τ (cf. §§ 11, 12, 13, 14).

***) La condition d'adiabacité peut être remplacée par d'autres conditions, par exemple par l'absence du gradient de température : $\partial T/\partial r = 0$ (la conductibilité thermique infinie).

contraintes tangentielles, l'état thermodynamique se définit au moyen de deux paramètres seulement, par exemple, p et ϱ).

En effet, d'après les considérations générales de la théorie dimensionnelle, l'énergie rapportée à l'unité de masse et faisant partie des conditions aux sauts vérifie la formule

$$\varepsilon=\frac{p}{\varrho}F\left(\frac{p}{p^*},\frac{\varrho}{\varrho^*},\alpha_1,\alpha_2,\ldots\right),$$

et l'entropie, la formule

$$S=AG\left(\frac{p}{p^*},\frac{\varrho}{\varrho^*},\beta_1,\beta_2,\ldots\right),$$

où p^*, ϱ^* sont des constantes ayant les dimensions de la pression et de la densité. La constante dimensionnée A est non essentielle, car elle peut être simplifiée dans les conditions d'adiabacité; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ sont des constantes abstraites. Il est évident que dans le cas général on a pour l'équation d'état une formule de la forme

$$c_vT=\frac{p}{\varrho}H\left(\frac{p}{p^*},\frac{\varrho}{\varrho^*},\alpha_1,\beta_1,\ldots\right).$$

On voit que l'introduction des constantes p^* et ϱ^* dans le tableau des paramètres de définition n'affecte pas l'autosimilitude si deux constantes de définition dimensionnées ont les dimensions dépendant de p^* et de ϱ^*.

On peut parler de l'autosimilitude des propriétés intrinsèques d'un milieu lorsque quelques-unes des fonctions F, G, H, essentielles du point de vue du problème posé, dépendent non pas des deux paramètres p/p^* et ϱ/ϱ^* mais seulement d'un paramètre adimensionné du type $p^{k_1}\varrho^{k_2}/C$. S'il en est ainsi, les propriétés du milieu peuvent se manifester non par les constantes p^* et ϱ^*, mais uniquement par l'intermédiaire de la constante dimensionnée C. Celle-ci doit, d'une façon générale, être introduite dans le nombre de constantes de définition. Dans ces milieux et dans les problèmes qui s'y posent les mouvements automodèles dans lesquels la dimension d'une des constantes de définition est fixe et égale à celle de C sont possibles.

En cas d'un gaz parfait non visqueux, les fonctions F, H se ramènent à des constantes abstraites, tandis que la constante additive de la fonction G est non essentielle dans la plupart des problèmes posés. Grâce à cette circonstance on est en mesure d'imaginer pour un gaz parfait non visqueux des écoulements automodèles à deux constantes de définition dimensionnées arbitraires indépendantes.

§ 2. Equations différentielles ordinaires et les conditions aux sauts pour les mouvements automodèles

1. Equations différentielles ordinaires. Pour résoudre les problèmes formés plus haut déduisons les équations auxquelles doivent satisfaire V, $\mathcal{R}$ et P.

Exprimons v, ϱ et p d'après (1.1) au moyen de V, $\mathcal{R}$, P et portons ces expressions dans l'équation (1.3); compte tenu de (1.2) on a

$$\left.\begin{aligned}
\lambda\left[(\delta-V)V'-\frac{P'}{\mathcal{R}}\right]&=V^2-V-(k+1)\frac{P}{\mathcal{R}},\\
\lambda\left[-V'+(\delta-V)\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}\right]&=-s-(k-\nu+3)V,\\
\lambda(\delta-V)\left[\frac{P'}{P}-\gamma\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}\right]&=-s(1-\gamma)-2-[k(1-\gamma)+1-3\gamma]V.
\end{aligned}\right\}$$

Introduisons au lieu de P la nouvelle variable*) $z=\gamma P/\mathcal{R}$ et transformons ces équations en leur donnant la forme

$$\frac{dz}{dV}=\frac{z\{[2(V-1)+\nu(\gamma-1)V](V-\delta)^2-(\gamma-1)V(V-1)(V-\delta)\}}{(V-\delta)[V(V-1)(V-\delta)+(\varkappa-\nu V)z]}-$$
$$-\frac{[2(V-1)+\varkappa(\gamma-1)]z^2}{(V-\delta)[V(V-1)(V-\delta)+(\varkappa-\nu V)z]}, \tag{2.1}$$

$$\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{z-(V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta)+(\varkappa-\nu V)z}, \tag{2.2}$$

$$(V-\delta)\frac{d\ln\mathcal{R}}{d\ln\lambda}=[s+(k-\nu+3)V]-\frac{V(V-1)(V-\delta)+(\varkappa-\nu V)z}{z-(V-\delta)^2}, \tag{2.3}$$

où

$$\varkappa=\frac{s+2+\delta(k+1)}{\gamma}.$$

Pour le type donné des mouvements automodèles la dimension de la constante a peut être modifiée; on introduit une nouvelle constante a_1 par la formule $a_1=ab^\chi$ où l'exposant χ est arbitraire. Les valeurs k_1 et s_1 modifiées sont définies par les formules

$$k_1=k+\chi,\quad s_1=s-\delta\chi.$$

Il est possible également de modifier le paramètre en introduisant une nouvelle constante $b_1=b^m$. Les fonctions $P(\lambda)$, $\mathcal{R}(\lambda)$ et le paramètre λ dépendent des dimensions choisies pour les constantes a et b; évidemment, les variables z, V ainsi que la fonction $z(V)$ sont indépendantes du choix de k, s, m puisqu'elles sont complètement définies par le type de l'écoulement automodèle, ce dernier n'étant essentiellement fonction que de deux paramètres $\varkappa$ et δ. Une fois les valeurs k_1 et s_1 substituées aux valeurs k et s dans l'expression de $\varkappa$, on obtient $\varkappa=\varkappa_1$.

La particularité mentionnée de la fonction $z(V)$ permet d'éclaircir le lien entre le champ de courbes intégrales de l'équation (2.1) sur le plan z, V

*) La température T et la variable z sont liées par la formule

$$RT=\frac{r^2}{\gamma t^2}z,$$

où R est la constante des gaz parfaits.

et le type de l'écoulement automodèle, lien qui ne dépend pas de la façon dont on introduit les constantes caractéristiques a et b.

Il est aisé de voir que le problème principal consiste à intégrer l'équation (2.1). Si l'équation (2.1) est intégrée, les V et $\mathcal{R}$ en fonction de λ se trouvent par quadratures à partir des équations (2.2) et (2.3).

Le plan des variables adimensionnées z et V convient pour la représentation des écoulements arbitraires qui ne sont pas automodèles. A chaque instant, au champ de l'écoulement unidimensionnel non stationnaire du gaz est associée une courbe dans le plan z, V. Les sauts apparaissant dans l'écoulement sont traduits sur cette courbe par des points de discontinuité. Les écoulements non automodèles du gaz sont représentés aux différents instants par différentes courbes sur le plan z, V.

Les points correspondant aux fortes discontinuités migrent avec le temps dans le plan z, V. Aux différents points fixes dans l'espace ou aux différents éléments fixes dans le plan z, V correspondent les courbes différentes. Si l'écoulement est automodèle, une même courbe qui est la courbe intégrale de l'équation (2.1) correspond au champ de l'écoulement du gaz dans le plan z, V aux instants différents ou pour les différents points ou éléments. Il découle de la formulation des problèmes automodèles que la coordonnée r du saut et la variable $\lambda = r/bt^{\delta}$ à la surface de discontinuité sont fonction du temps t et des constantes de définition dimensionnées a et b*).

Comme il est impossible de former à partir des trois grandeurs a, b, t une combinaison adimensionnée, on a pour la surface de discontinuité

$$\lambda = \lambda_0 = \text{const}, \qquad r = \lambda_0 b t^{\delta}.$$

Par conséquent, dans un écoulement automodèle les valeurs fixes des variables λ, $\mathcal{R}$, z, P, V correspondent au saut. Dans le plan z, V les sauts sont traduits par des points fixes.

Il est toujours possible d'exprimer la vitesse c du saut par une formule de la forme

$$c = \frac{dr}{dt} = \delta \frac{r}{t}. \tag{2.4}$$

Il va sans dire que pour les écoulements automodèles δ est constant. Les vitesses de propagation des phases dans l'espace pour $r > 0$, $t > 0$ sont dirigées du centre pour $\delta > 0$ et vers le centre pour $\delta < 0$. Par suite, pour $\delta > 0$ les ondes de choc sont divergentes et pour $\delta < 0$ elles sont convergentes, dans ce dernier cas la vitesse de propagation des phases étant ralentie. Si $r > 0$ et si le temps t s'accroît mais $t < 0$, les sauts se déplacent autrement. Sur la

*) On connaît des cas particuliers où l'écoulement du gaz est automodèle mais où le mouvement des frontières, celle de l'onde de choc par exemple, est défini par des constantes supplémentaires de sorte que la coordonnée r du saut dépend non seulement des a, b et t mais encore d'autres constantes dimensionnées; dans ces cas la formule $\lambda = \text{const}$ au saut n'est plus valable. Conformément aux définitions adoptées on appellera non automodèles ces écoulements considérés dans leur ensemble, malgré que cette propriété ne soit rompue qu'à la frontière.

parabole $z=(\delta-V)^2$ les vitesses de phase sont égales à la vitesse du son, au-dessus de cette parabole ces vitesses sont subsoniques, et au-dessous, supersoniques. Dans le cas général des écoulements non automodèles la quantité δ est une fonction du temps.

2. Conditions aux sauts de compression. Dans la plupart des problèmes mentionnés on a affaire à de fortes discontinuités apparaissant dans le flux (ondes de choc, fronts de détonation, fronts de flamme). Pour cette raison il convient d'étudier, sous une forme générale, les relations entre les valeurs V, z et $\mathcal{R}$ des deux côtés de la surface de forte discontinuité.

A la traversée de la surface de forte discontinuité les conditions de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du flux d'énergie doivent se remplir. En affectant par l'indice 1 les valeurs d'un côté de la surface de discontinuité et par l'indice 2 celles de l'autre côté on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1(v_1-c)&=\varrho_2(v_2-c),\\ \varrho_1(v_1-c)^2+p_1&=\varrho_2(v_2-c)^2+p_2; \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2}(v_1-c)^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\varrho_1}=\frac{1}{2}(v_2-c)^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\varrho_2}. \tag{2.6}$$

Ces équations sont données pour un gaz parfait. Il est convenu que l'enthalpie i de l'unité de masse de gaz est définie par la formule

$$i=c_pT+\text{const}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\varrho}+\text{const}.$$

Exprimons v, ϱ, p au moyen de V, $\mathcal{R}$, P d'après les formules (1.1), la vitesse c à l'aide de $\delta r/t$ d'après (2.4), portons les expressions trouvées dans les relations (2.5) et (2.6) et introduisons la variable $z=\gamma P/\mathcal{R}$. On a

$$\mathcal{R}_1(V_1-\delta)=\mathcal{R}_2(V_2-\delta),$$

$$V_1-\delta+\frac{z_1}{\gamma(V_1-\delta)}=V_2-\delta+\frac{z_2}{\gamma(V_2-\delta)},$$

$$(V_1-\delta)^2+\frac{2z_1}{\gamma-1}=(V_2-\delta)^2+\frac{2z_2}{\gamma-1}.$$

Ces égalités permettent d'exprimer V_2 et z_2 au moyen de V_1 et z_1 suivant les formules

$$\left.\begin{aligned} V_2-\delta&=(V_1-\delta)\left[1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{z_1-(V_1-\delta)^2}{(V_1-\delta)^2}\right],\\ z_2&=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2\frac{1}{(V_1-\delta)^2}\left[(V_1-\delta)^2+\frac{2z_1}{\gamma-1}\right]\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V_1-\delta)^2-z_1\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

En donnant, dans le plan (V, z), un point (V_1, z_1) on trouve à partir des relations (2.7) un point (V_2, z_2) en lequel il passe après le saut. On convient que les éléments gazeux traversent le saut en passant de l'état 1 à l'état 2. Les équations (2.5) et (2.6) étant symétriques, il est clair que les indices 1 et 2 peuvent être permutés dans les formules (2.7).

Les points de la parabole

$$z=(V-\delta)^2 \tag{2.8}$$

se transforment en eux-mêmes. A cette parabole correspondent les faibles discontinuités, i.e. les surfaces de discontinuité des dérivées. En effet, l'équation (2.8) écrite en valeurs dimensionnées donne

$$\frac{\gamma p}{\varrho}=(v-c)^2,$$

en d'autres termes le carré de la vitesse du saut par les particules est égal au carré de la vitesse du son. Les points situés au-dessous de la parabole (2.8) et les points situés au-dessus d'elle se correspondent.

Comme d'après son sens physique z est toujours positif, seuls les cas où se correspondent entre eux les points du demi-plan supérieur ont une signification physique.

Les points de l'axe V correspondant au cas limite où $z=0$ ont pour image les points de la parabole

$$z=\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V-\delta)^2.$$

Par conséquent, la transformation (2.7) est une application réciproque du domaine entre l'axe V et la parabole

$$z=(V-\delta)^2$$

sur le domaine entre la parabole

$$z=\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V-\delta)^2$$

et la parabole

$$z=(V-\delta)^2.$$

Ensuite, comme

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1}=\frac{V_1-\delta}{V_2-\delta}>0, \tag{2.9}$$

il est clair que les points sur les différents côtés d'un saut dans le plan z, V sont situés du même côté de la droite $V=\delta$. La relation (2.9) découle de (2.7) pour tous $z_1 \gtrless 0$.

Pour les points au-dessus de la parabole (2.8) on a

$$z>(V-\delta)^2 \quad \text{ou} \quad a^2=\frac{\gamma p}{\varrho}>(v-c)^2,$$

et pour les points situés au-dessous de la parabole (2.8)

$$z<(V-\delta)^2 \quad \text{ou} \quad a^2=\frac{\gamma p}{\varrho}<(v-c)^2.$$

Autrement dit, la vitesse des particules du fluide par rapport au saut est subsonique pour $z>(V-\delta)^2$ et supersonique pour $z<(V-\delta)^2$. C'est pourquoi*), le domaine situé entre la parabole

$$z=(V-\delta)^2$$

et la droite $z=0$ correspond aux états par lesquels se propageront les sauts de compression, et le domaine compris entre les paraboles

$$z=\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V-\delta)^2$$

et

$$z=(V-\delta)^2$$

correspond aux états observés derrière les sauts de compression.

Les points situés au-dessus de la parabole

$$z=\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V-\delta)^2$$

ont pour images, selon (2.7), les points du demi-espace inférieur et, par conséquent, ne peuvent correspondre à l'état du fluide ni devant, ni derrière le saut.

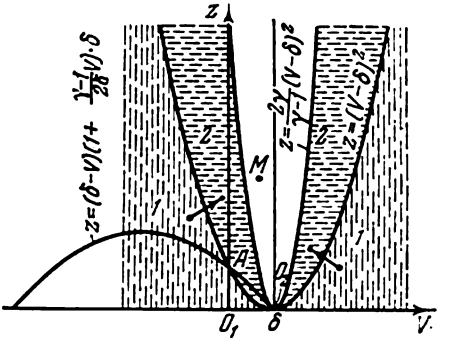


Fig. 36. Dans le plan $z=\frac{\gamma p t^2}{\varrho r^2}$, $V=\frac{vt}{r}$ les sauts peuvent se traduire par le passage des points du domaine à hachures verticales dans le domaine à hachures horizontales. Les passages éventuels sont figurés par des flèches

Sur la figure 36 les domaines dont les points sont susceptibles de représenter les états du gaz devant le saut sont hachurés verticalement et les domaines contenant les points en lesquels passe le point représentatif après le saut sont hachurés horizontalement.

Les directions suivant lesquelles le point (V_1, z_1) peut passer en le point (V_2, z_2) sont indiquées par des flèches.

Notons encore que si l'onde de choc se propage à travers un gaz au repos, i.e. si le point (V_1, z_1) se situe sur l'axe z $(V=0)$, alors le point (V_2, z_2) appartient à la parabole

$$z_2=-\delta(V_2-\delta)\left(1+\frac{\gamma-1}{2\delta}V_2\right). \tag{2.10}$$

Cette parabole est représentée en bas à gauche sur la figure 36.

A gauche de la droite $V=\delta$ les vitesses $c=\delta r/t$ de phase $\lambda=\text{const}$ (en particulier, la vitesse du saut) sont supérieures et à droite de cette droite inférieures à la vitesse des particules gazeuses $v=Vr/t$ au même point de l'espace. Le sens des deux vitesses dans l'espace dans le premier et le second

*) Les conditions aux fortes discontinuités, dans le cas général, sont examinées, dans l'ouvrage de L. Sedov, *Two-dimensional problems in hydrodynamics*. Wiley, 1952.

cas est le même. La vitesse relative de phase par rapport aux particules est dans le premier cas de même sens que la vitesse de la particule, dans le second cas elle est de sens contraire.

Il est clair que toutes les conclusions de l'alinéa 2 n'ont pas de rapport à l'autosimilitude de l'écoulement.

3. Conditions au front de détonation et au front de flamme. Considérons d'abord les propriétés générales des sauts lorsqu'il y a apport d'énergie. Supposons que le passage des particules gazeuses à travers le saut de l'état 1 à l'état 2 s'accompagne de l'apport d'énergie à l'unité de masse égal à Q. L'énergie se dégage au cours des réactions chimiques (front de flamme, front de détonation), arrive par conduction thermique, par rayonnement ou provient d'autres processus quelconques.

S'il y a apport d'énergie, les conditions mécaniques (2.5) au front du saut se conservent tandis que l'équation d'énergie (2.6) change à cause de l'afflux d'énergie Q à l'état 2 (accroissement de la constante dans la formule de l'enthalpie). L'équation de l'énergie prend la forme

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{1}{2}(v_1-c)^2+Q=\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}\frac{p_2}{\varrho_2}+\frac{1}{2}(v_2-c)^2. \tag{2.11}$$

On a tenu compte dans cette équation de ce que le coefficient de Poisson $\gamma=c_p/c_v$ peut avoir des valeurs différentes devant le saut γ_1 et derrière le saut γ_2.

Les équations (2.5) et (2.11) peuvent être transformées et prendre la forme

$$v_2-c=\frac{\varrho_1}{\varrho_2}(v_1-c), \tag{2.12}$$

$$p_2=p_1+\left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\varrho_1(v_1-c)^2, \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2-\frac{2\gamma_2}{\gamma_2+1}\left(1+\frac{p_1}{\varrho_1(v_1-c)^2}\right)\frac{\varrho_1}{\varrho_2}+$$
$$+\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}+\left[\frac{2\gamma_1}{\gamma_1-1}\frac{p_1}{\varrho_1(v_1-c)^2}+1+\frac{2Q}{(v_1-c)^2}\right]=0. \tag{2.14}$$

Le module de la différence

$$|c-v_1|=u$$

représente la vitesse de propagation du saut par les particules devant le front d'onde. Dans le cas du front de flamme la vitesse u est une constante physico-chimique donnée.

Les égalités suivantes sont immédiates :

$$\frac{a_1^2}{(v_1-c)^2}=\frac{\gamma_1 p_1}{\varrho_1(v_1-c)^2}=\frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}$$

et

$$\frac{a_2^2}{(v_2-c)^2}=\frac{\gamma_2 p_2}{\varrho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}.$$

Dans ces formules z_1 et z_2 sont définis par γ_1 et γ_2 respectivement; a_1 et a_2 sont les valeurs respectives de la vitesse du son.

Dans le plan z, V l'équation

$$\frac{z}{(V-\delta)^2}=\text{const}$$

définit une parabole. A l'intervalle

$$\frac{\gamma p}{\varrho(v-c)^2}=\alpha, \quad \frac{\gamma p}{\varrho(v-c)^2}=\beta$$

correspond dans le plan z, V le domaine situé entre deux paraboles

$$z=\alpha(V-\delta)^2 \quad \text{et} \quad z=\beta(V-\delta)^2.$$

L'équation (2.14) représente une équation quadratique définissant le rapport ϱ_1/ϱ_2 en fonction des quatre paramètres suivants : γ_1, γ_2, $p_1/\varrho_1 u^2$ et Q/u^2.

Le front de flamme est un saut de détente vérifiant les inégalités

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}>1, \quad \frac{\gamma_2 p_2}{\varrho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}>1, \quad \frac{\gamma_1 p_1}{\varrho_1(v_1-c)^2}=\frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}>1, \tag{2.15}$$

c'est-à-dire que la densité des produits de combustion est inférieure à celle du mélange de combustion et que les vitesses de propagation du saut par les particules (v_1-c) et (v_2-c) respectivement derrière et devant le front de flamme sont subsoniques.

Le front de détonation est un saut de compression pour lequel l'équation (2.14) fournit deux racines $\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$ et $\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}>\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}<1, \quad \frac{\gamma_2 p_2}{\varrho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}\geq 1, \quad \frac{\gamma_1 p_1}{\varrho_1(v_1-c)^2}=\frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}<1, \tag{2.16}$$

c'est-à-dire que la vitesse de propagation du saut par les particules est subsonique ou sonique derrière le saut et supersonique devant le saut;

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}<1, \quad \frac{\gamma_2 p_2}{\varrho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(v_2-\delta)^2}\leq 1, \quad \frac{\gamma_1 p_1}{\varrho_1(v_1-c)^2}=\frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}<1, \tag{2.16'}$$

c'est-à-dire que la vitesse du saut est supersonique derrière et devant le front du saut.

Les racines de l'équation (2.14) $\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$ et $\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}$ coïncident $\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}=\frac{\varrho_2}{\varrho_{22}}\right)$ si l'égalité suivante a lieu :

$$\gamma_2^2\left(1+\frac{p_1}{\varrho_1 u^2}\right)^2=(\gamma_2^2-1)\left[\frac{2\gamma_1}{\gamma_1-1}\,\frac{p_1}{\varrho_1 u^2}+1+\frac{2Q}{u^2}\right]. \tag{2.17}$$

Les relations (2.12) et (2.13) donnent

$$\frac{\gamma_2 p_2}{\varrho_2(v_2-c)^2}=\gamma_2\left(1+\frac{p_1}{\varrho_1 u^2}\right)\frac{\varrho_2}{\varrho_1}-\gamma_2; \tag{2.18}$$

en vertu de l'équation (2.14) on peut affirmer que l'égalité (2.17) équivaut à l'égalité

$$\frac{\gamma_2 p_2}{\varrho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}=1. \tag{2.19}$$

On en déduit que l'égalité des racines de l'équation (2.14) a lieu lorsque la vitesse du saut par rapport aux particules derrière le front du saut est exactement égale à la vitesse du son.

La condition (2.17), équivalente à la condition (2.19) au cas des sauts de compression, est dite règle de Chapman-Jouguet. Cette règle est souvent valable pour les écoulements réels du gaz en présence d'ondes de détonation. En s'aidant de l'équation supplémentaire (2.17) et connaissant les caractéristiques de l'état du gaz devant le front d'onde ϱ_1, p_1, ainsi que les valeurs de γ_1, γ_2, Q, on peut calculer la vitesse du front dans le cas général

$$u=v_1-c$$

et déterminer à partir de (2.12), (2.13), (2.14) les valeurs ϱ_2, p, v_2-c derrière le front d'onde de détonation.

Notons tout de suite*) que les problèmes ne manquent pas où la vitesse du front de détonation

$$u=|v_1-c|$$

est définie par la formulation du problème et s'obtient supérieure à u déduite de (2.17) d'après la règle de Chapman-Jouguet, de plus

$$a_2^2>(v_2-c)^2$$

en accord avec le signe d'inégalité dans (2.16).

D'un autre côté, comme l'a montré pour la première fois A. Grib, la condition de Chapman-Jouguet est automatiquement vérifiée dans bien des problèmes importants en vertu des conditions aux limites définissant l'écoulement du gaz que sont les produits de détonation.

Déjà à la fin du siècle dernier, Berthelot, Vieille, Mallard, Le Chatelier**) ont établi que les ondes de flamme représentent des sauts de détente et les ondes de détonation, des sauts de compression dans un milieu de combustion suivis d'une zone très mince, où ont lieu les réactions chimiques rapides accompagnées d'un dégagement de chaleur. Les principaux effets mécaniques accompagnant le phénomène de propagation stationnaire d'une détonation furent mis en évidence dans les travaux de V. Michelson (1889), Chapman (1899), E. Jouguet (1905) et L. Crussard (1907) et dans d'autres travaux.

Différents points de la zone de réaction chimique d'un milieu en mouvement stationnaire la quantité Q est différente; chaque état des produits de

*) On trouvera les exemples correspondants au § 8.

**) M. Berthelot, P. Vieille, C. r. Acad. Sci. Paris. 94, 101-8, séance du 16 Janvier 1882, E. Mallard, H. Le Chatelier, Ann. Mines, 8, ser. 4, 274, 1883.

réaction intermédiaires est caractérisé par sa valeur Q' et se déplace relativement aux particules du milieu devant le front de saut avec la même vitesse u. Evidemment, pour toute valeur intermédiaire Q' les valeurs correspondantes v_2', ϱ_2' et p_2' sont également liées par les relations (2.12), (2.13) et (2.14). Si l'on fixe ϱ_1 et p_1, on obtient dans le plan des variables p_2'/p_1, ϱ_1/ϱ_2' selon (2.13) une droite dite droite de Michelson*).

Ainsi donc, pour un état initial donné par p_1, ϱ_1 et connaissant u on peut aisément calculer dans l'intervalle de $Q'=0$ à $Q'=Q$ le long de la droite de Michelson toutes les caractéristiques du milieu en mouvement : v_2', ϱ_2', p_2', à partir de (2.12), (2.13) et (2.14), la température T_2' et l'entropie S_2' à partir des équations d'état.

Pour définir ces mêmes valeurs en fonction de la coordonnée suivant l'épaisseur de la zone de réaction chimique il suffit de déterminer l'une des valeurs indiquées en fonction de cette coordonnée. On établit cette dépendance en faisant appel à l'équation de la cinétique des réactions chimiques. Bien souvent ces équations ne sont pas suffisamment étudiées, ce qui explique pourquoi la structure de l'onde de détonation n'est toujours pas élucidée. Vu la minceur de la couche de réaction chimique, on peut souvent résoudre les problèmes de la gazodynamique en se bornant à calculer les sauts de détonation où l'onde de détonation est supposée infiniment mince et en considérant que sont vérifiées les conditions à la discontinuité (2.12), (2.13) et (2.14) pour Q donné.

L'étude remontant aux travaux de Michelson montre que dans les gaz sont valables les inégalités

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} < \frac{\varrho_1}{\varrho_{21}} \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_{22}},$$

où ϱ_2 est la densité derrière le front de l'onde de choc avant la réaction chimique pour $Q'=0$, et $\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$, $\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}$ sont les racines de l'équation (2.14) pour Q donné. Sur l'intervalle $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, $\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$ de variation de la densité de la droite de Michelson, la chaleur dégagée $Q'\left(\frac{\varrho'}{\varrho_2'}\right)$ croît régulièrement de 0 à Q. La variation ultérieure continue de $\frac{\varrho_1}{\varrho_2'}$ le long de la droite de Michelson de $\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$ à $\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}$ s'accompagne, en vertu de (2.12), (2.13) et (2.14), d'une variation non régulière de Q'; on observe d'abord un dégagement de chaleur de sorte que Q' dépasse Q suivi d'une absorption de chaleur qui fait que Q' diminue jusqu'à Q au point $\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}$. Il en découle que si dans la zone de l'onde de détonation les réactions chimiques se déroulent de façon continue et la valeur

*) V. Michelson, Mémoires de l'Univ. Impér. de Moscou, faculté phys.-math., op. 10, 1893.

$Q'\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)$ de façon régulière, l'état correspondant à la racine*) $\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}$ ne peut se réaliser derrière le front de détonation. Au point $\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$ derrière le front de l'onde de détonation la vitesse de propagation de la détonation par les particules est subsonique ou exactement égale à celle du son au point de Jouguet.

Si la vitesse de détonation u est rigoureusement subsonique, il y a évidemment une interaction de l'onde de détonation avec le flux gazeux des produits de détonation, c'est-à-dire avec le flux gazeux régi par les conditions aux limites derrière l'onde de détonation. C'est précisément cette circonstance établie pour la première fois en 1939-1940 dans la thèse de A. Grib qui pour divers problèmes concrets éclaircit la question des valeurs éventuelles de la vitesse de détonation lors de la propagation d'une onde de détonation par les particules.

Pour de faibles contre-pressions derrière le flux à cause de l'affaiblissement du saut de détonation en interaction avec le flux des produits de détonation, le front de détonation ne peut progresser par les particules non perturbées qu'à la vitesse minimale u, associée au point de Jouguet, pour laquelle la vitesse de propagation du front par les particules qui le suivent est égale à la vitesse locale du son derrière le front de détonation. Pour de grandes contre-pressions derrière le front de détonation, assurées par les conditions aux limites appropriées, sont possibles également les régimes de propagation de la détonation répondant aux vitesses dépassant les valeurs de u d'après Jouguet et telles que la vitesse de propagation du front par les particules derrière le front est subsonique :

$$(v_2-c)^2<a_2^2$$

en accord avec le signe d'inégalité dans (2.16).

4. Lien entre la température et la vitesse derrière les sauts. Sans restreindre la généralité, on peut poser $v_1=0$, i.e. il est toujours possible d'étudier les mouvements par rapport au gaz devant le saut.

Les relations mécaniques (2.5) conduisent à l'égalité

$$\chi=\frac{v_2^2}{RT_2}=\frac{v_2^2\varrho_2}{p_2}=\frac{\left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2}{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\left[\left(1+\frac{p_1}{\varrho_1 c^2}\right)-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right]}. \tag{2.20}$$

Le rapport ϱ_1/ϱ_2 pour les sauts de compression est inférieur à l'unité. La fonction sans dimension $\chi(\varrho_1/\varrho_2,\ p_1/\varrho_1 c^2)$ est positive et monotone par

*) Evidemment, la condition stipulant que la fonction $Q'\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)$ est monotone suffit pour exclure la racine $\frac{\varrho_1}{\varrho_{22}}$. D'autre part, pour que la racine $\frac{\varrho_1}{\varrho_{21}}$ puisse se réaliser derrière le front de détonation, la condition de monotonie de la fonction $Q'\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)$ dans la zone de la réaction chimique n'est pas nécessaire.

rapport à ses deux arguments pour

$$\frac{p_1}{\varrho_1 c^2}>0 \quad \text{et} \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2}<1,$$

d'où il découle que dans le cas général, indépendamment de l'équation de l'énergie, la quantité χ atteint un maximum pour les sauts de compression correspondant à $p_1/\varrho_1 c^2=0$ et $(\varrho_1/\varrho_2)_{\min}$:

$$\chi_{\max}=\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)_{\max}-1. \tag{2.21}$$

Manifestement, la plus grande compression ϱ_2/ϱ_1 s'observe pour les ondes de choc simples ou pour les ondes avec absorption supplémentaire d'énergie. S'il y a apport d'énergie et, en particulier, en cas d'une flamme ou d'ondes de détonation les valeurs $(\varrho_2/\varrho_1)_{\max}$ et $\chi_{\max}$ sont plus petites. Il découle des conditions au saut que pour les ondes simples fortes la valeur maximum du rapport ϱ_2/ϱ_1 est égale à $(\gamma+1)/(\gamma-1)$, si bien que

$$\chi_{\max}=\frac{2}{\gamma-1}. \tag{2.22}$$

Pour les ondes de détonation fortes $(p_1/\varrho_1 c^2=0)$ satisfaisant à la condition de Chapman-Jouguet l'équation (2.14) fournit

$$\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)_{\max}=\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2}$$

et donc

$$\chi_{\max}=\frac{1}{\gamma_2}.$$

Les bornes supérieures établies pour χ permettent d'évaluer la température en arrière du front d'après les valeurs des vitesses des particules gazeuses en arrière du front.

L'on connaît la vitesse des particules gazeuses dans de nombreux cas; lorsqu'un corps se déplace dans un gaz au repos, la vitesse relative de celui-ci est égale à la vitesse du corps; en astrophysique on évalue la vitesse des particules gazeuses dans les nébuleuses ou les photosphères stellaires en examinant les spectres.

Par exemple, si dans l'hydrogène la vitesse derrière le front est de 1000 km/s, la température y dépasse 50 millions de degrés Celsius.

5. Conditions au front du saut pour les écoulements automodèles lorsqu'il y a apport de chaleur. C'est le cas où la constante Q est caractéristique; comme $[Q]=\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}$, on peut poser $m=2$, $n=-2$, soit $\delta=1$, et donc

$$\lambda=\frac{\beta r}{\sqrt{Qt}},$$

où β est une constante que l'on se donne comme l'on veut. Désignons par A la seconde constante dimensionnée en donnant sa dimension par la formule

$$[A]=\mathrm{M}\mathrm{L}^{\omega-3},$$

ce qui est toujours légitime.

L'écoulement étant automodèle, la densité et la pression à l'instant $t=0$ doivent vérifier les formules suivantes

$$\varrho_1=k_1\frac{A}{r^\omega},\quad p_1=k_2\frac{AQ}{r^\omega},\tag{2.23}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes. Si l'on admet que l'état initial correspond à l'équilibre en l'absence des forces massiques, il en découlera $k_2=0$ pour $\omega\neq 0$ de sorte que dans un milieu non perturbé en équilibre on a

$$p_1=0.\tag{2.24}$$

Si $\omega=0$, alors $p_1=\text{const}$, donc p_1 peut différer de zéro en équilibre.

Pour les écoulements automodèles, avec l'apport de chaleur, les conditions au saut prennent la forme :

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{R}_1(V_1-1)=\mathcal{R}_2(V_2-1),\\&V_1-1+\frac{z_1}{\gamma_1(V_1-1)}=V_2-1+\frac{z_2}{\gamma_2(V_2-1)},\\&\frac{1}{2}(V_1-1)^2+\frac{z_1}{\gamma_1-1}+\frac{Q}{c^2}=\frac{1}{2}(V_2-1)^2+\frac{z_2}{\gamma_2-1},\end{aligned}\right\}\tag{2.25}$$

avec de plus $\lambda=\lambda^*=\text{const}$ sur le saut.

La propagation du saut est régie par la loi

$$r_2=\frac{\lambda^*}{\beta}\sqrt{Q}t,\quad c=\frac{dr_2}{dt}=\frac{\lambda^*}{\beta}\sqrt{Q}=\frac{r_2}{t},\quad \frac{\beta^2}{\lambda^{*2}}=\frac{Q}{c^2}.$$

S'il y a plusieurs sauts, on peut toujours poser $\lambda^*=1$ sur l'un d'eux. On fixe par cela la constante β.

La règle de Chapman-Jouguet (2.19) donne

$$z_2=(V_2-\delta)^2.\tag{2.26}$$

Ainsi donc, si la condition de Chapman-Jouguet a lieu, au front de détonation doit correspondre, dans le plan z, V, un point de la parabole (2.26).

Si le saut se propage au sein d'un gaz au repos, alors $V_1=0$; on obtient de (2.25) :

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{R}_2=\mathcal{R}_1\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1}\left(1+\frac{z_1}{\gamma_1}\right)(1-\Lambda)\right]^{-1},\\&V_2=1-\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1}\left(1+\frac{z_1}{\gamma_1}\right)(1-\Lambda)\right],\\&z_2=\frac{\gamma_2^2}{(\gamma_2+1)^2}\left(1+\frac{z_1}{\gamma_1}\right)^2(1-\Lambda)(1+\gamma_2\Lambda)\\&\text{avec}\\&\Lambda^2=1-\frac{(\gamma_2^2-1)\left[\frac{2}{\gamma_1-1}z_1+1+\frac{2Q}{c^2}\right]}{\gamma_2^2\left(1+\frac{z_1}{\gamma_1}\right)^2}.\end{aligned}\right\}\tag{2.27}$$

La condition de Chapman-Jouguet équivaut à l'égalité $\Lambda=0$. Si la condition de Chapman-Jouguet n'est pas remplie et si en outre $V_1=z_1=0$, alors

$$\mathcal{R}_2=\mathcal{R}_1\frac{(\gamma_2+1)}{\gamma_2(1-\Lambda)},\quad V_2=\frac{1+\gamma_2\Lambda}{\gamma_2+1},\quad z_2=\frac{\gamma_2^2}{(\gamma_2+1)^2}(1-\Lambda)(1+\gamma_2\Lambda). \tag{2.28}$$

Les valeurs V_2, z_2 derrière le saut se situent sur la parabole

$$z_2=\gamma_2V_2(1-V_2). \tag{2.29}$$

Le point de Chapman-Jouguet correspond au point d'intersection des paraboles (2.26) et (2.29) où $\Lambda=0$. La parabole (2.29) passe par l'origine des coordonnées où $\Lambda=-1/\gamma_2$. En se déplaçant vers le haut par rapport à l'origine des coordonnées suivant la parabole (2.29) Λ croît, s'annule sur la parabole (2.26), puis augmente en tendant vers $\Lambda=+1/\gamma_2$, ce qui correspond à une onde de choc simple forte ($Q=0$).

§ 3. Intégrales algébriques pour les mouvements automodèles

En s'appuyant sur les raisonnements dimensionnels on parvient à établir les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires décrivant les mouvements automodèles indépendamment des conditions particulières aux limites ou des conditions initiales. En d'autres termes, il s'avère toujours possible d'abaisser l'ordre d'un système d'équations ordinaires.

On montrera par la suite qu'on peut augmenter le nombre de telles intégrales dans des exemples particuliers de dimensions des constantes a et b. Les résultats qui suivent demeurent valables dans des cas plus généraux que celui de l'écoulement du gaz décrit par le système (1.3).

Pour être plus concrets, considérons les écoulements unidimensionnels non stationnaires adiabatiques d'un gaz parfait en tenant compte de l'attraction newtonienne dans le cas d'ondes sphériques, écoulements décrits par le système d'équations

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial\varrho v}{\partial r}+\frac{(\nu-1)\varrho v}{r}=0; \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial r}=\sigma_\nu\varrho r^{\nu-1}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{f\mathcal{M}}{r^{\nu-1}}=0; \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+v\frac{\partial S}{\partial r}=0, \tag{3.4}$$

où $\sigma_\nu=2(\nu-1)\pi+\frac{1}{2}(\nu-2)(\nu-3)$, $\nu=3$ dans le cas d'ondes sphériques, f est la constante gravitationnelle, $[f]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$. On étudiera en même temps le cas d'ondes cylindriques*) ($\nu=2$) et d'ondes planes ($\nu=1$) lorsque $f=0$;

*) Pour $\nu=2$ on peut tenir compte des forces de gravitation dans les déductions ultérieures.

$\mathcal{M}$ est la masse comprise entre la surface coordonnée fixe et la surface envisagée, $[\mathcal{M}]=\mathrm{ML}^{\nu-3}$; S est l'entropie ou une certaine fonction de l'entropie.

Examinons les écoulements automodèles définis par deux constantes dimensionnées a, b*)

$$[a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s \quad \text{et} \quad [b]=\mathrm{L}^m\mathrm{T}^n.$$

Pour $m\neq 0$, sans restreindre la généralité, on peut admettre que $m=1$, $n=-\delta$ et $k=-3$. Il suffit de poser

$$a_1=ab^{(-k-3)/m} \quad \text{et} \quad b_1=b^{1/m}.$$

Si l'on tient compte des forces d'attraction universelle pour $k=-3$, il faut poser $[a]=[1/f]$, donc $s=2$, de sorte que le seul paramètre essentiel sera l'exposant δ. Lorsque $f=0$, l'exposant s peut être arbitraire.

Dans le cas général des écoulements automodèles, pour $m\neq 0$, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} &\lambda=\frac{r}{b_1 t^{\delta}}; \quad v=\frac{r}{t}V(\lambda); \quad \varrho=\frac{a}{r^{k+3}t^{s}}\mathcal{R}(\lambda);\\ &p=\frac{ar^2}{r^{k+3}t^{s+2}}P(\lambda); \quad \mathcal{M}=\frac{ar^{\nu}}{r^{k+3}t^{s}}M(\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

En portant (3.5) dans les équations (3.1) à (3.4) on obtient un système de quatre équations différentielles ordinaires pour

$$V(\lambda),\ \mathcal{R}(\lambda),\ P(\lambda) \quad \text{et} \quad M(\lambda).$$

Sans écrire ce système d'équations nous allons déterminer ses intégrales algébriques, relations finies entre

$$V,\ \mathcal{R},\ P,\ M \quad \text{et} \quad \lambda.$$

1. Intégrale des masses. L'équation (3.2) donne

$$\mathcal{M}''-\mathcal{M}'=\int_{\mathcal{M}'}^{\mathcal{M}''} d\mathcal{M}=\sigma_\nu\int_{r'}^{r''}\varrho r^{\nu-1}\,dr.$$

Soient des surfaces mobiles $r'(t)$ et $r''(t)$ sur lesquelles le paramètre λ prend les valeurs constantes λ' et λ''. On vérifie sans peine l'identité suivante valable pour toute fonction $F(r, t)$:

$$\frac{d}{dt}\int_{r'}^{r''} F\sigma_\nu\varrho r^{\nu-1}\,dr=\frac{\tilde{d}}{dt}\int_{r'}^{r''} F\sigma_\nu\varrho r^{\nu-1}\,dr+\left[F\sigma_\nu\varrho r^{\nu-1}\left(\frac{dr}{dt}-v\right)\right]_{r'}^{r''}, \tag{3.6}$$

*) L'entropie S exprimée par p et ϱ ne doit pas contenir de constantes dimensionnées essentielles indépendantes de a et de b. Il va de soi que les constantes sommes ou produits formées à partir de a et b ne sont pas essentielles.

où l'opérateur $\tilde{d}/dt$ signifie la dérivation par rapport au temps effectuée sur un volume d'intégration mobile constitué des mêmes particules gazeuses.

Comme

$$\mathcal{M}''-\mathcal{M}'=\frac{ab_1^{\nu-k-3}}{t^{s+\delta(k+3-\nu)}}\left[\lambda''^{\nu-k-3}M(\lambda'')-\lambda'^{\nu-k-3}M(\lambda')\right],$$

alors

$$\left.\frac{d(\mathcal{M}''-\mathcal{M}')}{dt}\right|_{\substack{\lambda''=\text{const}\\ \lambda'=\text{const}}}=-\frac{s+\delta(k+3-\nu)}{t}(\mathcal{M}''-\mathcal{M}').$$

En vertu de la loi de conservation des masses on a

$$\frac{\tilde{d}(\mathcal{M}''-\mathcal{M}')}{dt}=0.$$

De sorte que l'égalité (3.6) pour $F=1$ donne

$$-\frac{s+\delta(k+3-\nu)}{t}(\mathcal{M}''-\mathcal{M}')=\sigma_\nu\left[\varrho r^{\nu-1}\left(\frac{dr}{dt}-v\right)\right]_{r'}^{r''}.$$

D'où, en utilisant les formules (3.5) et les égalités $\frac{dr'}{dt}=\delta\frac{r'}{t}$, $\frac{dr''}{dt}=\delta\frac{r''}{t}$, on obtient l'intégrale

$$\lambda^{\nu-k-3}\{[s+\delta(k+3-\nu)]M-\sigma_\nu\mathcal{R}(V-\delta)\}=C=\text{const}, \tag{3.7}$$

qui, étant la conséquence de la loi de conservation des masses, est toujours vraie. S'il n'y a pas de forces d'attraction universelle, l'intégrale (3.7) peut être interprétée indépendamment des équations du mouvement comme une formule, explicitant sous forme finie $M(\lambda)$ par λ, V et $\mathcal{R}$. Si l'on tient compte des forces gravitationnelles, $M(\lambda)$ entre dans une équation différentielle ordinaire déduite de l'équation des impulsions. En s'aidant de l'intégrale (3.7) on peut éliminer la fonction $M(\lambda)$ de cette équation. Si pour la solution analysée $\mathcal{M}=0$ ou $\mathcal{M}=\text{const}$ pour $\lambda=0$, c'est-à-dire si le centre de symétrie est dépourvu de sources massiques de débit fini ou infini, alors en posant $\lambda'=0$ et $r'=0$ il découle de la déduction de l'intégrale (3.7) que la constante C y est nulle.

S'il se forme à $t>0$ une cavité au voisinage du centre de symétrie avec $\lambda'=\text{const}$ et $\mathcal{M}'=0$ sur sa surface, la vitesse des particules portées par la cavité coïncide avec la vitesse de dilatation $v=dr'/dt$. Dans ce cas on obtient également $C=0$.

Les cas cités correspondent aux solutions vérifiant la loi de conservation des masses non seulement en chaque point régulier du flux pour $r\neq 0$, mais également au point singulier du flux qu'est le centre de symétrie pour $t\geq 0$.

Si la loi de conservation des masses n'est pas remplie pour $r=0$, le centre de symétrie peut abriter une source massique; dans ce cas C peut différer de zéro.

En l'absence de sources massiques au centre de symétrie la variable $\mathcal{M}$ peut être considérée comme une coordonnée lagrangienne; dans le cas contraire pour $V\neq\delta$, on peut choisir en qualité de coordonnée lagrangienne

la variable $\tilde{\mathcal{M}}=\varrho r^{\nu}(V-\delta)$ ayant la dimension de la masse. On vérifie aisément la validité de l'égalité

$$\frac{d\tilde{\mathcal{M}}}{dt}=0$$

à l'aide de l'équation de continuité.

Pour $C=0$ les variables $\mathcal{M}$ et $\tilde{\mathcal{M}}$ ne diffèrent que par un facteur numérique.

Le cas $V=\delta$ correspond à la solution particulière caractérisée par une distribution linéaire des vitesses selon le rayon r, $v=\delta\frac{r}{t}$; c'est le cas où $\lambda=\text{const}$ dans les particules de sorte que la variable adimensionnée λ est une coordonnée lagrangienne.

2. Intégrale d'adiabacité. Pour les écoulements adiabatiques réversibles du gaz il existe une autre intégrale*), conséquence de la loi de conservation de l'entropie dans une particule.

Soit $\Phi(p, \varrho)=f(S)$ une fonction de l'entropie. La loi de variation de l'entropie S en fonction de p et ϱ peut être arbitraire. La condition de constance de l'entropie (3.4) dans une particule équivaut à la relation de la forme

$$\Phi(p, \varrho)=F(\tilde{\mathcal{M}}, a, b, \alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

où α_1, α_2 sont des constantes abstraites, $\tilde{\mathcal{M}}$ une coordonnée lagrangienne.

Ecrivons la formule de dimension de Φ. Soit

$$[\Phi]=\mathrm{M}^{\omega}\mathrm{L}^{\mu}\mathrm{T}^{\varkappa}.$$

Si quel que soit $\varkappa$ l'égalité $[ab_1^{\varkappa}]=[\tilde{\mathcal{M}}]$**) n'existe pas, on ne peut pas former à partir des trois paramètres a, b_1, $\tilde{\mathcal{M}}$ une combinaison adimensionnée de sorte que l'équation suivante a lieu :

$$\Phi(p, \varrho)=\tilde{\mathcal{M}}^{\omega}\left(\frac{ab_1^{\frac{s}{\delta}}}{\tilde{\mathcal{M}}}\right)^{\frac{[\mu-\alpha(\nu-3)]\delta}{s+\delta(k+3-\nu)}}\left(\frac{ab_1^{\nu-k-3}}{\tilde{\mathcal{M}}}\right)^{\frac{\varkappa}{s+\delta(k+3-\nu)}}f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots). \qquad (3.8)$$

En substituant dans (3.8) les p, ϱ, $\tilde{\mathcal{M}}$ d'après les formules (3.5) on obtient une relation finie entre V, $\mathcal{R}$, P et λ qui est précisément l'intrégrale des équations de continuité et d'adiabacité.

---

*) M. Lidov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 103, n° 1, 1955.

**) Puisque

$$\tilde{\mathcal{M}}=\frac{ab_1^{\nu-k-3}}{t^{s+\delta(k+3-\nu)}}\lambda^{\nu-k-3}M(\lambda),$$

l'égalité $[ab_1^{\varkappa}]=[\tilde{\mathcal{M}}]$ est possible à condition que $s+\delta(k+3-\nu)=0$ et $\varkappa=\nu-k-3$; dans ce cas l'intégrale (3.7) donne $\lambda^{\nu-k-3}\mathcal{R}(V-\delta)=C$. Si $C=0$, alors $V=\delta$ et par conséquent $v=\delta r/t$. Cette solution particulière sera étudiée au § 15.

S'il existe, pour un certain $\varkappa$, une combinaison abstraite $ab_1^{\varkappa}/\tilde{\mathcal{M}}$, la valeur f peut être une fonction de $ab_1^{\varkappa}/\tilde{\mathcal{M}}$, éventuellement inconnue au préalable, c'est pourquoi dans ce cas particulier l'équation différentielle d'adiabacité ne se remplace en général pas par une relation finie qu'est l'intégrale.

Si le gaz est parfait, on peut poser $\Phi=p/\varrho^{\gamma}$; on a alors

$$\omega=1-\gamma; \quad \mu=3\gamma-1; \quad \varkappa=-2.$$

L'intégrale d'adiabacité prend la forme

$$\frac{P}{\mathcal{R}^{\gamma}}=[\mathcal{R}\lambda^{\nu}(V-\delta)]^{\frac{2-(\gamma-1)s+\delta[k+1-\gamma(k+3)]}{s+\delta(k+3-\nu)}}\times$$
$$\times\lambda^{-\frac{[2+\nu(\gamma-1)]s+2(k+3-\nu)}{s+\delta(k+3-\nu)}}f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots). \tag{3.9}$$

Grâce aux intégrales des masses et d'adiabacité l'ordre du système d'équations ordinaires s'est abaissé de quatre à deux.

3. Intégrale d'énergie. Comme il sera montré plus bas, cette intégrale existe*) si l'on peut former à partir des constantes caractéristiques a et b_1 une constante de dimension $\mathrm{ML}^{\nu-1}\mathrm{T}^{-2}$ égale à la dimension de l'énergie en cas d'une symétrie sphérique ou à la dimension de l'énergie par unité de longueur ou de surface en cas de symétries cylindrique et plane respectivement.

Traitons d'abord le cas où les forces de gravitation sont absentes mais généralisons à $\nu=1, 2, 3$.

Pour l'énergie totale entre les surfaces de coordonnées mobiles $r'(t)$ et $r''(t)$ on a la formule

$$\mathcal{E}=\int_{r'}^{r''}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)\sigma_{\nu}\varrho r^{\nu-1}\,dr,$$

où ε est l'énergie interne par unité de masse. La variation d'énergie des particules comprises à l'instant considéré entre les surfaces $r''=\text{const}$ et $r'=\text{const}$ est égale au travail des forces de pression sur ces surfaces; de sorte que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}=-\sigma_{\nu}(p''v''r''^{\nu-1}-p'v'r'^{\nu-1}).$$

Ensuite, selon la théorie dimensionnelle, pour tous mouvements automodèles ($m\neq 0$) la valeur $\mathcal{E}$ de dimension $\mathrm{ML}^{\nu-1}\mathrm{T}^{-2}$ vérifie la formule de la forme

$$\mathcal{E}=ab_1^{\nu-1-k}t^{\delta(\nu-1-k)-2-s}f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \alpha_2, \ldots),$$

où $f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \ldots)$ est une fonction abstraite. Admettons maintenant que

*) L. Sédov, « Prikladnaïa mathematika i mekhanika », t. X, op. 2, 1946.

$r'(t)$ et $r''(t)$ sont définis par les conditions $\lambda'=\text{const}$ et $\lambda''=\text{const}$. Cela étant, il vient dans le cas général

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}=[\delta(\nu-1-k)-2-s]\frac{\mathcal{E}}{t}.$$

Dès lors, en s'aidant de ces formules, des formules (3.5) et de la relation (3.6) où l'on remplace $F(r, t)$ par $v^2/2+p/(\gamma-1)\varrho$ (on pose pour fixer les idées que $\varepsilon=p/(\gamma-1)\varrho$), on établit aisément la relation qui suit, valable pour tous écoulements automodèles du gaz :

$$[s+2-\delta(\nu-1-k)]f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \alpha_2, \ldots)=$$
$$=\sigma_\nu\left\{\lambda^{\nu-1-k}\left[PV+(V-\delta)\left(\frac{\mathcal{R}V^2}{2}+\frac{P}{\gamma-1}\right)\right]\right\}''_{\lambda'}.$$

La relation obtenue contient une fonction inconnue $f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ qui s'en élimine si

$$s-\delta(\nu-1-k)=-2. \tag{3.10}$$

Ainsi avec la condition (3.10) on obtient une autre intégrale essentielle

$$\lambda^{\nu-1-k}\left[PV+(V-\delta)\left(\frac{\mathcal{R}V^2}{2}+\frac{P}{\gamma-1}\right)\right]=\text{const}, \tag{3.11}$$

qui découle de la loi de conservation de l'énergie. Se souvenant que dans les opérations précédentes on a posé $m=1$, on voit sans peine que la condition (3.10) équivaut à l'égalité

$$[\mathcal{E}]=[ab_1^{\nu-1-k}].$$

Par conséquent, l'existence de l'intégrale d'énergie est équivalente à la condition que la constante $ab_1^{\nu-1-k}$ a la dimension de l'énergie $\mathcal{E}$; les mouvements automodèles correspondants peuvent se définir par la constante $\mathcal{E}$ et la constante b_1 : $[b_1]=\mathrm{LT}^{-\delta}$, l'exposant δ étant arbitraire.

Il va de soi que l'égalité

$$\varepsilon=\frac{p}{(\gamma-1)\varrho}$$

est non essentielle; il est possible d'écrire une intégrale analogue à l'intégrale (3.11) pour d'autres fonctions $\varepsilon(p, \varrho)$ si l'autosimilitude a lieu.

Considérons encore le cas de l'écoulement du gaz à symétrie sphérique en tenant compte de l'attraction newtonienne.

S'il y a symétrie sphérique, l'énergie totale des particules gazeuses dans un volume O limité par deux sphères de rayons r'' et r' vérifie la formule

$$\mathcal{E}=\int_{r'}^{r''}\left[\frac{\varrho v^2}{2}+\varrho\varepsilon-\frac{\varrho f(\mathcal{M}-\mathcal{M}')}{r}\right]4\pi r^2\,dr. \tag{3.12}$$

Le premier terme de la fonction sous le signe somme traduit l'énergie cinétique; le second, l'énergie thermique interne, et le troisième, la contribu-

tion à l'énergie interne des forces d'interaction internes d'attraction gravitationnelle. La masse du gaz à l'intérieur de la sphère de rayon r' est désignée par $\mathcal{M}'$. Eclaircissons la formule pour l'énergie interne d'interaction gravitationnelle des masses gazeuses. Cette formule est déduite en supposant nulle l'énergie d'interaction pour deux particules matérielles infiniment éloignées l'une de l'autre. L'énergie potentielle d'interaction de deux particules matérielles de masses m_1 et m_2 est évidemment égale à

$$-\frac{fm_1m_2}{r_{12}}.$$

On sait que la couche sphérique matérielle de masse totale $\mathcal{M}_1$ et dont la densité ne dépend que du rayon (fig. 37) agit sur un point extérieur A de masse m_2 comme un point matériel de masse $\mathcal{M}_1$ placé au centre de la couche sphérique.

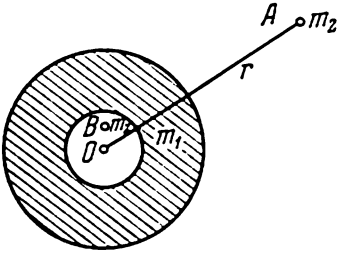


Fig. 37. Une couche sphérique attire un point extérieur A comme un point matériel placé au centre O. La résultante de l'attraction exercée par la couche sur un point intérieur B est nulle

La force résultante d'attraction exercée par la couche sphérique sur un point intérieur B est exactement nulle. C'est pourquoi l'énergie potentielle d'interaction de la couche sphérique de masse $\mathcal{M}_1$ et d'un point matériel de masse m_2, situé à une distance r du centre de la couche sphérique, est donnée par la formule

$$-\frac{f\mathcal{M}_1m_2}{r}.$$

L'énergie potentielle d'interaction de la couche sphérique avec le point B est égale à zéro.

La masse de la couche sphérique entre les sphères de rayons r et r' étant $\mathcal{M}-\mathcal{M}'$, l'énergie potentielle d'interaction des masses à l'intérieur du volume O compris entre les sphères r' et r'' est donnée par la formule

$$-\int_{r'}^{r''}\frac{f(\mathcal{M}-\mathcal{M}')\,d\mathcal{M}}{r}=-\int_{r'}^{r''}\frac{f(\mathcal{M}-\mathcal{M}')\varrho 4\pi r^2\,dr}{r}.$$

En appliquant la loi de conservation de l'énergie à la masse à l'intérieur du volume O on a

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}=\frac{dA^{(e)}_{surf}}{dt}+\frac{dA^{(e)}_{mass}}{dt}+\frac{dQ^{(e)}}{dt},$$

où $dA^{(e)}_{surf}/dt$ est le travail en unité de temps des forces surfaciques extérieures, défini par l'égalité

$$\frac{dA^{(e)}_{surf}}{dt}=-p''v''4\pi r''^2+p'v'4\pi r'^2.$$

$dA^{(c)}_{\text{mass}}/dt$ est le travail en unité de temps des forces massiques extérieures de gravitation équivalentes à la force d'attraction d'un point matériel de masse $\mathcal{M}'$ placé au centre de symétrie. Le travail de cette force en unité de temps appliqué à l'élément $d\mathcal{M}$ est égal à

$$-\frac{f\mathcal{M}'\,d\mathcal{M}}{r^2}\frac{dr}{dt}=f\mathcal{M}'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathcal{M}}{r}\right).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{dA^{(c)}_{\text{mass}}}{dt}=f\mathcal{M}'\frac{\tilde{d}}{dt}\int\limits_{r'}^{r''}\frac{4\pi r^2\varrho\,dr}{r},$$

où $dQ^{(c)}/dt$ est l'apport extérieur de chaleur en unité de temps, nul car la transformation est adiabatique par hypothèse.

On en déduit que pour les particules gazeuses incluses à l'instant considéré dans le volume O la loi de conservation de l'énergie conduit à l'équation

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\int\limits_{r'}^{r''}\left[\frac{\varrho v^2}{2}+\varrho\varepsilon-\frac{\varrho f\mathcal{M}}{r}\right]4\pi r^2\,dr=4\pi(r'^2p'v'-r''^2p''v''). \tag{3.13}$$

Pour une compression adiabatique gravitationnelle lente des sphères gazeuses ($v=0$) en l'absence du travail de forces extérieures, ce qui est le cas pour les étoiles, l'équation (3.13) donne

$$\int\limits_0^R \varepsilon\,d\mathcal{M}=\int\limits_0^R\frac{f\mathcal{M}}{r}\,d\mathcal{M}+\text{const}.$$

Comme le second membre s'accroît lorsqu'il y a compression, la température du gaz doit évidemment s'élever. Lors d'une compression, l'énergie thermique du rayonnement est fournie aux dépens de l'énergie gravitationnelle.

Si l'écoulement du gaz est automodèle avec les constantes de définition

$$[a]=\left[\frac{1}{f}\right]=\mathrm{ML^{-3}T^2}\quad(k=-3,\ s=2)\quad\text{et}\quad[b_1]=\mathrm{LT^{-\delta}},$$

on a la formule

$$\mathcal{E}^*=\int\limits_{r'}^{r''}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon-\frac{f\mathcal{M}}{r}\right)d\mathcal{M}=f^{-1}b_1^5t^{5\delta-4}f(\lambda',\lambda''). \tag{3.14}$$

Servons-nous maintenant de la relation (3.6) dans laquelle nous posons

$$F=\frac{v^2}{2}+\varepsilon-\frac{f\mathcal{M}}{r}.$$

Compte tenu de (3.13) et (3.14), il vient

$$\frac{5\delta-4}{t}\mathcal{E}^*=\left\{4\pi r^2\left[pv+\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon-\frac{f\mathcal{M}}{r}\right)\varrho\left(v-\frac{dr}{dt}\right)\right]\right\}'_{,,};$$

d'où, en vertu des formules (3.5) pour $\varepsilon=p/(\gamma-1)\varrho$, on a

$$(5\delta-4)f(\lambda',\lambda'')=\left\{4\pi\lambda^5\left[PV+\left(\frac{V^2}{2}+\frac{P}{(\gamma-1)\mathcal{R}}-M\right)\mathcal{R}(V-\delta)\right]\right\}'_{,,}.$$

La fonction inconnue $f(\lambda',\lambda'')$ s'élimine de cette relation si $\delta=\frac{4}{5}$. Ainsi donc pour $\delta=\frac{4}{5}$ on a encore une intégrale

$$\lambda^5\left[PV+\left(\frac{\mathcal{R}V^2}{2}+\frac{P}{\gamma-1}-\mathcal{R}M\right)\left(V-\frac{4}{5}\right)\right]=\text{const.} \tag{3.15}$$

Si $\delta=\frac{4}{5}$, alors

$$\left[\frac{1}{f}b_1^{-5}\right]=\mathrm{ML^2T^{-2}}=[\mathcal{E}^*].$$

Par conséquent, il est possible dans ce cas de prendre en tant que constantes dimensionnelles indépendantes la constante gravitationnelle f et une certaine énergie $\mathcal{E}^*$.

4. Intégrale d'impulsion. Considérons encore le cas des écoulements unidimensionnels non stationnaires par ondes planes où il s'avère possible de former à partir des constantes caractéristiques a et b une constante $c=ab^\varkappa$, avec un certain $\varkappa$, ayant la dimension de l'impulsion par unité de surface $[c]=\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$. Dans ce cas il suffit de poser $k=-1$, $s=-1$ pour obtenir par des raisonnements analogues aux précédents l'intégrale

$$P-(V-\delta)\mathcal{R}V=\text{const.} \tag{3.16}$$

La variable λ peut être éliminée des intégrales parmi (3.7), (3.9), (3.11) et (3.15) pour peu qu'on choisisse correctement l'indice k qu'on peut varier si l'on remplace la constante a par la constante $a_1=ab^\varkappa$ où $\varkappa$ peut prendre des valeurs quelconques.

Les méthodes développées ci-dessus sont appliquées à la recherche des intégrales pour les solutions linéarisées des écoulements transautomodèles*) et pour toutes les approximations**) qu'on obtient en développant en séries des solutions non automodèles par rapport aux fonctions automodèles.

On a établi dans ce qui précède les intégrales finies des équations différentielles ordinaires pour les écoulements automodèles d'un gaz. La déduction s'appuyait sur les considérations dimensionnelles et sur les théorèmes

*) M. Lidov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 102, n° 6, 1955.

**) V. Korobeïnikov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 104, n° 4, 1955.

généraux de la mécanique découlant des équations du mouvement. Des considérations générales montrent clairement que les intégrales peuvent également être obtenues par le calcul formel du système d'équations ordinaires.

Les intégrales obtenues existent puisqu'elles sont déduites du système d'équations ordinaires qui garde sa forme pour d'autres formulations de problèmes, en particulier, pour les écoulements polytropiques du gaz parfait lorsque $\gamma \neq c_p/c_v$, c'est-à-dire lorsque l'entropie est variable dans la particule et lorsqu'il y a apport extérieur de chaleur.

§ 4. Ecoulements tendant vers des écoulements automodèles

Si l'on dispose d'une famille de solutions automodèles, fonctions de plusieurs arguments, on peut, en utilisant certains passages à la limite, construire d'autres familles de solutions exactes pour les mêmes équations aux dérivées partielles. Illustrons cela sur un exemple.

Prenons une solution de la forme (3.5) et écrivons-la sous la forme

$$\left.\begin{aligned} v=\frac{r}{t+t_0}\,\delta\tilde{V}(\lambda);\quad \varrho=\frac{a\delta^s\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)}{r^{k+3}(t+t_0)^s};\\ p=\frac{a\delta^{s+2}}{r^{k+1}(t+t_0)^{s+2}}\,\tilde{P}(\lambda);\quad \mathcal{M}=\frac{a\delta^s\tilde{M}(\lambda)}{r^{k+3-r}(t+t_0)^s}\quad \text{et}\quad \lambda=\frac{r}{b(t+t_0)^\delta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Evidemment, en remplaçant dans (3.5) le temps t par $t+t_0$ on obtient de nouveau une solution contenant un paramètre constant de plus, t_0. En outre on a introduit les nouvelles désignations

$$\left.\begin{aligned} V=\delta\tilde{V};\quad \mathcal{R}=\delta^s\tilde{\mathcal{R}};\quad P=\delta^{s+2}\tilde{P};\\ M=\delta^s\tilde{M};\quad z=\delta^2\tilde{z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Les équations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) ont des solutions de la forme (4.1) pour $k=-3$, $s=2$ quelles que soient les valeurs de δ, t_0 et b. Etant donné que pour les équations (1.3) $f=0$, les constantes k et s peuvent être arbitraires. Posons maintenant

$$t_0=\delta\tau \quad \text{et} \quad b=r_0(\delta\tau)^{-\delta}.$$

Il est manifeste que $[\tau]=[t]$ et $[r_0]=[r]$, τ, r_0 et δ étant des constantes arbitraires.

Dans les formules (4.1) effectuons le passage à la limite pour τ, r_0 fixés, $\tilde{V}$, $\tilde{\mathcal{R}}$, $\tilde{P}$, $\tilde{M}$ finis et lorsque $\delta\to\infty$; les formules (4.1) donnent

$$\left.\begin{aligned} v=\frac{r}{\tau}\tilde{V}(\lambda);\quad \varrho=\frac{a}{r^{k+3}\tau^s}\,\tilde{\mathcal{R}}(\lambda);\\ p=\frac{a}{r^{k+1}\tau^{s+2}}\,\tilde{P}(\lambda);\quad \mathcal{M}=\frac{a}{r^{k+3-r}\tau^s}\,\tilde{M}(\lambda)\quad \text{et}\quad \lambda=\frac{r}{r_0}\,e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Il en découle que les équations des écoulements unidimensionnels non stationnaires d'un gaz possèdent des solutions de la forme (4.3) que l'on pourrait considérer comme limites pour les écoulements automodèles. A partir des équations (2.1), (2.2) et (2.3) on obtient aisément les équations pour $\tilde{z}$, $\tilde{\mathcal{R}}$, $\tilde{P}$ et λ; pour k et s finis il vient

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{V}} &= \frac{\tilde{z}\{[2+\nu(\gamma-1)\tilde{V}(\tilde{V}-1)^2-(\gamma-1)\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)\}}{(\tilde{V}-1)\left[\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}\right]} - \\
&\quad - \frac{\left[2\tilde{V}+\frac{k+1}{\gamma}(\gamma-1)\right]\tilde{z}^2}{(\tilde{V}-1)\left[\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}\right]}, \\
\frac{d\ln\lambda}{d\tilde{V}} &= \frac{\tilde{z}-(\tilde{V}-1)^2}{\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}}, \\
(\tilde{V}-1)\frac{d\ln\tilde{\mathcal{R}}}{d\ln\lambda} &= -\frac{\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}}{\tilde{z}-(\tilde{V}-1)^2}+(k+3-\nu)\tilde{V}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Les intégrales des masses et d'adiabacité pour ces écoulements limites prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\nu-3-k}\{\tilde{M}(k+3-\nu)-\sigma_\nu\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{V}-1)\}=\text{const}, \\
&\frac{\tilde{z}}{\tilde{\mathcal{R}}^{\gamma-1}}=\tilde{M}^{-\frac{(k+3)(\gamma-1)+2}{k+3-\nu}}\cdot\text{const}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Pour $k=\nu-1$ et $s=-2$ on a l'intégrale d'énergie donnée par la relation

$$\tilde{P}\tilde{V}+(\tilde{V}-1)\left(\frac{\tilde{\mathcal{R}}\tilde{V}^2}{2}+\frac{\tilde{P}}{\gamma-1}\right)=\text{const}. \tag{4.6}$$

Il est aisé de se convaincre que le cas $s=s_0\delta+s_1$, soit $s\to+\infty$ pour $\delta\to\infty$, se réduit au cas considéré, une fois la constante a/τ^s remplacée par a_1 dans (4.3) et k par $k+s_0$ dans les équations (4.4) et les intégrales (4.5).

Pour les écoulements du gaz par ondes planes des considérations analogues sont applicables à la coordonnée r que l'on pourrait remplacer par $x+x_0$.

On peut écrire les formules (3.5) sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
&v=\frac{(x+x_0)\delta}{t}\hat{V}(\hat{\lambda}); \qquad \varrho=\frac{a\hat{\mathcal{R}}(\hat{\lambda})}{[(x+x_0)\delta]^{k+3}t^s}; \\
&p=\frac{a\hat{P}(\hat{\lambda})}{[(x+x_0)\delta]^{k+1}t^{s+2}}; \qquad \mathcal{M}=\frac{a\hat{M}(\hat{\lambda})}{[(x+x_0)\delta]^{k+2}t^s} \\
&\text{et} \\
&\hat{\lambda}=\lambda^{\frac{1}{\delta}}=\left(\frac{x+x_0}{b}\right)^{\frac{1}{\delta}}\frac{1}{t}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Ici on a utilisé les notations :

$$V=\delta\hat{V};\quad \mathcal{R}=\frac{1}{\delta^{k+3}}\hat{\mathcal{R}};\quad P=\frac{1}{\delta^{k+1}}\hat{P};\quad M=\frac{\hat{M}}{\delta^{k+2}}\quad (z=\hat{z}\delta^2). \tag{4.8}$$

Posons

$$x_0=\frac{r_0}{\delta};\quad (b)^{\frac{1}{\delta}}=\frac{1}{\tau}\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Manifestement, les formules de dimension suivantes sont vraies :

$$[x]=[r_0]\quad \text{et}\quad [t]=[\tau],$$

τ et r_0 pouvant être quelconques. Fixons k, s, r_0 et τ et faisons tendre δ vers zéro, on aura

$$\left.\begin{aligned} v&=\frac{r_0}{t}\hat{V}(\hat{\lambda});\quad \varrho=\frac{a}{r_0^{k+3}t^s}\hat{\mathcal{R}}(\hat{\lambda});\\ p&=\frac{\hat{a}P(\hat{\lambda})}{r_0^{k+1}t^{s+2}};\quad \hat{\lambda}=\frac{\tau}{t}e^{\frac{x}{r_0}}.\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Il est aisé d'obtenir les équations pour $\hat{z}$, $\hat{P}$, $\hat{\mathcal{R}}$ et $\hat{\lambda}$ à partir des équations (2.1), (2.2) et (2.3); en effectuant la substitution dans (2.1), (2.2) et (2.3) des formules (4.8) et en passant à la limite pour $\delta=0$ on obtient

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{z}}{d\hat{V}}&=\frac{\hat{z}\left[2(\hat{V}-1)^2-(\gamma-1)\hat{V}(\hat{V}-1)+\left(s-\frac{s+2}{\gamma}\right)\hat{z}\right]}{(\hat{V}-1)\left[\hat{V}(\hat{V}-1)-\frac{s+2}{\gamma}\hat{z}\right]},\\ \frac{d\ln\hat{\lambda}}{d\hat{V}}&=\frac{\hat{z}-(\hat{V}-1)^2}{\frac{s+2}{\gamma}\hat{z}-\hat{V}(\hat{V}-1)},\\ (\hat{V}-1)\frac{d\ln\hat{\mathcal{R}}}{d\ln\hat{\lambda}}&=s-\frac{\frac{s+2}{\gamma}\hat{z}-\hat{V}(\hat{V}-1)}{\hat{z}-(\hat{V}-1)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Dans ce cas les intégrales des masses et d'adiabacité s'écriront

$$\left.\begin{aligned} s\hat{M}-\hat{\mathcal{R}}(\hat{V}-1)&=\text{const},\\ \frac{\hat{z}}{\hat{\mathcal{R}}^{\gamma-1}}&=\hat{M}^{(1-\gamma)+\frac{2}{s}}\,\text{const}.\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Pour $k=0$ et $s=-2$ on a l'intégrale d'énergie*)

$$\hat{P}\hat{V}+(\hat{V}-1)\left(\frac{\hat{\mathcal{R}}\hat{V}^2}{2}+\frac{\hat{P}}{\gamma-1}\right)=\text{const}. \tag{4.12}$$

*) Si l'on a les intégrales (4.5) et (4.6) ainsi que les intégrales (4.11) et (4.12), les équations du mouvement se résolvent par quadratures. Cette intégration a été faite par N. Kotchina, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. XXI, op. 4, 1957.

En faisant encore un passage à la limite pour $\mu \to +\infty$ dans les formules (4.3) et (4.9) on obtient, après la substitution $t = t + \mu t_1$ et $\tau = \mu t_1$, les formules générales de l'écoulement stationnaire d'un gaz. Le passage à la limite dans les formules (4.9) fournit, après la substitution $x = x + \mu l$ et $r_0 = \mu l$, pour $\mu \to +\infty$, une translation à pression variable (dans le temps).

Les solutions de la forme (4.3) et (4.9) furent traitées par K. Stanukovitch*) au moyen de substitutions formelles.

§ 5. Analyse des champs de courbes intégrales dans le plan z, V

Pour s'assurer que les solutions de divers problèmes aux limites et des problèmes initiaux existent et qu'elles sont uniques et pour élaborer les méthodes de construction des solutions, l'on doit d'abord procéder à l'analyse des champs des courbes intégrales dans le plan z, V. Nous ferons l'étude d'une équation différentielle ordinaire (2.1) établie sans tenir compte des forces de gravitation et contenant, en plus du paramètre $\nu = 1, 2, 3$, deux paramètres essentiels $\varkappa$ et δ.

Il est utile pour les problèmes cités au § 1 et les applications ultérieures de considérer deux familles de solutions dont les paramètres de définition ont les dimensions suivantes :

1. L'une des constantes, u, a la dimension de la vitesse, la dimension arbitraire de la seconde constante A pouvant être prise égale à $\mathrm{ML}^{\omega-3}$ ($k = \omega - 3$, $s = 0$).

2. L'une des constantes, E, a la dimension de l'énergie $\mathrm{ML}^{\nu-1}\mathrm{T}^{-2}$, la dimension de la seconde constante A pouvant être arbitraire ou si l'on veut égale à $\mathrm{ML}^{\omega-3}$.

Au cas 1 se ramènent les problèmes où l'on a des vitesses de phase constantes : le problème du piston se déplaçant à une vitesse constante au sein d'un milieu ayant une pression et une densité ($\omega = 0$) initiales constantes; le problème de la détonation et de la combustion dans un milieu ayant une densité constante ou variable lorsque $\varrho_1 = A/r^{\omega}$, le problème de la décomposition d'une discontinuité arbitraire dans un mélange de combustion, les caractéristiques du gaz étant constantes de part et d'autre de la discontinuité.

Au cas 2 se ramènent les problèmes de l'explosion forte ($p_1 = 0$), la densité initiale étant constante lorsque $\omega = 0$ ou variable $\varrho_1 = A/r^{\omega}$ lorsque $\omega \neq 0$.

Dans le cas 1 on a

$$\delta = 1; \quad \varkappa = \frac{\omega}{\gamma}; \quad \lambda = \beta \frac{r}{ut} \tag{5.1}$$

et dans le cas 2

$$\left.\begin{aligned} &b = \left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{2+\nu-\omega}}; \quad [b] = \mathrm{LT}^{-\frac{2}{2+\nu-\omega}}; \\ &\delta = \frac{2}{2+\nu-\omega}; \quad \varkappa = \frac{\nu\delta}{\gamma}; \quad \lambda = \beta \frac{r}{bt^{\delta}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

*) K. Stanukovitch, *Mouvements non stationnaires du milieu continu* (en russe), Moscou, 1955.

où β est une constante abstraite qu'on peut choisir de manière convenable dans chaque solution concrète. Dans les deux cas on obtient dans le plan z, V des familles de solutions ne dépendant que d'un seul paramètre essentiel ω.

Regardons maintenant de plus près les équations différentielles (2.1) et (2.2).

Dans le cas 1 on a

$$\frac{dz}{dV}=\frac{z\left\{2(V-1)^3+(\nu-1)(\gamma-1)V(V-1)^2-\left[2(V-1)+\omega\frac{\gamma-1}{\gamma}\right]z\right\}}{(V-1)\left[V(V-1)^2+\left(\frac{\omega}{\gamma}-\nu V\right)z\right]}, \tag{5.3}$$

$$\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{z-(V-1)^2}{V(V-1)^2+\left(\frac{\omega}{\gamma}-\nu V\right)z}. \tag{5.4}$$

L'équation (2.3) peut être remplacée par l'intégrale d'adiabacité. Conformément à la formule (3.9) pour $\delta=1$, $s=0$, $k=\omega-3$ et à la formule (3.7) on obtient

$$\frac{z}{\mathcal{R}^{\gamma-1}}=C_1\left[\mathcal{R}(V-1)+\frac{C_2}{\lambda^{\nu-\omega}}\right]^{\frac{\omega(\gamma-1)}{\nu-\omega}}\frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.5}$$

Une fois l'équation (5.3) intégrée et $\lambda(V)$ calculé par la quadrature de (5.4), la relation (5.5) définit la fonction $\mathcal{R}(V)$; C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Si pour $\lambda=r/r_2=0$ la masse $\mathcal{M}$ est nulle et il n'y a pas de source massique, alors

$$C_2=0.$$

Lorsque $\nu=3$ (cas d'ondes sphériques), l'équation différentielle ordinaire (5.3) possède les points singuliers suivants dans le demi-plan $z\geq 0$ (voir figures 38 à 41).

Le point $O(z=0,\ V=0)$ est un nœud. Les courbes intégrales y sont tangentes à l'axe des V. Il existe une et une seule courbe intégrale qui s'approche du point O avec un coefficient angulaire de γ/ω. Au voisinage du point O les courbes intégrales vérifient les formules asymptotiques suivantes :

$$z=CV^2;\quad \lambda=\frac{C_1}{V}\quad\text{et}\quad z=\frac{\gamma}{\omega}V;\quad \lambda=\frac{C_1}{\sqrt{V}}. \tag{5.6}$$

S'approcher du point O dans le plan z, V signifie s'éloigner à l'infini dans le gaz.

Le point $C(z=0,\ V=1)$ est un nœud complexe, les courbes intégrales y sont tangentes à l'axe V et à l'axe perpendiculaire à celui-ci, le second cas englobant les courbes intégrales avec $\omega>0$.

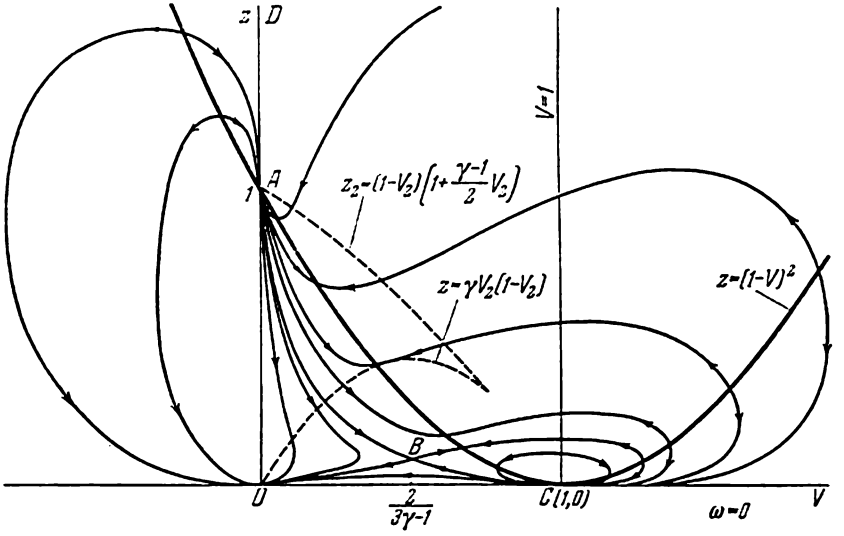


Fig. 38. Champ des courbes intégrales pour $\nu=3$, $\delta=1$, $\omega=0$. Les points de la droite OA correspondant au repos peuvent passer à travers l'onde de choc sur la parabole $z_2=(1-V_2)\left(1+\frac{(\gamma-1)}{2}V_2\right)$. Les flèches indiquent l'accroissement de $\lambda=\beta\frac{r}{ut}$. Pour $t<0$, certains écoulements divergents peuvent être remplacés par convergents

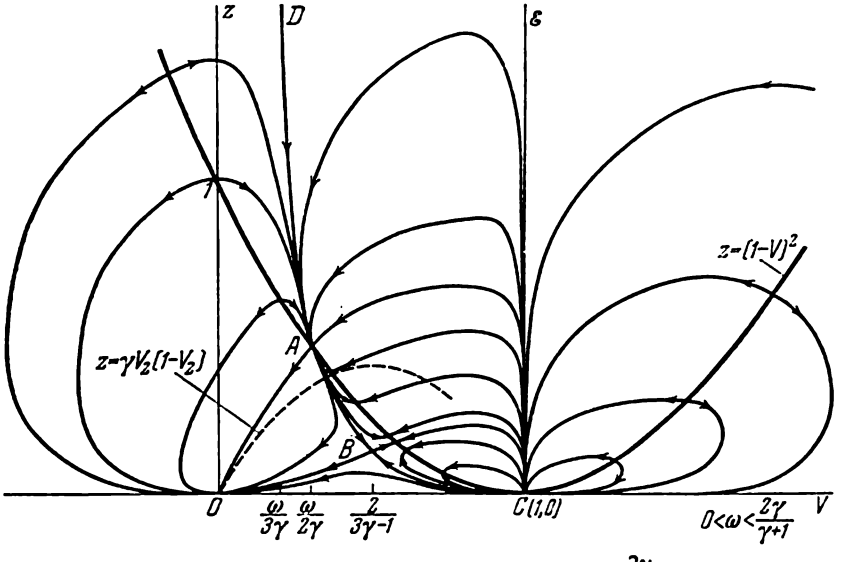


Fig. 39. Champ des courbes intégrales pour $\nu=3$, $\delta=1$ et $0<\omega<\frac{2\gamma}{\gamma+1}$. Il est à noter que le point singulier A se déplace suivant la parabole $z=(1-V)^2$, le point D se déplace également et le type de singularité du point C change

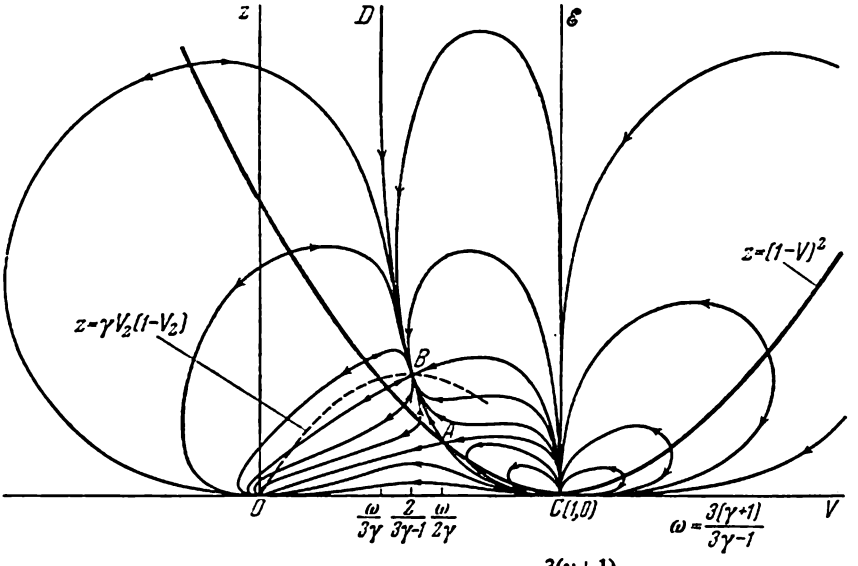


Fig. 40. Champ des courbes intégrales pour $\delta=1$ et $\omega=\frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1}$. Le point singulier B se situe sur la parabole $z=\gamma V_2(1-V_2)$

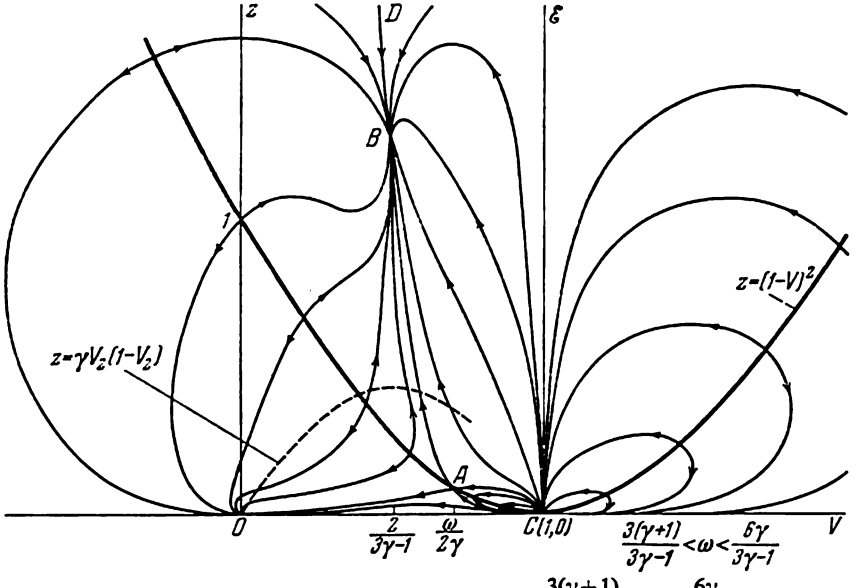


Fig. 41. Champ des courbes intégrales pour $\nu=3$, $\delta=1$ et $\frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1}<\omega<\frac{6\gamma}{3\gamma-1}$. Au mouvement vers le centre de symétrie depuis les points de la parabole $z=\gamma V_2(1-V_2)$ correspond le mouvement vers le point singulier C

Les formules asymptotiques des courbes intégrales tangentes à l'axe V, pour $\gamma<2$, ont pour expression

$$\left.\begin{aligned} &\lambda-\lambda^*=\frac{\gamma+1}{3(\gamma-1)}\lambda^*(1-V), \quad z=\frac{2(2-\gamma)}{6-\dfrac{\gamma+1}{\gamma}\omega}(1-V)^2, \\ &\mathcal{R}=C(1-V)^{\frac{6-\omega-\gamma\omega}{3(\gamma-1)}}, \quad P=C\frac{2(2-\gamma)}{6\gamma-(\gamma+1)\omega}(1-V)^{\frac{6\gamma-\omega(\gamma+1)}{3(\gamma-1)}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

où C et λ^* sont des constantes; pour $\omega<6\gamma/(\gamma+1)$ la grandeur $P\to 0$ lorsque $\lambda\to\lambda^*$.

Les courbes perpendiculaires à l'axe V vérifient les formules asymptotiques suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\lambda-\lambda^*=\frac{\gamma}{\nu\gamma-\omega}(1-V) \quad \text{pour} \quad \omega<6\gamma/(\gamma+1), \\ &z=A(1-V)^{\frac{(\gamma-1)\omega}{3\gamma-\omega}}, \quad \mathcal{R}=B(1-V)^{\frac{-(\gamma-1)\omega}{3\gamma-\omega}}, \quad P=\frac{AB}{\gamma}, \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

où λ^*, A, B sont des constantes. En s'approchant du point C on s'approche dans le gaz d'une surface située à une distance finie du centre sur laquelle la vitesse de phase est égale à celle des particules gazeuses, c'est donc la surface du piston ou la frontière avec le vide.

Le point

$$B\left(z=\frac{18\gamma(\gamma-1)^2}{(3\gamma-1)^2[\omega+3\gamma(2-\omega)]}, \ V=\frac{2}{3\gamma-1}\right)$$

est un nœud pour $\omega>4\gamma/(3\gamma-1)$ et un col pour $\omega<4\gamma/(3\gamma-1)$; pour $\omega=6\gamma/(3\gamma-1)$ le point B coïncide avec le point infiniment éloigné D. Pour de grands ω le point B se déplace dans le demi-plan négatif. Si le point B n'est pas situé sur la parabole $z=(1-V)^2$, alors sur les courbes intégrales entrant dans ce point la variable λ tend soit vers zéro, soit vers l'infini, i.e. vers le centre de symétrie ou vers un point infiniment éloigné. Si le point B se situe sur la parabole $z=(1-V)^2$, ce qui n'est possible qu'avec $\omega=4\gamma/(3\gamma-1)$, alors λ peut conserver une valeur finie à l'approche du point B. Dans ce cas le point B serait l'image d'un point mobile dans le gaz. Si

$$\omega=\frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1},$$

le point B se situe alors sur la parabole $z_2=\gamma V_2(1-V_2)$; il est au-dessous de celle-ci pour des ω plus petits et au-dessus pour des ω plus grands; cette circonstance importante est à prendre en considération dans les problèmes de la propagation de la détonation à travers un milieu de densité variable, $\varrho_1=A/r^{\omega}$.

Le point $D(z=\infty, V=\omega/3\gamma)$ est un col pour $\omega<\frac{6\gamma}{3\gamma-1}$ et un nœud pour $\frac{6\gamma}{3\gamma-1}<\omega<3\gamma$. Dans le premier cas on a une courbe intégrale fuyant vers l'infini asymptotiquement parallèlement à l'axe z; en s'éloignant à l'infini le long de cette courbe $\lambda\to 0$, c'est-à-dire que l'on s'approche du centre de symétrie. Dans le second cas, en s'approchant le long des courbes intégrales du nœud D on s'éloigne, dans le gaz, à l'infini puisque $\lambda\to+\infty$. Lorsque $\omega<6\gamma/(3\gamma-1)$, les formules asymptotiques suivantes se vérifient au voisinage du point D :

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda=C\left(V-\frac{\omega}{3\gamma}\right)^{\frac{3\gamma-\omega}{6\gamma+\omega-3\gamma\omega}},\\
&z=\frac{\omega(3\gamma-\omega)^3}{27\gamma^3(15\gamma-3\gamma\omega-2\omega)}\,\frac{1}{V-\frac{\omega}{3\gamma}},\\
&\mathcal{R}=B\left(V-\frac{\omega}{3\gamma}\right)^{\frac{\omega(3-\omega)}{6\gamma+\omega-3\gamma\omega}}=B_1\lambda^{\frac{\omega(3-\omega)}{3\gamma-\omega}},\\
&P=B_1C^{\frac{6\gamma+\omega-3\gamma\omega}{3\gamma-\omega}}\,\frac{\omega(3\gamma-\omega)^3}{27\gamma^4(15\gamma-3\gamma\omega-2\omega)}\,\lambda^{\frac{3\gamma\omega+2\omega-\omega^2-6\gamma}{3\gamma-\omega}},
\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

où B_1 et C sont des constantes arbitraires; B s'exprime par B_1 et C.

En se servant des formules (5.9) et des formules fondamentales (1.3) il est facile d'obtenir les formules asymptotiques pour la vitesse, la pression et la densité au voisinage du centre de symétrie.

Le point $A\left[z=\left(1-\frac{\omega}{2\gamma}\right)^2; V=\frac{\omega}{2\gamma}\right]$ est un foyer pour $\omega<0$, un nœud pour $0\leq\omega<\frac{4\gamma}{3\gamma-1}$, un col pour $\frac{4\gamma}{3\gamma-1}<\omega<2\gamma$, un nœud pour $2\gamma<\omega<\frac{4\gamma(\gamma+1)}{6\gamma-2-\gamma^2}$ et un centre pour $\frac{4\gamma(\gamma+1)}{6\gamma-2-\gamma^2}<\omega$.

Pour $\omega=0$ les courbes intégrales entrent au nœud tangentiellement à l'axe z.

Pour $0<\omega<\frac{4\gamma(\gamma+1)}{6\gamma-2-\gamma^2}$ il y a deux directions suivant lesquelles les courbes intégrales peuvent s'approcher du point A; les coefficients angulaires de ces directions sont donnés par

$$k_{1,2}=\gamma\left(\frac{\omega}{2\gamma}-1\right)\left[1\pm\sqrt{\frac{\omega(\gamma^2-6\gamma+2)+4\gamma(\gamma+1)}{\omega\gamma^2}}\right].$$

Le point A étant toujours situé sur la parabole $z=(1-V)^2$, la variable λ serait finie en ce point. Le passage par le point A où la vitesse de phase et celle des particules sont différentes correspond au passage par une

caractéristique, ce qui veut dire que ce point peut figurer une discontinuité faible.

Le point $\mathcal{E}(z=\infty, V=1)$ est un nœud pour $\omega<0$ et un col pour $0<\omega<3\gamma$. Le point $G(z=\infty, V=\infty)$ est un col pour tout ω.

A chaque point singulier correspond une solution exacte simple des équations de la gazodynamique, solution caractérisée par $z=\text{const}$ et $V=\text{const}$, la variable λ étant libre. La fonction $\mathcal{R}(\lambda)$ se détermine de (5.5), de plus, avec $C_2=0$ elle s'avère être une fonction de puissances de λ, de sorte que P est également une fonction de puissances. Ainsi donc c'est une solution particulière pour laquelle les v, ϱ, p sont des monômes de puissance en r et t. En particulier, si $z=0$ et $V=0$, l'état décrit est celui de repos à une pression nulle qui est l'état initial de certains mouvements automodèles.

Les figures 38 à 41 permettent de se représenter le champ des courbes intégrales pour $\gamma=\frac{5}{3}$ lorsque

$$\omega=0; \quad 0<\omega<\frac{2\gamma}{\gamma+1}; \quad \omega=\frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1} \quad \text{et} \quad \frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1}<\omega<\frac{6\gamma}{3\gamma-1}.$$

Le sens des valeurs croissantes de λ est marqué par des flèches. Etant donné que le paramètre λ atteint son minimum ou maximum sur la parabole $z=(1-V)^2$, il est impossible de traverser continûment cette parabole le long d'une courbe intégrale, car ce serait engendrer un espace à double feuille d'écoulement du gaz d'où la non-univocité de la solution. Toutefois, il est possible de traverser la parabole $z=(1-V)^2$ suivant une courbe intégrale si celle-ci passe par le point singulier A situé sur cette parabole. Au point A appartenant à la parabole le paramètre λ admet brusquement le minimum, tandis que sa valeur immédiatement précédente était maximum, pourtant suivant une courbe intégrale traversant la parabole le paramètre λ est fini au point A et varie de façon monotone. On verra plus loin que cette circonstance fait que la courbe intégrale traversant la parabole est solution du problème de la détonation correspondant.

$\omega=0$ peut entraîner, dans les solutions automodèles, $p_1\neq 0$, ce qui veut dire qu'à des états de repos correspond toute la droite $V=0$.

Dans les solutions étudiées le paramètre λ doit varier de 0 à ∞ le long des courbes intégrales si le gaz est illimité. Dans la plupart des cas l'écoulement correspondant serait accompagné de fortes discontinuités.

Les valeurs $\lambda=0$ et $\lambda=\infty$ ne peuvent correspondre qu'aux points singuliers mentionnés précédemment; la surface du piston ou la frontière du vide ne peuvent être associées qu'à des points de la droite $V=1$ (égalité de la vitesse de phase et de la vitesse des particules) et, en particulier, aux points singuliers C et $\mathcal{E}$.

Dans les points C et $\mathcal{E}$ la pression ou bien la densité s'annulent ou deviennent infinies. A une pression nulle correspond le vide, à une pression finie et une densité infinie pour le point C et à une densité nulle pour le point $\mathcal{E}$ correspond l'expansion du piston sphérique.

Considérons le champ des courbes intégrales de l'équation différentielle (2.1) dans le cas 2. On a

$$\frac{dz}{dV}=\frac{z[2(V-1)+\nu(\gamma-1)V](V-\delta)}{\left[V(V-1)(V-\delta)+\nu\left(\frac{\delta}{\gamma}-V\right)z\right]}-$$

$$-\frac{z\left\{(\gamma-1)V(V-1)(V-\delta)+\left[2(V-1)+\frac{\nu\delta}{\gamma}(\gamma-1)\right]z\right\}}{(V-\delta)\left[V(V-1)(V-\delta)+\nu\left(\frac{\delta}{\gamma}-V\right)z\right]}, \tag{5.10}$$

$$\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{z-(V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta)+\nu\left(\frac{\delta}{\gamma}-V\right)z}, \tag{5.11}$$

où $\delta=2/(2+\nu-\omega)$. En tant que la troisième équation donnant $\mathcal{R}$ on peut prendre l'intégrale d'adiabacité. Les formules (3.9) avec $\delta=2/(2+\nu-\omega)$, $s=0$, $k=\omega-3$ et les formules (3.7) avec $\omega<\nu$ conduisent à

$$z=\mathcal{R}^{\frac{2\nu-\nu\gamma-\omega}{\omega-\nu}}\left(V-\frac{2}{2+\nu-\omega}\right)^{\frac{\nu-\gamma\omega}{\omega-\nu}}\lambda^{-(2+\nu-\omega)}C, \tag{5.12}$$

où C est la constante d'intégration; la condition $\omega<\nu$ peut être remplacée par les inégalités $\omega\neq\nu$ et $\omega\neq\nu+2$. Pour $\omega\geq\nu$ l'intégrale donnant la masse

$$\mathcal{M}=\sigma_\nu\int_0^r\frac{A}{r^\omega}r^{\nu-1}dr$$

diverge. La constante du second membre de (3.7) est posée nulle en vertu des remarques faites à la page 189.

La relation (5.12) définit $\mathcal{R}$ au moyen de z, V et λ.

La constante E de dimension $ML^{\nu-1}T^{-2}$ étant essentielle, l'intégrale d'énergie a lieu dans le cas 2. En vertu de (3.11) il vient

$$\lambda^{\nu+2}\left[zV+\left(V-\frac{2}{2+\nu-\omega}\right)\left(\frac{\gamma V^2}{2}+\frac{z}{\gamma-1}\right)\right]\mathcal{R}=C_1. \tag{5.13}$$

L'intégrale (5.13) peut remplacer l'équation (5.10). A partir de (5.13) on peut déterminer z que l'on substituera dans l'équation (5.11) qui devient alors une équation ordinaire ne contenant que λ et V. Si $C_1=0$, (5.13) fournit l'intégrale de l'équation (5.10) tandis que l'équation (5.11) se résout par quadratures. Si $C_1\neq0$, on peut déterminer $z(V)$ en intégrant l'équation (5.10), ensuite la fonction λ peut être calculée à l'aide de (5.13) sans qu'on ait besoin d'intégrer l'équation (5.11).

L'aspect du champ des courbes intégrales dans le plan z, V pour l'équation (5.10) avec $\nu=3$, $\omega=0$ et $\gamma<2$ est représenté à la figure 42. Le sens des valeurs croissantes de λ est marqué par des flèches. La nature des points singuliers est mise en évidence sur la figure.

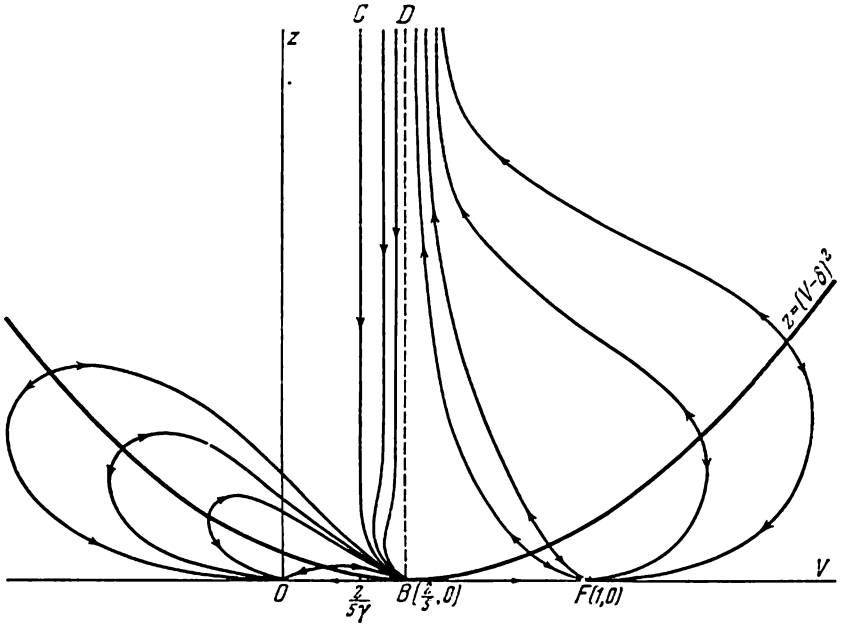


Fig. 42. Champ des courbes intégrales pour $\nu=3$, $\omega=0$, $\delta=\frac{2}{5}$, $\gamma<2$

Le point singulier $C(z=\infty,\ V=2/(2+\nu-\omega)\gamma)$ est un col. Le long de l'unique courbe intégrale aboutissant à ce point la variable λ tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne vers C. Il est remarquable que l'équation de cette courbe découle de (5.13) pour $C_1=0$.

En examinant le champ des courbes intégrales dans le plan z, V en fonction des ω et γ on remarquera que l'équation (5.10) possède encore un point singulier

$$\mathcal{E}\left(V^*=\frac{2}{[2+\nu(\gamma-1)]},\quad z^*=-\frac{2(\gamma-1)\gamma[(2-\gamma)\nu-\omega]}{[2+\nu(\gamma-1)]^2[(2-\omega)\gamma+\nu-2]}\right), \tag{5.14}$$

qui peut migrer par le point B du demi-plan inférieur $z<0$ au demi-plan supérieur $z>0$. Il est aisé de vérifier que le point singulier $\mathcal{E}$ est situé sur la courbe intégrale passant par le point singulier C, autrement dit z^* et V^* satisfont à l'équation (5.13) pour $C_1=0$.

La condition nécessaire pour que la coordonnée z^* soit positive a pour expression

$$\nu(2-\gamma)\leq\omega\leq\frac{2\gamma+\nu-2}{\gamma}. \tag{5.15}$$

L'égalité correspond au cas où le point $\mathcal{E}$ coïncide avec le point B, l'inégalité, à la coïncidence de $\mathcal{E}$ avec C.

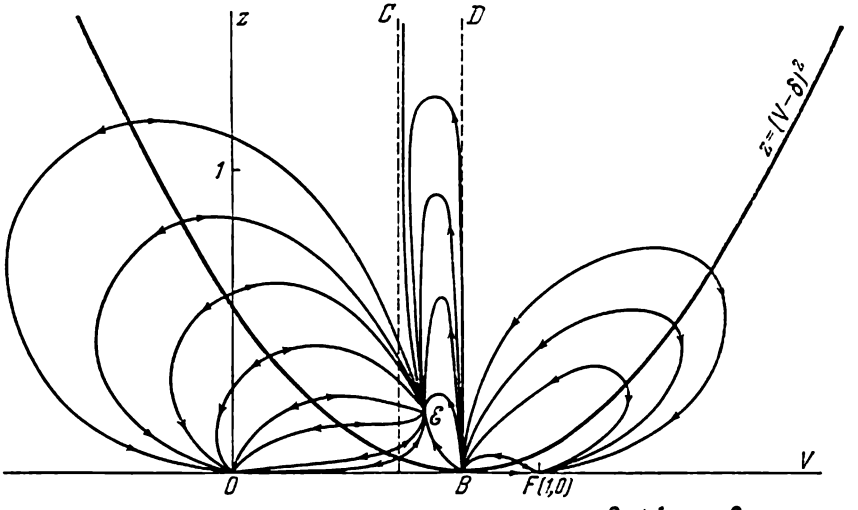


Fig. 43. Champ des courbes intégrales pour $\nu=3$; $6-3\gamma<\omega<\frac{2\gamma+1}{\gamma}$, $\delta=\frac{2}{5-\omega}$. Dans le demi-plan supérieur apparaît un point singulier $\mathcal{E}$ du type nœud. Le champ correspond au cas $\omega>3/\gamma$

La figure 43 représente le champ des courbes intégrales au cas où $\mathcal{E}$ se situe dans le demi-plan supérieur.

Au centre de symétrie $\lambda=0$ ne peuvent correspondre que le point C et les points singuliers $z=0$ et $V=\pm\infty$.

Aux points infiniment éloignés $\lambda=\infty$ s'associent les points singuliers O, F et $\mathcal{E}$.

Le paramètre λ peut être fini aux points singuliers B et D qui correspondent aux frontières des pistons sphériques en expansion ou à la frontière avec le vide.

§ 6. Problème du piston

Considérons l'écoulement gazeux à un certain moment t en supposant que le gaz soit déplacé par un piston sphérique se dilatant à une vitesse constante U. La pression initiale p_1 ainsi que la densité initiale ϱ_1 sont constantes et non nulles*).

*) La résolution du problème de l'écoulement du gaz déplacé par une sphère se dilatant à une vitesse constante, avec les calculs numériques, fut publiée pour la première fois en 1945 dans l'ouvrage cité plus haut de L. Sédov (« Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. IX, op. 4, 1945).

La résolution du problème de l'écoulement du gaz déplacé par une sphère se dilatant à la vitesse $U=ct^n$, comportant une analyse des cas de différents n (pour $n=-\frac{1}{2}$ compte tenu de la viscosité et de la conduction thermique), est donnée par N. Krachenninikova dans sa thèse, soutenue au printemps 1954 à l'Université de Moscou (voir « Izvestia Academii naouk », section « Sciences techniques », n° 8, 1955).

Etant donné que pour les particules fluides en contact avec le piston on a $v=U$ et $r=Ut$, on doit avoir sur le piston $V=v/(r/t)=1$. De sorte que dans le plan z, V le point représentatif (fig. 44) correspondant au piston doit appartenir à la droite $V=1$. Le déplacement radiale à partir du piston vers l'infini se traduit par le déplacement le long de la courbe intégrale dans le sens des λ croissants. La courbe intégrale coupe la parabole $z=(V-1)^2$ qu'il est impossible de traverser de manière continue, de sorte qu'on ne peut arriver au point O correspondant au point à l'infini que par un saut.

D'autre part, le gaz est au repos dans le domaine que la perturbation n'a pas encore gagné, autrement dit, au côté extérieur du saut correspond un point de l'axe z.

Le passage des points de l'axe z, on l'a montré précédemment, aux points de la parabole

$$z=(1-V)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}V\right) \tag{6.1}$$

se fait par sauts.

Ainsi donc, lorsqu'on se déplace, dans l'espace physique, du piston à l'infini, le point représentatif, lui, suit la courbe intégrale depuis un certain point de la droite $V=1$ jusqu'à l'intersection avec la parabole (6.1), puis il passe par saut à la droite $V=0$ (fig. 44).

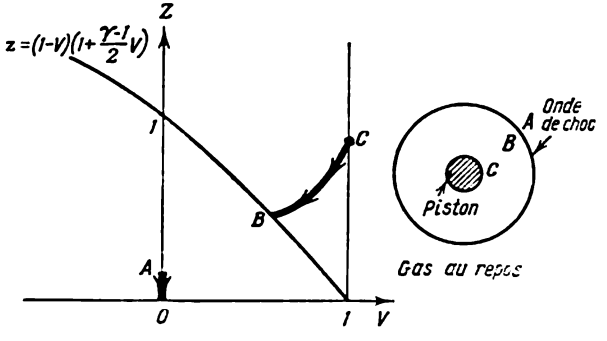


Fig. 44. Courbe intégrale dans le plan z, V de la solution du problème du piston sphérique. Le passage du point A au point B se fait par saut à travers l'onde de choc. Le point C appartient au piston. La courbe BC correspond à une compression adiabatique du gaz entre le piston et l'onde de choc

---

Pour un plus grand intervalle de nombres n et γ le problème de l'écoulement du gaz déplacé par une sphère, un cylindre ou un piston plan, avec l'analyse qualitative des équations différentielles, est traité dans les ouvrages de S. Grigorian (« Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. XXII, op. 2, 1958), N. Kotchina et N. Melnikova (« Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. XXII, op. 4, 1958); Troudy MIAN de l'U. R. S. S., t. LXXXVII, 1966).

La résolution numérique du problème de l'écoulement du gaz déplacé par un cylindre pour $n=-\frac{1}{4}$ est donnée par G. Grodzovski (« Izvestia Academii naouk », section « Sciences techniques », n° 6, 1957).

Dans l'espace physique cela correspond au phénomène suivant : une onde de choc se propage à travers un gaz au repos; entre l'onde de choc et le piston s'effectue une compression adiabatique du gaz.

Le cas du piston cylindrique ne diffère pas qualitativement du piston sphérique. En ce qui concerne le piston plan se déplaçant dans un tube cylindrique, à la différence du cas du piston sphérique, il se forme entre l'onde de choc et le piston un domaine d'écoulement du gaz où la vitesse, la densité et la pression sont constantes.

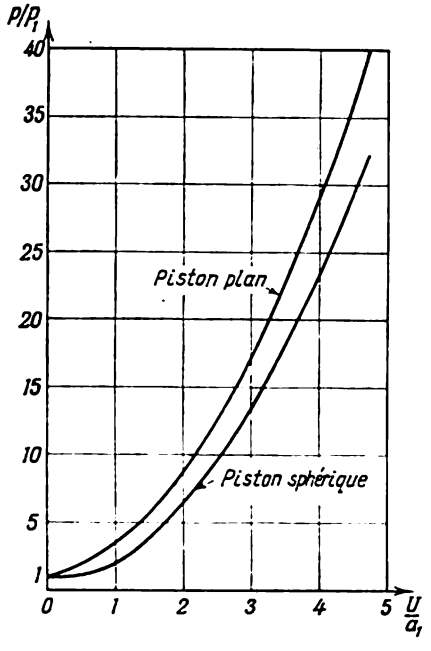


Fig. 45. Pression p sur le piston en fonction de la vitesse du piston U; p_1 est la pression et a_1 la vitesse du son dans le gaz non perturbé

Sur les figures 45 et 46 sont montrées les courbes donnant le rapport de la pression et de la densité des particules gazeuses attenantes au piston à la pression et la densité du gaz au repos, en fonction du rapport de la vitesse du piston à la vitesse initiale du son.

La figure 47 donne le rapport de la vitesse de l'onde de choc à la vitesse du son en fonction du rapport de la vitesse du piston à la vitesse du son.

Les graphiques montrent que pour une même vitesse du piston, la compression du gaz par un piston plan est supérieure à celle occasionnée par un piston sphérique. L'onde de choc plane est également plus intense que l'onde de choc sphérique (surtout lorsque la vitesse du piston est faible).

Dans le cas plan, à la différence des cas sphérique et cylindrique, on voit surgir, outre le problème de la compression du gaz par le piston, les problèmes du déplacement du piston du côté opposé à celui du gaz. La solution de ce problème s'obtient facilement pour peu qu'on fasse appel aux mouvements de translation et à la solution singulière du système d'équations (1.3) pour $\nu=1$ qui avec les variables z, V et λ a la forme

$$z=(1-V)^2, \quad V-\frac{2}{\gamma-1}(1-V)=C\lambda^{-1}, \tag{6.2}$$

où C est la constante d'intégration.

En passant aux variables dimensionnelles on obtient les formules de la solution non linéaire de l'onde progressive de détente dans le gaz (le cas

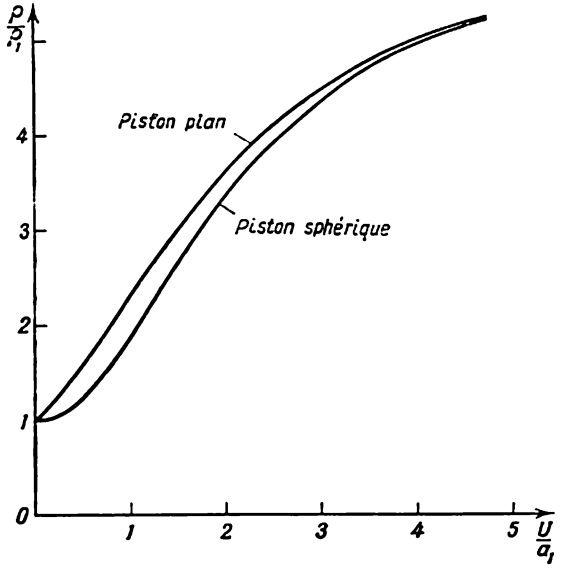


Fig. 46. Densité ϱ des particules attenantes au piston en fonction de la vitesse du piston U; ϱ_1 est la densité, a_1 la vitesse du son dans le gaz non perturbé

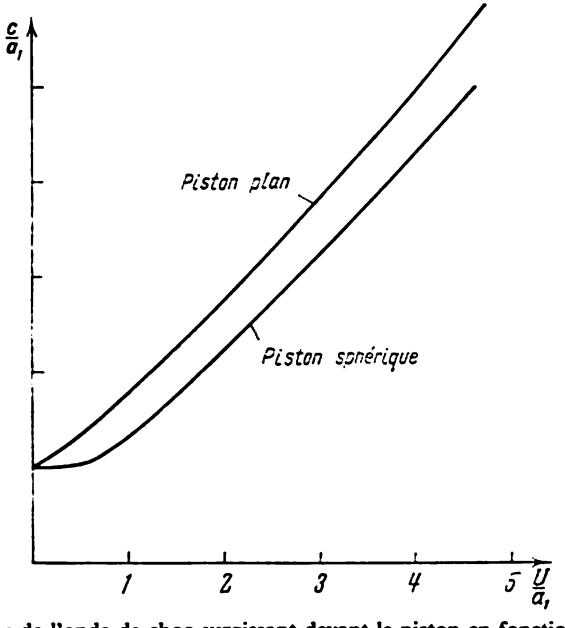


Fig. 47. Vitesse c de l'onde de choc surgissant devant le piston en fonction de la vitesse du piston U; a_1 est la vitesse du son dans le gaz non perturbé

le plus simple de la solution de Riemann) :

$$\left.\begin{aligned} x&=(v\pm a)t,\\ v&=\pm\frac{2}{\gamma+1}a+\text{const},\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

où a est la vitesse du son*).

§ 7. Problème de la convergence du gaz dans un point et de la divergence à partir d'un point

Traitons ce problème dans le cas où la vitesse, la densité et la pression initiales sont les mêmes pour toutes les particules, soit $\omega=0$, $\delta=1$. Le champ correspondant des courbes intégrales dans le plan z, V est représenté à la figure 38.

A un point infiniment éloigné correspond le point O. Les formules asymptotiques au voisinage du point O d'après (5.6) sont de la forme

$$z=CV^2, \quad \lambda=\frac{C_1}{V}.$$

La condition à l'infini ou la condition initiale donnent :

$$z=\frac{\gamma p_1}{\varrho_1}:\frac{r^2}{t^2}=C\frac{t^2}{r^2}v_1^2; \quad \text{d'où} \quad C=\frac{\gamma p_1}{\varrho_1 v_1^2}. \tag{7.1}$$

Pour $v_1<0$ il faut prendre la branche gauche de la parabole $z=CV^2$ pour $V<0$; pour $v_1>0$, la branche droite pour $V>0$.

En posant $\lambda=r/a_1t$, $a_1=\gamma p_1/\varrho_1$ on fixe la constante β en vertu de la formule (5.2).

Cela étant, la formule asymptotique de λ donne :

$$\frac{r}{a_1t}=\frac{C_1r}{v_1t}; \quad C_1=\frac{v_1}{a_1}. \tag{7.2}$$

Si la vitesse est dirigée vers le centre ($v_1<0$), alors au mouvement de l'infini au centre, pour t fixé, correspond un déplacement suivant une courbe intégrale entrant dans le point O du côté des V négatifs.

La vitesse du gaz au centre étant nulle à $t\neq 0$, le centre peut être atteint soit par un déplacement suivant la courbe intégrale aboutissant au point singulier B, soit par un déplacement suivant la droite intégrale $V=0$ aboutissant au point singulier $D(z=\infty, V=0)$. Mais il est impossible de passer du domaine $V<0$ contenant le point représentatif à la courbe intégrale aboutissant au point B et le passage à l'axe z ne peut se faire que par un saut.

---

*) Le problème de l'eau déplacée par un piston qui se dilate à vitesse constante a été examiné par N. Kotchina et N. Melnikova (« Prikladnaia matematika i mekhanika », t. XXIII, op. 1, 1959).

Par conséquent, le point représentatif suit la courbe intégrale jusqu'à l'intersection avec la parabole (2.11)

$$z=(1-V)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}V\right),$$

que rejoignent à la discontinuité les points de l'axe z; ayant rencontré la parabole, le point représentatif passe par saut en un point de l'axe z. L'allure de la courbe intégrale est donnée à la figure 48, *a*.

Dans l'espace physique on a la compression adiabatique du gaz venant de l'infini vers le centre puis le passage par saut à l'état de repos (fig. 49, *a*).

Dans le cas de la divergence ($v_1>0$, la vitesse des particules gazeuses est dirigée vers l'extérieur) lorsque la vitesse initiale est faible, le point représentatif suit d'abord la courbe intégrale définie par la condition (7.1) du point O jusqu'au point A et ensuite la droite intégrale $V=0$ (fig. 48, *b*).

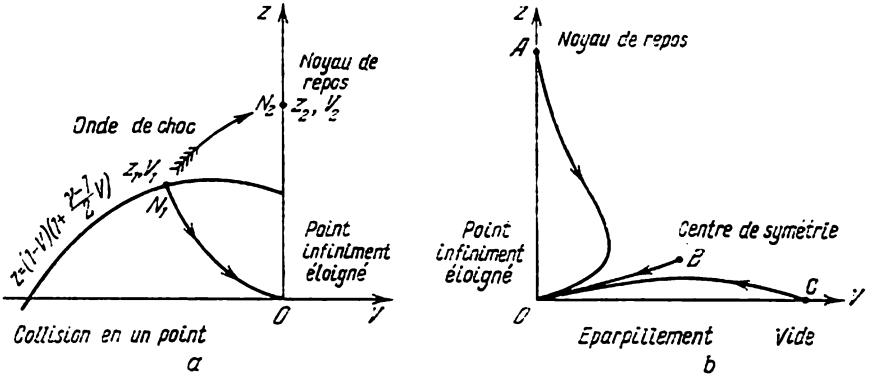


Fig. 48. Courbes intégrales dans le plan z, V correspondant à : *a)* une collision dans un point et *b)* un éloignement à partir d'un point

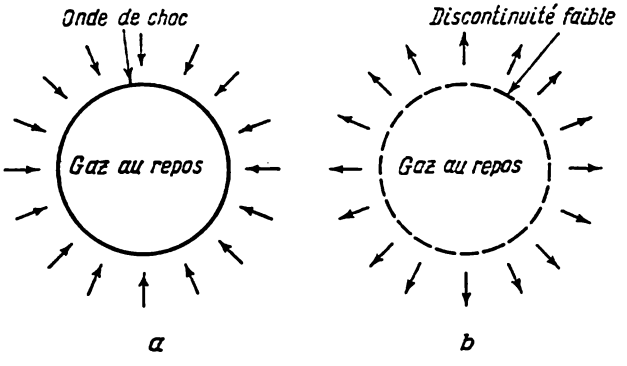


Fig. 49. Schémas de mouvement : *a)* convergence vers un point, *b)* éloignement d'un point. Devant le noyau on observe une compression ou une détente adiabatiques

Dans l'espace physique, on observe lors du déplacement de l'infini vers le centre, à un instant fixé, une chute de densité et de pression du gaz jusqu'à une certaine valeur déterminée puis le passage du gaz par un faible saut à l'état de repos (fig. 49, *b*). A la frontière du noyau sphérique du gaz au repos correspond le point singulier A (fig. 48, *b*).

Pour une certaine vitesse initiale $v=v_1^*$, dans le plan (z, V) la solution est représentée par la courbe intégrale OB. Le centre de symétrie est figuré par le point B. Dans l'espace physique correspondant la vitesse est nulle uniquement au centre de symétrie.

Si $v_1>v_1^*$, on ne peut avancer suivant la courbe intégrale que jusqu'au point singulier C où le paramètre λ a une valeur constante finie non nulle λ^* et où la densité et la pression sont nulles.

Par conséquent, il se forme dans le gaz un vide se dilatant à une vitesse constante définie par la valeur λ^*.

§ 8. Détonation sphérique

Considérons un écoulement perturbé du gaz provoqué par une détonation produite à l'instant $t=0$ au centre de symétrie; aux instants $t>0$ une onde sphérique de détonation se propage au sein du gaz initialement non perturbé. Par hypothèse, l'apport de chaleur s'effectue uniquement au front du saut, l'écoulement du gaz derrière le saut (derrière l'onde de détonation) étant adiabatique*).

Commençons par le cas où à l'état initial de repos la densité ϱ_1 et la pression p_1 sont constantes et non nulles. L'écoulement perturbé d'un gaz parfait se définit par les paramètres

$$r,\ t,\ \gamma,\ \gamma_1,\ p_1,\ \varrho_1,\ Q,$$

où Q est la quantité de chaleur dégagée à la surface du front par l'unité de masse gazeuse; γ_1, γ les valeurs du coefficient de Poisson devant et derrière le front respectivement. L'écoulement est automodèle et appartient au type 1 défini au § 5. Le champ des courbes intégrales dans le plan z, V de l'équation différentielle (5.3) ($\omega=0$) est donné à la figure 38; $\lambda=\beta r/\sqrt{Q}t$.

Dans la partie de l'espace à laquelle l'onde de détonation n'est pas parvenue, le gaz étant au repos, au côté extérieur de l'onde de détonation correspond, dans le plan z, V, un point H_1 (fig. 50) situé sur l'axe z. A ce point est associé $\lambda_2=\beta c/\sqrt{Q}$; β se détermine de la condition $\lambda_2=1$. Il découle de la condition d'Hugoniot (2.27) que le côté intérieur de l'onde de détonation dans le plan z, V se décrit par la parabole

$$z_2=(1-V_2)^2\frac{1+\gamma A}{1-A}; \tag{8.1}$$

*) On doit l'étude de la détonation sphérique sans piston à O. Vlassov. C'est lui qui mit en évidence le caractère automodèle du problème, qui trouva l'équation différentielle ordinaire appropriée et en analisa la solution. Voir O. Vlassov, *Ondes d'explosion* (en russe), ch. 3, Moscou, 1937, J. Zeldovitch, JETPh, t. 12, op. 9, 1942.

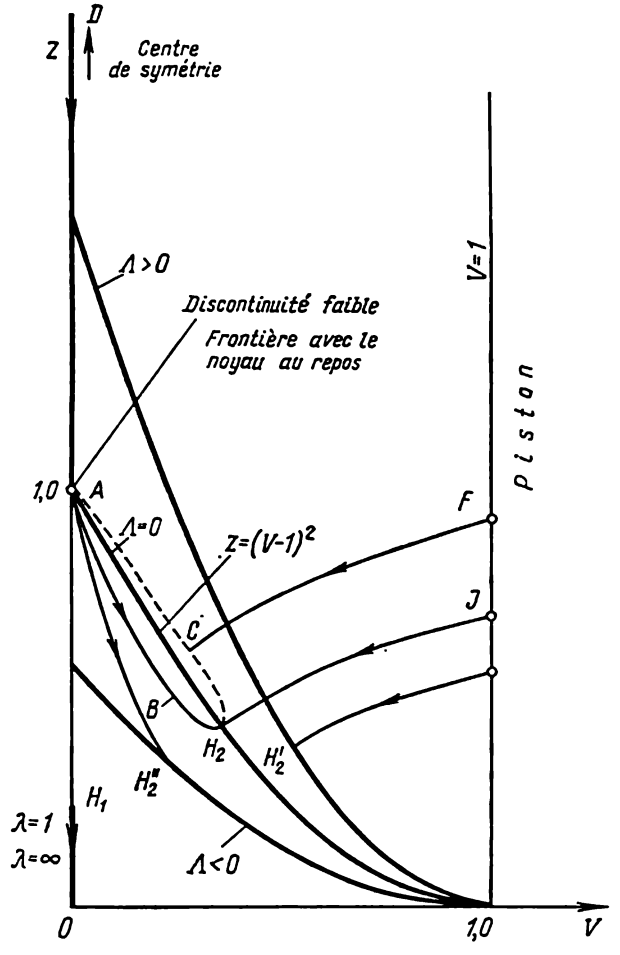


Fig. 50. Courbes intégrales dans le plan z, V dans le cas d'une détonation sphérique ($p_1=\text{const}\neq 0$; $\varrho_1=\text{const}$ ($\omega=0$))

pour $\Lambda=0$ on a la condition de Chapman-Jouguet si bien que la parabole (8.1) coïncide avec la parabole

$$z=(1-V)^2. \tag{8.2}$$

Si $\Lambda>0$, la parabole (8.1) passe au-dessus de la parabole (8.2) (voir fig. 38 et fig. 50). La variable λ ayant un extrémum sur la parabole (8.2), il est impossible, à $\Lambda>0$, de passer continûment des points de la parabole (8.1) au centre de symétrie; il est clair également qu'il n'existe pas non plus de solution avec un saut de compression supplémentaire.

Toutefois, on peut prolonger la solution jusqu'à la droite $V=1$; les points de cette droite peuvent être considérés comme correspondant aux pistons sphériques. On parvient donc à obtenir la solution du problème de la dilatation d'un piston dans une masse de gaz détonnante.

Le choix de la courbe intégrale nécessaire ainsi que du paramètre Λ est déterminé par la valeur de la pression ou de la vitesse (λ^*) du piston puisqu'en donnant le paramètre $p_1/Q\varrho_1$ on détermine pour chaque Λ un point H_2' sur la parabole (8.1) (fig. 50).

Si $\Lambda<0$, la parabole (8.1) se dispose au-dessous de la parabole (8.2). Dans ce cas la solution du problème n'est pas unique.

Il existe tout un faisceau de courbes issues du nœud A qui fournissent une solution satisfaisant à toutes les conditions aux limites. La position du point derrière le front du saut H_2'' et le paramètre $\Lambda<0$ sont définis par la vitesse du front de détonation. On aura donc au centre le noyau de gaz au repos dont la frontière correspond au point A et constitue une faible discontinuité. Les points du noyau sont figurés par la droite AD. Le point D correspond au centre du noyau $\lambda=0$ (fig. 51). Si le point H_2 se situe sur la parabole (8.2), la condition de Chapman-Jouguet est remplie et la vitesse de détonation est réduite à son minimum.

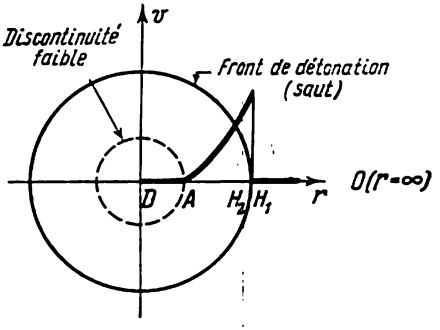


Fig. 51. Ecoulement engendré par une détonation sphérique (Analogie avec le cas plan, A. Grib, 1939)

Lorsqu'on a $\Lambda\leq 0$, le front de détonation est suivi, jusqu'au noyau immobile, d'une onde de détente.

Le cas $\Lambda<0$ correspond à la seconde racine ϱ_1/ϱ_2 (voir (2.16)). Ce cas s'élimine si la fonction $Q'(\varrho_1/\varrho_2')$ est monotone dans la zone de la réaction chimique. S'il n'y a pas monotonie dans la zone de la réaction chimique, ces solutions peuvent être envisagées; le choix de la solution convenable se ramène à la détermination de $\Lambda<0$ à partir des données sur la cinétique des réactions chimiques et de celles sur la non-monotonie de la fonction $Q'(\varrho_1/\varrho_2')$. Par ailleurs, comme on l'a vu précédemment, $\Lambda>0$ n'entraîne pas forcément la variation monotone de la fonction $Q'(\varrho_1/\varrho_2')$.

Il est à noter que si la condition de Chapman-Jouguet ($\Lambda=0$) est remplie, deux solutions continues existent. Outre la solution à onde de détente il y a encore une solution à onde de compression, solution prolongeable jusqu'à la surface du piston se déplaçant à la vitesse constante correspondante U_J.

Si le piston se déplace à une vitesse inférieure à U_J, il est possible de construire la solution suivante. L'onde de détonation se propageant à la vitesse de Jouguet est accompagnée d'une onde de détente correspondant à la portion H_2B (fig. 50), le passage du point B au point C se fait par saut,

puis la solution se prolonge jusqu'à la surface du piston (point F). Au niveau du piston F la vitesse constante U_F est inférieure à U_J. La position du point B est déterminée par la valeur de la vitesse U_F.

Ainsi donc, quelle que soit la vitesse du piston U_F il est possible d'avoir une solution automodèle unique*).

Sur les figures 52, 53 et 54 sont rassemblés les résultats du calcul de la distribution de la pression, de la vitesse et de la température dans le cas où $\gamma=\gamma_1=\frac{5}{3}$, $p_1=0$ et la condition de Chapman-Jouguet est satisfaite (les courbes correspondant à $\omega=0$).

On obtient par une méthode analogue la solution du problème de la détonation aux cas d'ondes cylindriques et planes.

Traitons maintenant les problèmes de la détonation dans un milieu à densité initiale variable**). Pour

$$0<\omega<\frac{2\gamma}{\gamma+1} \qquad \left(\varrho_1=k_1\frac{A}{r^\omega}\right),$$

le champ des courbes intégrales est représenté à la figure 39.

La figure 55 représente dans le plan z, V le schéma des courbes intégrales donnant la solution du problème de la propagation de la détonation.

Pour prolonger la solution à l'intérieur, en deçà du front de l'onde de détonation, il faut se servir de la courbe intégrale issue du point D où $\lambda=0$, qui entre au point singulier A. Au point A situé sur la parabole

$$z=(1-V)^2$$

peut correspondre une faible discontinuité; la variable λ a une valeur finie et augmente lorsqu'on descend le long des courbes intégrales; la solution n'est donnée que par les courbes intégrales qui coupent la parabole d'équation

$$z_2=\gamma V_2(1-V_2) \tag{8.3}$$

selon (2.29). Tout comme dans le cas $\omega=0$ la solution n'est pas unique, en outre, au front de détonation $\Lambda\leq 0$. La solution vérifiant la condition de Chapman-Jouguet $\Lambda=0$ répond au point d'intersection des paraboles (8.2) et (8.3).

La solution du problème de la propagation de la détonation dans le cas d'un piston sphérique supplémentaire se dilatant à partir du centre est donnée par la courbe intégrale du type $H_2''C$ montrée en pointillé sur la figure 55.

---

*) Une situation analogue a lieu dans l'écoulement autour d'un cône d'un mélange détonant de gaz. Voir G. Tcherny, S. Kvachnina, *Ecoulement stationnaire autour d'un cône d'un flux de gaz détonant*, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. XXIII op. 1, 1959.

**) L. Sédov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 111, n° 4, 1956; I. Yavorskaïa, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 111, n° 4, 1956.

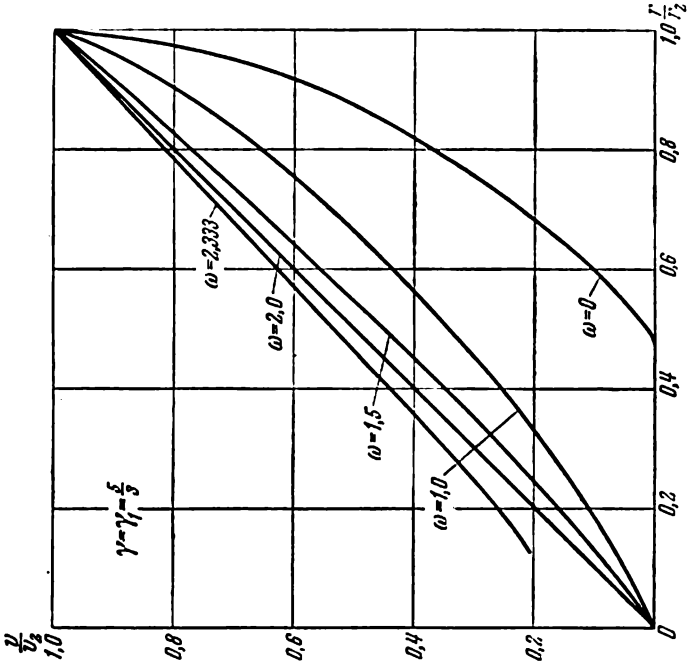


Fig. 53. Distribution des vitesses derrière le front de l'onde de détonation ($p_1=0$, $\varrho_1=A/r^\omega$)

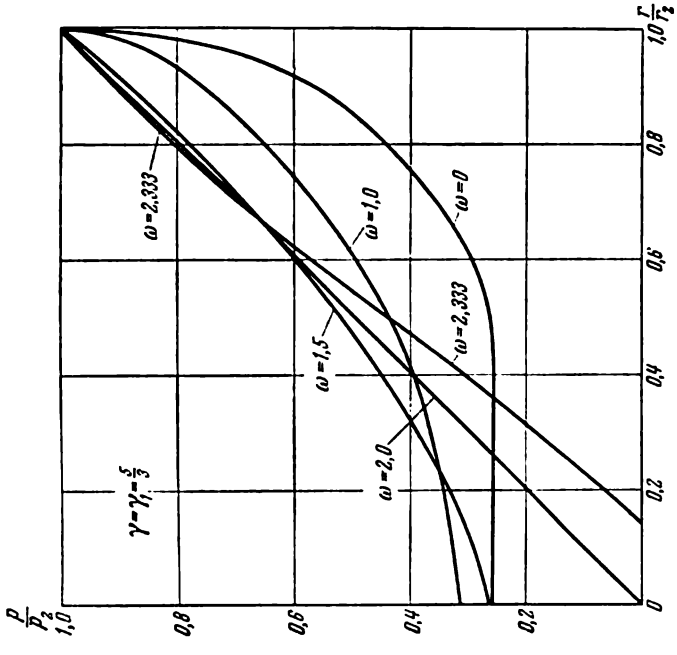


Fig. 52. Distribution des pressions derrière le front de l'onde de détonation; pression initiale $p_1=0$, densité initiale $\varrho_1=A/r^\omega$; lorsque $\omega>3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$, au voisinage du centre se forme un vide

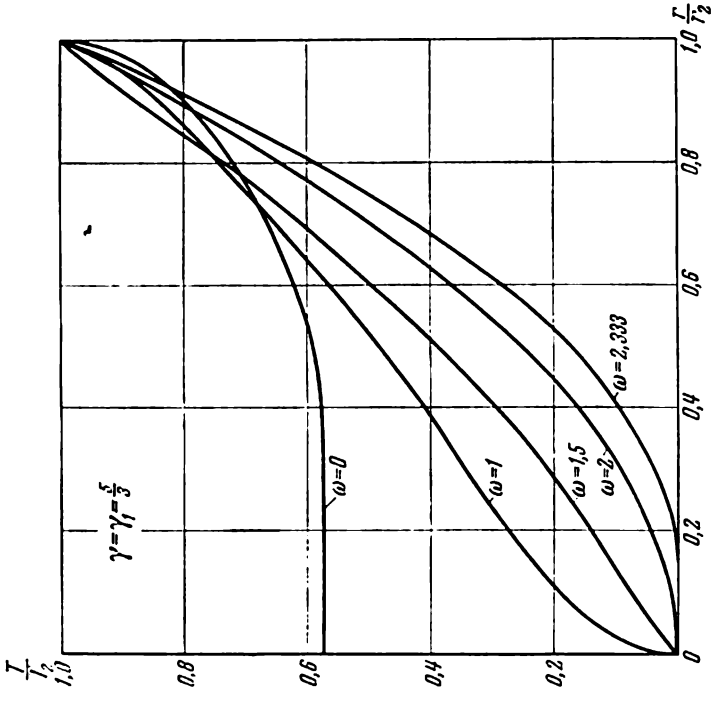


Fig. 54. Distribution des températures derrière le front de l'onde de détonation ($p_1=0$, $\varrho=A/r^{\omega}$)

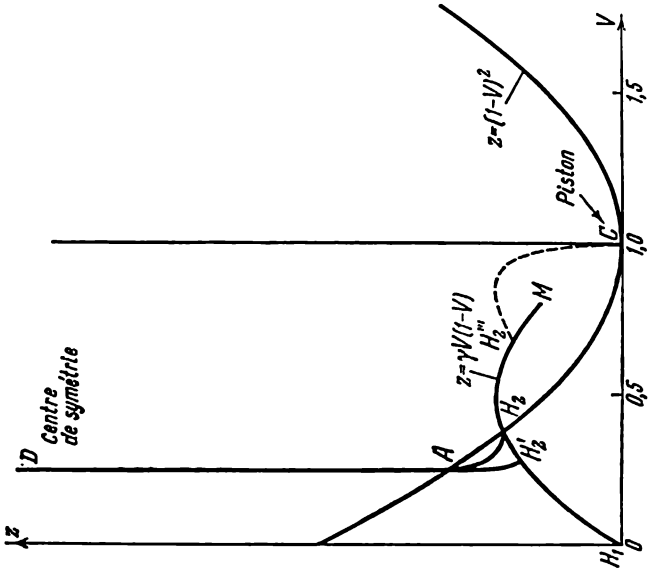


Fig. 55. Pour $0<\omega<2\gamma/(\gamma+1)$ la solution du problème de détonation est décrite par les courbes intégrales H_2AD ou $H_2'AD$. Le point H_2 vérifie la condition de Chapman-Jouguet

Les courbes de distribution des caractéristiques de l'écoulement du gaz pour $\gamma=\frac{5}{3}$ et $\omega=1{,}5$ et lorsque l'on a la condition de Chapman-Jouguet sont données sur les figures 52, 53 et 54.

Si $\omega\to 2\gamma/(\gamma+1)$, le point singulier A se déplace sur la parabole (8.2) en s'approchant du point d'intersection avec la parabole (8.3); pour $\omega=2\gamma/(\gamma+1)$ les points H_2 et A se confondent, la solution est unique et la condition de Chapman-Jouguet est remplie.

Si

$$\frac{2\gamma}{\gamma+1}<\omega<\frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1},$$

il n'y a pas de solution satisfaisant à la condition de Chapman-Jouguet.

La solution est unique et est fournie par une courbe intégrale issue du point singulier D et coupant la parabole (8.3) en un point H_2 tel que $\lambda>0$ (fig. 56).

Si $\omega\to 3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$, le point singulier B (voir fig. 39) monte, passe par le point singulier A et prend son type de singularité. Lorsque $\omega=3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$, le point B se situe sur la parabole (8.3) (voir fig. 40). Dans ce cas pour obtenir une solution il faut effectuer un saut du point O

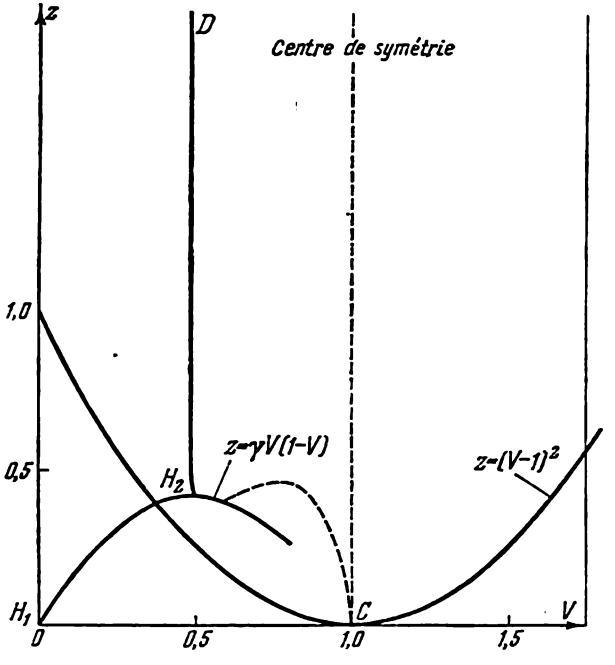


Fig. 56. Pour $2\gamma/(\gamma+1)<\omega<3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$ la solution du problème de détonation est traduite par la courbe intégrale DH_2. La condition de Chapman-Jouguet n'est pas remplie

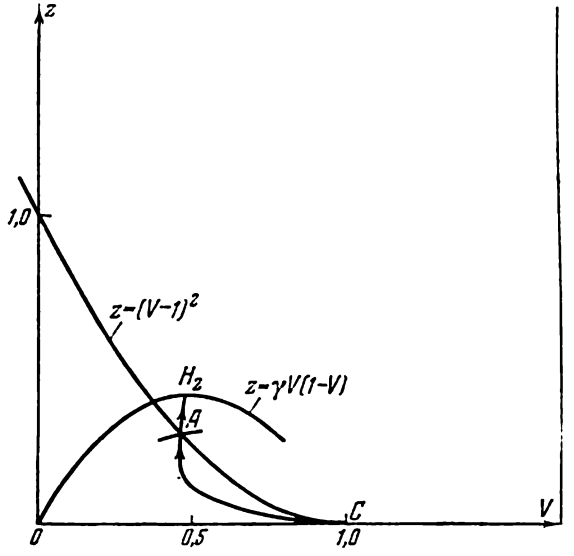


Fig. 57. Pour $\omega > 3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$ la solution du problème de la détonation se traduit par la courbe intégrale H_2AC. Au point C correspond un vide en expansion. La condition de Chapman-Jouguet n'est pas remplie

au point B. Tous les écoulements du gaz en arrière du front d'onde sont traduits, dans le plan z, V, par un seul point B. Dans ce cas derrière le front d'onde on a $z=z_2=\text{const}$, $V=V_2=\text{const}$, et la solution correspondante est donnée par les formules simples

$$\frac{v}{v_2}=\frac{r}{r_2}, \quad \frac{\varrho}{\varrho_2}=\frac{r_2}{r}, \quad \frac{p}{p_2}=\frac{r}{r_2}. \tag{8.4}$$

La vitesse derrière le front d'onde est proportionnelle à la coordonnée r.

Si $3(\gamma+1)/(3\gamma-1)<\omega$, la solution revêt, dans le plan z, V, la forme d'une courbe intégrale passant vers le point C par le point A (fig. 41). Le point singulier C correspond à une sphère en dilatation à l'intérieur de laquelle la pression est nulle. La valeur de Λ et, partant, celle de la vitesse de détonation sont définies par le point d'intersection de la courbe intégrale avec la parabole (8.3) (cf. schéma fig. 57).

Les distributions correspondantes des caractéristiques du gaz sont données pour $\gamma=\frac{5}{3}$ et $\omega=\frac{7}{3}=2{,}33\ldots$ sur les figures 52, 53 et 54.

Il va sans dire que toutes les conclusions envisagées pour les écoulements automodèles, concernant l'augmentation de la vitesse de détonation et la formation du vide au centre de symétrie, sont indépendantes de la quantité de chaleur dégagée Q; elles sont définies uniquement par la loi de décroissement de la densité initiale, celle-ci étant déterminée par la valeur de l'exposant ω.

On arrive également à obtenir des vitesses de détonation supérieures à celle que donne la condition de Chapman-Jouguet en utilisant les tuyaux convergents. Si l'aire de la section varie selon une loi de puissance, l'écoulement du gaz est automodèle dans une approximation hydraulique, étant défini par les équations (5.3), (5.4) mais pour $\nu < 1$. La valeur de ν se déduit de la loi de rétrécissement du tube de courant.

§ 9. Propagation de la flamme

Etudions le mouvement perturbé d'un mélange de combustion produit par la combustion dans une très mince couche mobile. L'analyse*) montre qu'il est possible de négliger dans de nombreux cas l'épaisseur de la couche où la réaction chimique a lieu en considérant que la réaction chimique et le dégagement de chaleur se produisent instantanément lors du passage à travers une certaine surface dite front de flamme, les caractéristiques de de l'état et de l'écoulement du gaz subissant des sauts à la traversée de cette surface. A la différence du front de détonation le front de flamme est un saut de détente et la vitesse de propagation u de ce dernier par rapport aux particules du mélange de combustion est une constante physico-chimique connue. La vitesse de propagation de la flamme est petite par rapport à la vitesse du son et par conséquent par rapport à la vitesse de détonation.

Sur le front de flamme tout comme sur le front de détonation sont remplies les conditions (2.12), (2.13) et (2.14); la seule différence est que la vitesse du front de flamme par rapport aux particules est petite et connue au préalable. Le front de flamme engendre des perturbations dans le gaz qui se propagent devant et derrière le front. Des racines de l'équation (2.14) on choisit la plus petite $\varrho_1/\varrho_2 > 1$. Cette racine est associée aux états qui dérivent de l'état initial pour un dégagement continu de chaleur (sans zone d'absorption de chaleur) lorsqu'on considère la réaction dans une couche mince finie.

La solution du problème de la propagation d'un front de flamme plan à travers un gaz au repos de densité ϱ_1 et de pression p_1, contenu dans un tube cylindrique et allumé près de l'extrémité fermée, est très simple et consiste en ceci. Une onde de choc partie du bout fermé se propage par un gaz au repos, derrière le front d'onde s'établit un écoulement de translation du gaz dont la vitesse est dirigée du côté de l'onde de choc. Par ce gaz en mouvement se propage le front de flamme plan derrière lequel le gaz est au repos en vertu de la condition aux limites au bout fermé. Pour résoudre le problème complètement il suffit de former et de résoudre six équations compatibles : trois sur le front de flamme et trois sur le saut de compression. Les six équations permettent de déterminer les six inconnues : la densité et la pression derrière le front de flamme et derrière le saut de

*) Le problème de la propagation d'une flamme sphérique pour $\varrho_1 = \text{const}$ et $p_1 = \text{const}$ est étudié par G. Bam-Zélikovitch.

compression, la vitesse du gaz derrière l'onde de choc et la vitesse de propagation de l'onde de choc.

Considérons le problème du front de flamme sphérique en supposant que le front de combustion se crée à l'instant $t=0$ en un point pour ensuite se propager par onde sphérique à travers un gaz au repos de densité ϱ_1 et de pression p_1 constantes. Manifestement, l'écoulement de perturbation du gaz est automodèle et se définit par les mêmes constantes que le phénomène de détonation. Les courbes intégrales dans le plan z, V correspondant à la flamme sphérique comme à la détonation sphérique sont données à la figure 38.

A un certain moment $t>0$ les particules gazeuses suffisamment éloignées du centre d'inflammation seront encore au repos. Le domaine du repos est représenté par la droite intégrale $V=0$. On ne peut passer du repos $V=0$ sur une courbe intégrale représentant le mouvement du côté gauche du demi-plan $z>0$, $V<0$ ni par un saut de détente (front de flamme) ni par un point singulier A de faible discontinuité, l'écoulement ne se prolongeant pas jusqu'au centre de symétrie. Dans ce cas à l'écoulement continu ou à l'écoulement avec un saut correspond une courbe intégrale coupant la parabole

$$z=(1-V)^2.$$

Il en découle que le passage du repos $V=0$ à l'écoulement sur une autre courbe intégrale n'est possible que par un saut de compression simple pour z_1 initial inférieur à 1. D'après (2.10) les sauts de compression transforment l'axe $V=0$ en des points de la parabole

$$z_2=(1-V_2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}V_2\right). \tag{9.1}$$

Si l'on veut que la solution se prolonge jusqu'au centre de symétrie où $\lambda=0$, on est obligé de définir le front de flamme de façon à ce que le point derrière le front de flamme soit situé soit sur la droite intégrale $V=0$ allant vers un point singulier $D(z=\infty, V=0)$, soit sur la courbe intégrale L entrant dans le point singulier B*),

$$B\left(z=\frac{3(\gamma-1)^2}{(3\gamma-1)^2},\quad V=\frac{2}{3\gamma-1}\right)$$

(voir fig. 58).

Il découle des conditions (2.25) que le passage à l'axe $V=0$ à travers le front de flamme n'est possible qu'à partir des points de la courbe

$$z_3=\frac{(1-V_2)V_3\left(1+\frac{\gamma'-1}{2}V_3\right)+(\gamma'-1)\frac{Q}{u^2}(1-V_3)^3}{\frac{\gamma'}{\gamma}-\frac{\gamma'-1}{\gamma-1}(1-V_3)}. \tag{9.2}$$

*) Si la densité initiale est variable, $\varrho_1=A/r^\omega$, les coordonnées du point B ne dépendent que de ω (voir § 5).

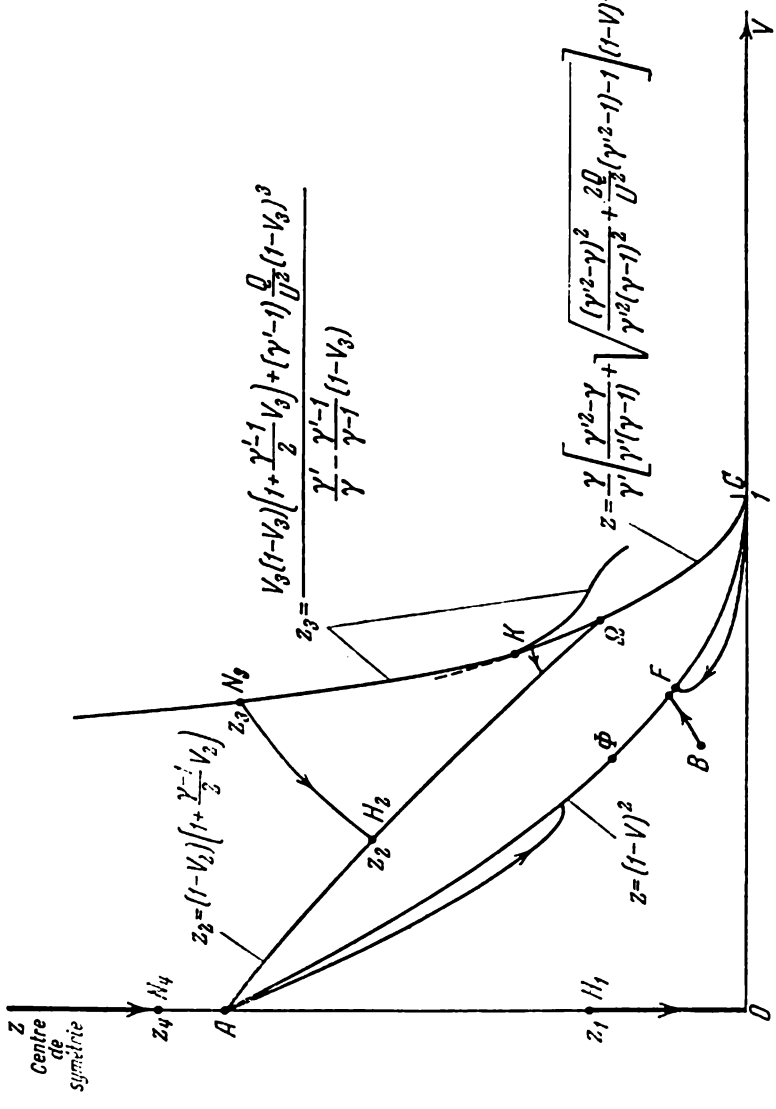


Fig. 58. Courbes intégrales dans le plan z, V dans le cas d'une combustion sphérique. Les points H_1 et H_2 correspondent à l'onde de choc précédant le front de flamme, les points N_3 et N_4, au front de flamme

L'équation (9.2) s'obtient de (2.25) en remplaçant les indices 1, 2 par 4, 3, en posant $V_4=0$ et en inversant le signe de la quantité

$$\frac{Q}{c^2}=\frac{Q(1-V_3)^2}{u^2},$$

car la combustion se produit au passage de l'état 3 à l'état 4; u est la vitesse de propagation de la flamme par rapport aux particules :

$$u=c-v=\frac{r}{t}(1-V_3)=c(1-V_3).$$

Dans l'équation (9.2) γ se rapporte au mélange de combustion en mouvement, γ' aux produits de combustion immobiles.

Sur la figure 58 est montrée la construction de la solution.

Après le saut le point représentatif se trouve en un certain point z_2, V_2 de la parabole (9.1); au mouvement ultérieur vers le centre correspond le déplacement le long de la courbe intégrale passant par ce point dans le sens des valeurs décroissantes de la variable λ, i.e. le déplacement dans le domaine situé au-dessus de la parabole (9.1). Le point d'intersection de la courbe intégrale en question avec la courbe (9.2) figure le bord avant du front de flamme derrière lequel se forme un noyau immobile correspondant aux points de l'axe $V=0$.

La construction présentée est toujours possible à effectuer, étant donné que toute courbe intégrale pour $V\leq 2/(\gamma+1)$ issue de la parabole (9.1) coupe la courbe (9.2) et que de tout point de la courbe (9.2) on peut passer à travers le front de flamme aux points de l'axe $V=0$.

Remarquons que nous avons supposé $z_4\geq 1$. Les points de la courbe (9.2) pour lesquels on a $z_4<1$ ne peuvent correspondre au bord avant du front de flamme, car cela entraînerait la vitesse supersonique du front de flamme par rapport aux particules derrière celui-ci. Dans ce cas on peut construire le front de flamme en utilisant un saut sur la parabole $z=(1-V)^2$ à partir du point d'intersection de la courbe intégrale figurant l'écoulement du gaz derrière l'onde de choc avec la parabole*)

$$z=\frac{\gamma}{\gamma'}\left[\frac{\gamma'^2-\gamma}{\gamma'(\gamma-1)}+\sqrt{\frac{(\gamma'^2-\gamma)^2}{\gamma'^2(\gamma-1)^2}+\frac{2Q}{u^2}(\gamma'^2-1)-1}\right](1-V)^2 \qquad (9.3)$$

(fig. 58, courbe $K\Omega C$). La vitesse de propagation d'un tel saut par rappor aux particules derrière le front est exactement égale à la vitesse du son, en outre il s'y forme une onde de détente supplémentaire. Cette onde de détente est décrite par une courbe intégrale allant d'un point de la parabole $z=(1-V)^2$ au point A associé à la frontière du noyau de repos, ou bien du point F au point B, dans ce dernier cas le noyau de repos ne se forme pas et le déplacement se prolonge jusqu'au centre de symétrie ou enfin du point F au point singulier C ($z=0$, $V=1$), ce qui correspond à la formation du vide au voisinage du centre.

*) Pour un saut du front de flamme on passe de la parabole (9.3) sur la parabole $z=(1-V)^2$.

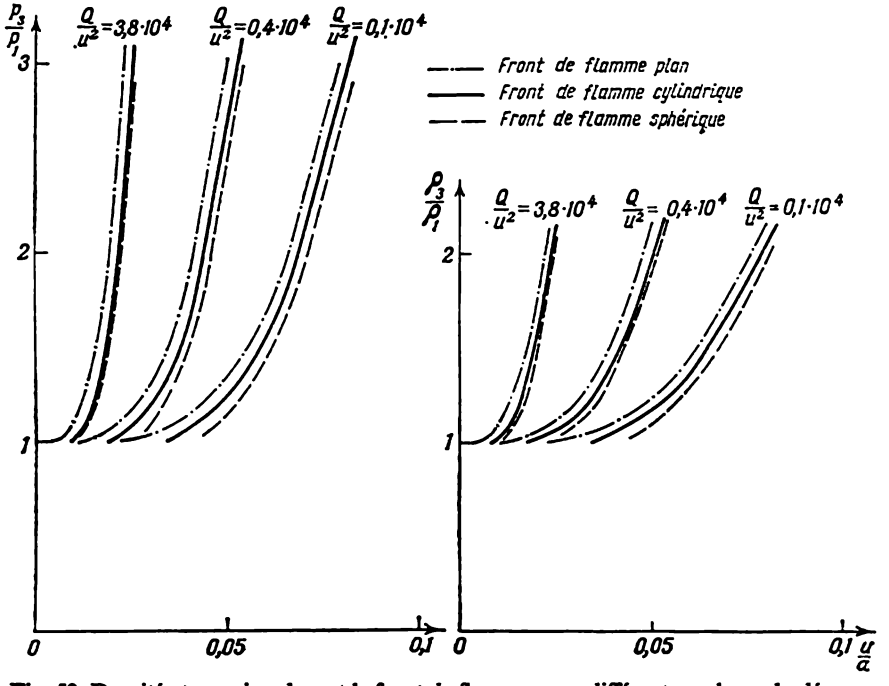


Fig. 59. Densité et pression devant le front de flamme pour différentes valeurs du dégagement calorifique Q/u^2 (Q est l'énergie dégagée par unité de masse; u la vitesse du front de flamme par rapport aux particules; p_1 la pression, ϱ_1 la densité et a_1 la vitesse du son dans le mélange de combustion)

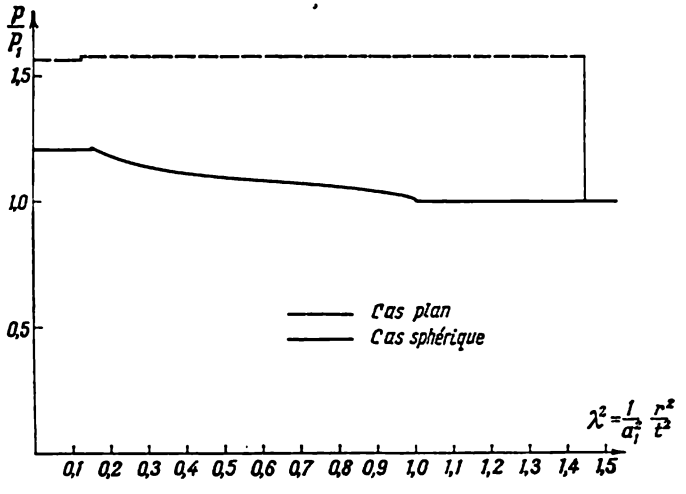


Fig. 60. Distribution de la pression dans les cas du front de flamme plan et du front de flamme sphérique : $Q/a_1^2=60$ et $u/a_1=0{,}016$

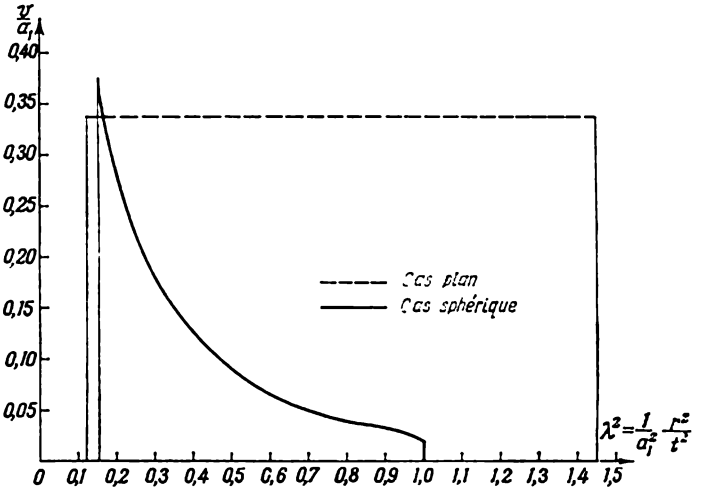


Fig. 61. Distribution de la vitesse de combustion dans les cas du front de flamme plan et du front de flamme sphérique : $Q/a_1^2=60$ et $u/a_1=0{,}016$

La solution du problème existe pour tous les points z_2, V_2 sur la parabole (9.1) situés au-dessus du point Ω d'intersection de la parabole (9.1) avec la parabole (9.3). Au point Ω sur la parabole $z=(1-V)^2$ correspond le point Φ. Si le point Φ est au-dessus du point F, il se forme toujours un noyau de repos au voisinage du centre de symétrie. Si p_1 et ϱ_1 sont constants, un noyau de repos se forme également au voisinage du centre de symétrie. Si $\varrho_1=A/r^{\omega}$, pour certains ω on peut s'attendre à la formation du vide au voisinage du centre de symétrie.

Des méthodes analogues permettent de construire la solution du problème de la propagation d'une onde de flamme cylindrique. Les résultats des calculs numériques et la comparaison des divers cas sont donnés sur les figures 59, 60 et 61.

§ 10. Décomposition d'une discontinuité arbitraire dans un mélange de combustion

Sans faire une analyse détaillée du problème de la décomposition d'une discontinuité arbitraire (formulé au § 1) indiquons seulement le caractère général de l'écoulement*).

Supposons d'abord que des deux côtés d'une surface de discontinuité se trouvent deux gaz inertes et que la pression du gaz à gauche (2ème) est supérieure à celle du gaz à droite (1er) (le cas inverse est tout à fait analogue).

*) Pour les gaz inertes, ce problème fut étudié par N. Kotchine (voir Circ. math., Palermo, 1926, v. 50, pp. 305 à 344).

Dirigeons l'axe x dans le sens du 2ème gaz au 1er; si la différence $v_1 - v_2$ des vitesses initiales des gaz est négative et grande en module (ce sera le cas, par exemple, où les vitesses initiales des gaz sont dirigées vers la surface de discontinuité et leur différence est grande en valeur absolue mais négative), alors des deux côtés se propageront des ondes de choc. A la frontière des gaz peut subsister une discontinuité stationnaire sur laquelle la pression et la vitesse normale sont continues tandis que la densité subit une discontinuité. Sur la figure 62, *a* est montrée la distribution des pressions dans ce cas.

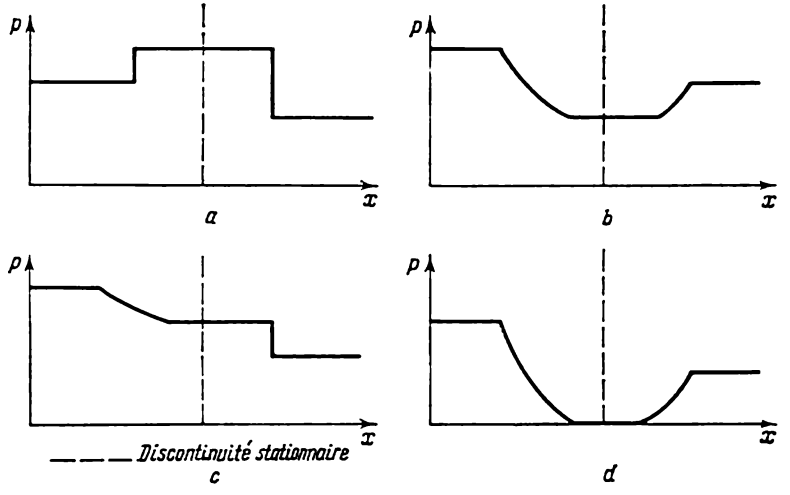


Fig. 62. Divers cas de décomposition d'une discontinuité arbitraire dans un gaz inerte

Lorsque la différence des vitesses initiales s'accroît, l'onde de choc cède la place à l'onde de détente d'abord dans le second gaz (fig. 62,*c*) puis on la voit apparaître dans le premier gaz (fig. 62, *b*). Lorsque la différence positive des vitesses initiales devient très grande, il se forme un vide entre les ondes de détente s'éloignant l'une de l'autre (fig. 62, *d*).

Le cas plus compliqué est celui où le premier gaz est un mélange de combustion; la décomposition d'une discontinuité arbitraire peut engendrer une onde de flamme qui se propagera dans le mélange. Le mouvement qui en résulte sera en gros analogue au mouvement envisagé précédemment*).

Lorsque la différence des vitesses initiales est petite, on assiste à la propagation des ondes de choc dans le gaz inerte et à la formation d'ondes de choc suivies du front de flamme dans le cas d'un mélange de combustion.

*) Cette question est traitée en détail, avec les résultats numériques, par G. Bam-Zelikovitch, *Décomposition d'une discontinuité arbitraire dans un mélange de combustion* (en russe). Recueil d'articles n° 4 « Teoretitcheskaïa hydromekhanika » sous la rédaction de L. Sédov, Oborongiz, 1949.

Le gaz inerte peut éventuellement être séparé des produits de combustion par une discontinuité stationnaire.

La figure 63, *a* représente la pression pour ce cas (le front de flamme est marqué par un large trait vertical, la discontinuité stationnaire en pointillé). Avec l'augmentation de la différence des vitesses initiales l'onde de choc cède d'abord la place à l'onde de détente dans le gaz inerte (fig. 63, *c*), ensuite l'onde de détente remplace également l'onde de choc devant le front de flamme (fig. 63, *b*). En outre, la vitesse des produits de combustion par rapport au front de flamme augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne la vitesse du son.

L'augmentation ultérieure de la différence des vitesses initiales n'altère pas l'écoulement devant le front de flamme mais elle occasionne l'apparition d'une nouvelle onde de détente immédiatement derrière le front de flamme (fig. 63, *d*). A une très grande différence des vitesses initiales il peut se former un vide entre le gaz inerte et les produits de combustion.

Si la pression du gaz inerte est inférieure à celle du mélange de combustion, on peut assister au cas où par le mélange de combustion se propagera une onde de détente devant le front de flamme, et par le gaz inerte, une onde de choc.

De même, si une onde de détonation se propage dans le mélange de combustion, alors en augmentant la différence des vitesses initiales de $-\infty$ à $+\infty$ on s'aperçoit d'abord que le gaz inerte est traversé par une onde de choc et le mélange de combustion par une onde de détonation à une très grande vitesse; ensuite on constate que l'onde de choc dans le gaz inerte est remplacée par une onde de détente tandis que la vitesse de l'onde

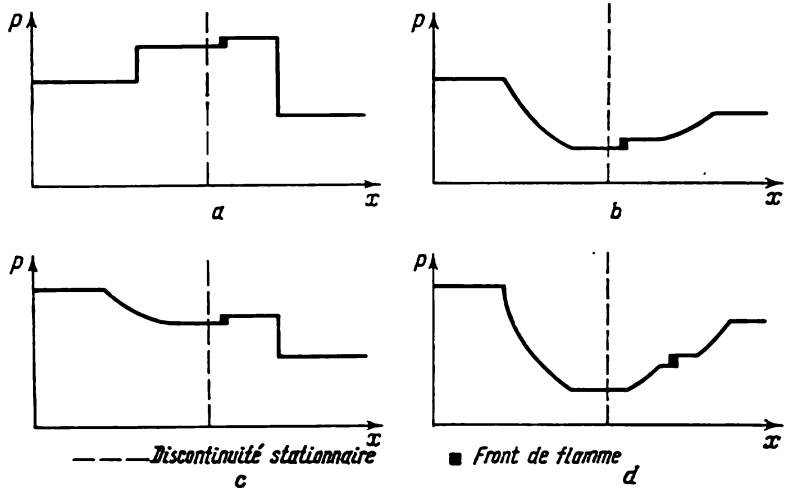


Fig. 63. Divers cas de décomposition d'une discontinuité arbitraire dans un mélange de combustion

de détonation diminue jusqu'à une certaine valeur. Parallèlement, la vitesse des produits de détonation par rapport au front s'accroît jusqu'à ce qu'elle atteigne la vitesse du son. Par la suite, la vitesse de l'onde de détonation ne varie pas et une onde de détente se crée derrière celle-ci.

Voici quelques exemples de formation et de décomposition d'une discontinuité arbitraire.

1. Soit une onde de choc se propageant dans un gaz et soit une seconde onde de choc qui poursuit la première. A l'instant où la seconde onde rattrape la première on voit apparaître une surface de discontinuité sur laquelle ne sont plus remplies les conditions de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, en d'autres termes, une discontinuité arbitraire.

Le calcul montre que dans ce cas la décomposition de la discontinuité fait naître les ondes de choc qui se propagent des deux côtés.

2. L'onde de choc s'approche de la frontière de séparation de deux milieux de densités différentes. Au moment où l'onde de choc passe d'un milieu dans l'autre il se produit une discontinuité arbitraire. Sa décomposition peut engendrer deux types d'écoulement.

Lorsque l'onde passe d'un milieu moins dense dans un autre plus dense (par exemple de l'air dans l'eau), les ondes de choc se propageront des deux côtés. Dans le cas contraire (par exemple, l'onde passe de l'eau dans l'air) une onde de choc se propage en avant (dans l'air) et une onde de détente en arrière (dans l'eau).

3. Une onde de choc de faible intensité poursuit un front de flamme. (C'est le cas de la combustion pulsatoire dans les enceintes fermées.) Au moment où l'onde de choc rattrape la flamme, des ondes de choc se propageront des deux côtés du front de l'onde de flamme. Au cas où une onde de choc de faible intensité heurte un front de flamme, la décomposition de la discontinuité arbitraire engendre une onde de détente devant le front de flamme et une onde de choc se propageant à travers les produits de combustion.

Le problème de la décomposition d'une discontinuité donnée est très important pour l'étude du stade initial de l'écoulement du gaz dans les étoupilles à percussion. L'écoulement dans une étoupille à percussion est schématisé sur la figure 64. Deux gaz à haute et basse pressions sont séparés par une membrane. Par suite de la destruction subite de la membrane une discontinuité arbitraire se forme dans le gaz, en engendrant une onde de choc dans le gaz à basse pression. A l'instant de percussion de la membrane le gaz à haute pression est soit au repos, soit il se meut si une onde de choc ou de détonation s'approche de la membrane. L'intensité de l'onde de choc dans le gaz à basse pression dépend de l'écoulement initial et de la chute de pression, de la différence de température et de propriétés des gaz primitivement séparés l'un de l'autre par une membrane.

L'intensité de l'onde de choc augmente si l'on prend, en guise de gaz à basse pression, un gaz à faible vitesse du son initiale à cause des faibles valeurs du coefficient γ dans les gaz polyatomiques. Par exemple, à la

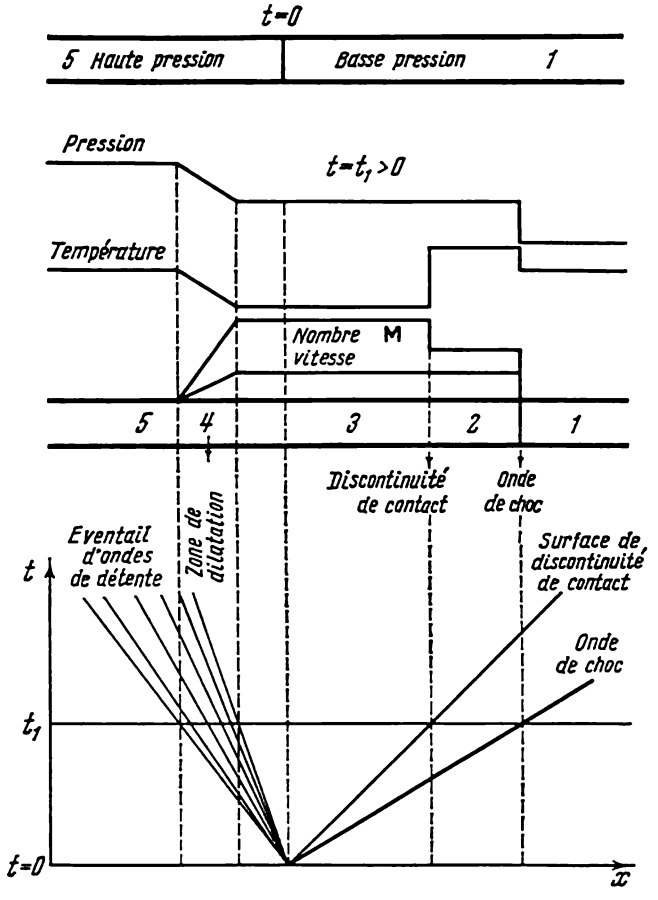


Fig. 64. Schéma d'écoulement dans une étoupille à percussion

température 273 °K, pour l'hélium $\gamma=1{,}67$ et la vitesse du son $a_1=975$ m/s; pour l'air $\gamma=1{,}4$ et $a_1=333$ m/s; pour le fréon $\gamma=1{,}15$ et $a_1=121{,}5$ m/s.

Toutes les conditions étant les mêmes, l'intensité de l'onde de choc dans le gaz à basse pression croît à mesure que s'abaisse sa température.

Il peut s'avérer que l'intensité de l'onde de choc dans le gaz à basse pression dépasse largement l'intensité de l'onde de choc attaquant la membrane dans le gaz à haute pression.

Avec les étoupilles à percussion on arrive à obtenir des ondes de choc exceptionnellement intenses, des températures élevées derrière le front d'onde et de grandes vitesses d'écoulement. Derrière le front d'onde de choc on observe des particules de température très élevée s'abaissant rapidement au bout d'un bref moment τ.

Les étoupilles à percussion sont largement utilisées dans les études aérodynamiques dans le cas de très grandes vitesses d'écoulement autour des corps et dans de multiples recherches physico-chimiques concernant notamment la mise en œuvre des réactions chimiques à hautes températures.

La possibilité d'obtenir de grandes températures pendant de très courtes durées permet d'analyser la cinétique des réactions chimiques et d'obtenir les produits intermédiaires des réactions en chaîne.

§ 11. Problème de l'explosion forte*)

1. L'explosion forte dans le gaz. On s'apprête à montrer que lors d'une explosion forte le domaine d'écoulement perturbé de l'air est séparé des états non perturbés par une onde de choc.

On a déjà indiqué que dans ce cas on peut négliger la pression devant l'onde de choc par rapport à la pression derrière celle-ci. Evaluons avant tout le degré de précision de cette hypothèse ainsi que le type d'ondes de choc auquel elle s'applique.

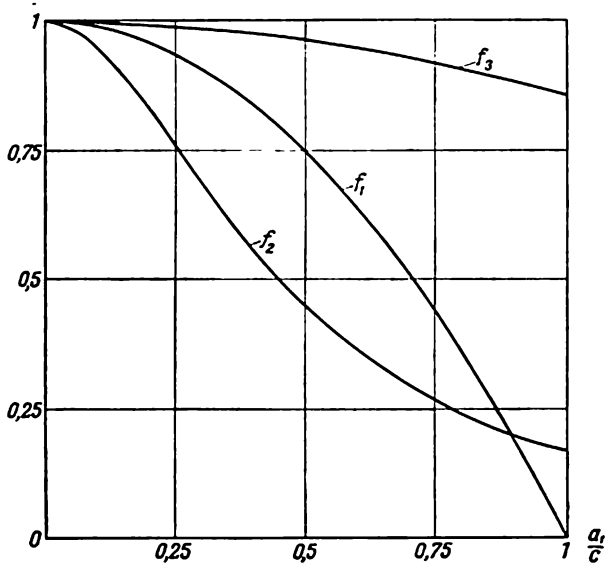


Fig. 65. f_1, f_2 et f_3 en fonction du rapport a_1/c (a_1 est la vitesse du son dans le milieu non perturbé, c la vitesse de l'onde de choc)

*) L'exposé qui suit englobe la position, la résolution théorique exacte et numérique des problèmes de l'explosion forte tant pour les ondes sphériques que pour les ondes cylindriques et planes sous la forme de sa première publication dans « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 42, n° 1, 1946 et dans « Prikladnaïa matematika i mekhanika ». t. 10, op. 2, 1946.

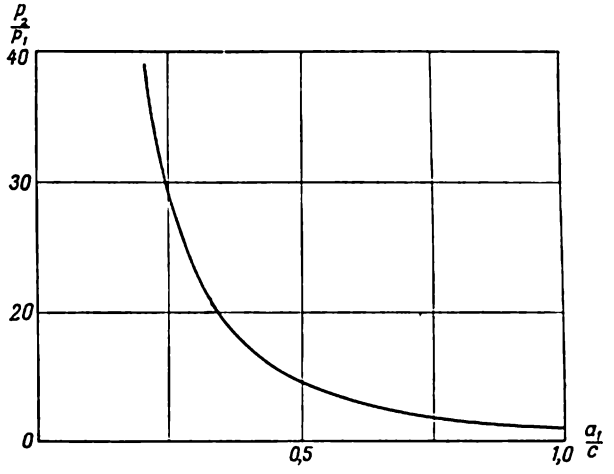


Fig. 66. Chute de pression dans l'onde de choc en fonction du rapport a_1/c

A cette fin récrivons les conditions sur l'onde de choc (2.5) et (2.6) sous la forme, compte tenu de ce que $v_1=0$:

$$\left.\begin{aligned} v_2&=\frac{2}{\gamma+1}c\left[1-\frac{a_1^2}{c^2}\right]=\frac{2c}{\gamma+1}f_1,\\ \varrho_2&=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\varrho_1\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{a_1^2}{c^2}\right]^{-1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\varrho_1 f_2,\\ p_2&=\frac{2}{\gamma+1}\varrho_1 c^2\left[1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a_1^2}{c^2}\right]=\frac{2}{\gamma+1}\varrho_1 c^2 f_3,\end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde de choc.

Plus l'onde de choc est intense, plus le rapport a_1/c diminue.

La figure 65 donne f_1, f_2 et f_3 en fonction de a_1/c. La figure 66 représente p_2/p_1 en fonction du rapport a_1/c pour $\gamma=1{,}4$. On voit sans peine que déjà pour $a_1/c<0{,}1$ les valeurs f_1, f_2 et f_3 diffèrent de l'unité moins que de 0,05.

Si l'on pose dans les relations (11.1)

$$\frac{a_1}{c}=0 \quad \text{et} \quad f_1=f_2=f_3=1$$

(ou, ce qui revient au même, $p_1=0$), alors pour $a_1/c<0{,}1$ on commet une erreur inférieure à 5% sur les valeurs v_2, ϱ_2 et p_2.

Les conditions sur l'onde de choc auront alors la forme

$$\left.\begin{aligned} v_2&=\frac{2}{\gamma+1}c,\\ \varrho_2&=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\varrho_1,\\ p_2&=\frac{2}{\gamma+1}\varrho_1 c^2.\end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

La vitesse de propagation de l'onde de choc c est à déterminer.

En utilisant les équations du mouvement sous la forme (1.3) et la position indiquée du problème de l'explosion forte on peut adopter comme constantes dimensionnelles fondamentales les quantités

$$\varrho_1 \quad \text{et} \quad \frac{E}{\varrho_1},$$

où E est une constante que l'on définira plus tard, de même dimension que l'énergie E_0 dégagée au cours de l'explosion; la dimension de E est égale à

$[E]=\mathrm{ML^2T^{-2}}$ dans le cas sphérique,
$[E]=\mathrm{MLT^{-2}}$ dans le cas cylindrique,
$[E]=\mathrm{MT^{-2}}$ dans le cas plan.

Ces trois cas peuvent être résumés en une seule formule

$$[E]=\mathrm{ML}^{\nu-1}\mathrm{T}^{-2}.$$

Evidemment, la constante E est tout simplement proportionnelle à E_0 :

$$E_0=\alpha E,$$

où α est une constante.

Le seul paramètre sans dimension λ est égal dans ce cas à

$$\lambda=\frac{r}{\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{\frac{1}{2+\nu}} t^{\frac{2}{2+\nu}}}.$$

On établit aisément la loi de mouvement de l'onde de choc, sans avoir à résoudre les équations du mouvement du gaz.

Les équations du mouvement peuvent être différentes, toutefois elles ne doivent pas contenir de nouvelles constantes physiques caractéristiques de dimensions indépendantes de ϱ_1 et de E. En particulier, il n'est pas besoin de supposer constant le coefficient $\gamma=c_p/c_v$ dans les équations (1.3).

Pour l'onde de choc la coordonnée r_2 est une fonction du temps t, et comme les valeurs dimensionnées t, ϱ_1 et E ne donnent pas une combinaison adimensionnée,

$$r_2=\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{\frac{1}{2+\nu}} t^{\frac{2}{2+\nu}} \lambda^*, \tag{11.3}$$

où $\lambda^*=\text{const}$; λ^* peut être posé égal à un nombre quelconque non nul et on peut calculer E en fonction de l'énergie de la charge E_0. Pour simplifier nous poserons par la suite $\lambda^*=1$. Cela permet de déterminer la constante α de la formule $E_0=\alpha E$ sur la base de la solution des équations du mouvement.

Ainsi donc, la loi du mouvement et la vitesse de l'onde de choc ont pour expression

$$r_2=\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{1/5} t^{2/5}, \quad c=\frac{2}{5}\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5}=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{E}{\varrho_1}}\,\frac{1}{\sqrt{r_2^3}} \tag{11.4}$$

dans le cas de la symétrie sphérique;

$$r_2=\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{1/4}\sqrt{t}, \quad c=\frac{1}{2}\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\varrho_1}}\,\frac{1}{r_2} \tag{11.5}$$

dans le cas de la symétrie cylindrique et

$$r_2=\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{1/3}t^{2/3}, \quad c=\frac{2}{3}\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{1/3}t^{-1/3}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{E}{\varrho_1}}\,\frac{1}{\sqrt{r_2}} \tag{11.6}$$

pour les ondes planes.

Ces formules montrent que la loi d'amortissement d'une onde de choc dépend de la forme de la charge.

La formule établie ci-dessus pour le cas de la symétrie sphérique concorde bien avec les données expérimentales, il s'agit des photographies de l'explosion de la bombe atomique à New Mexico en 1945.

Les figures 67, 68 et 69 représentent les photographies de l'explosion de la bombe atomique publiées en 1950 par G. Taylor*).

A l'intérieur du domaine de l'écoulement perturbé de l'air, à des distances suffisamment grandes du centre de l'explosion de la bombe atomique, la température de l'air est très grande, ce qui explique que sur les photographies ce domaine est représenté par une tache claire. Dans la partie supérieure la frontière de la tache a une forme sphérique bien nette et elle se confond avec l'onde de choc. Avec le temps l'onde de choc s'affaiblit, la température derrière le front diminue. Toutefois la visibilité du front d'onde se conserve sous certaines conditions à cause du saut de densité. Dans son article Taylor établit à partir des photographies la variation du rayon r_2 de l'onde de choc sphérique se dilatant entre 11 et 185 m en fonction du temps t depuis l'instant de l'explosion dans un intervalle de $0{,}1\cdot10^{-3}$ à $62\cdot10^{-3}$ s**).

Sur la figure 70 les points expérimentaux sont figurés par des croix. La droite est décrite par l'équation

$$\frac{5}{2}\log r_2[\mathrm{cm}]-\log t[s]=11{,}915$$

*) G. Taylor, Proceedings of the Royal Society, n° 8, 1065, t. 201, p. 175, 1950.

**) La théorie du développement au stade initial de la boule de flamme lors de l'explosion d'une bombe atomique ainsi que le rayonnement qui accompagne l'explosion sont étudiés par H. Brode (voir H. Brode, *Review of nuclear weapons effect*, Ann. Rev. of nucl. sci., v. 18, 1968).

Pour E_0 fixe le transfert d'énergie par radiation croît avec la diminution des dimensions linéaires caractéristiques d de la bombe. Cela est lié à l'augmentation de la température T_0 des produits d'explosion. Plus la température est élevée, et plus est la fraction d'énergie rayonnée par les produits d'explosion.

Si on ne tient pas compte de l'absorption par le milieu ambiant de l'énergie émise par les produits d'explosion, alors, d'après les lois macroscopiques du rayonnement pour E_0 fini, $d\to0$ et $T_0\to\infty$, toute l'énergie de l'explosion doit, à la limite, être libérée sous forme de rayonnement.

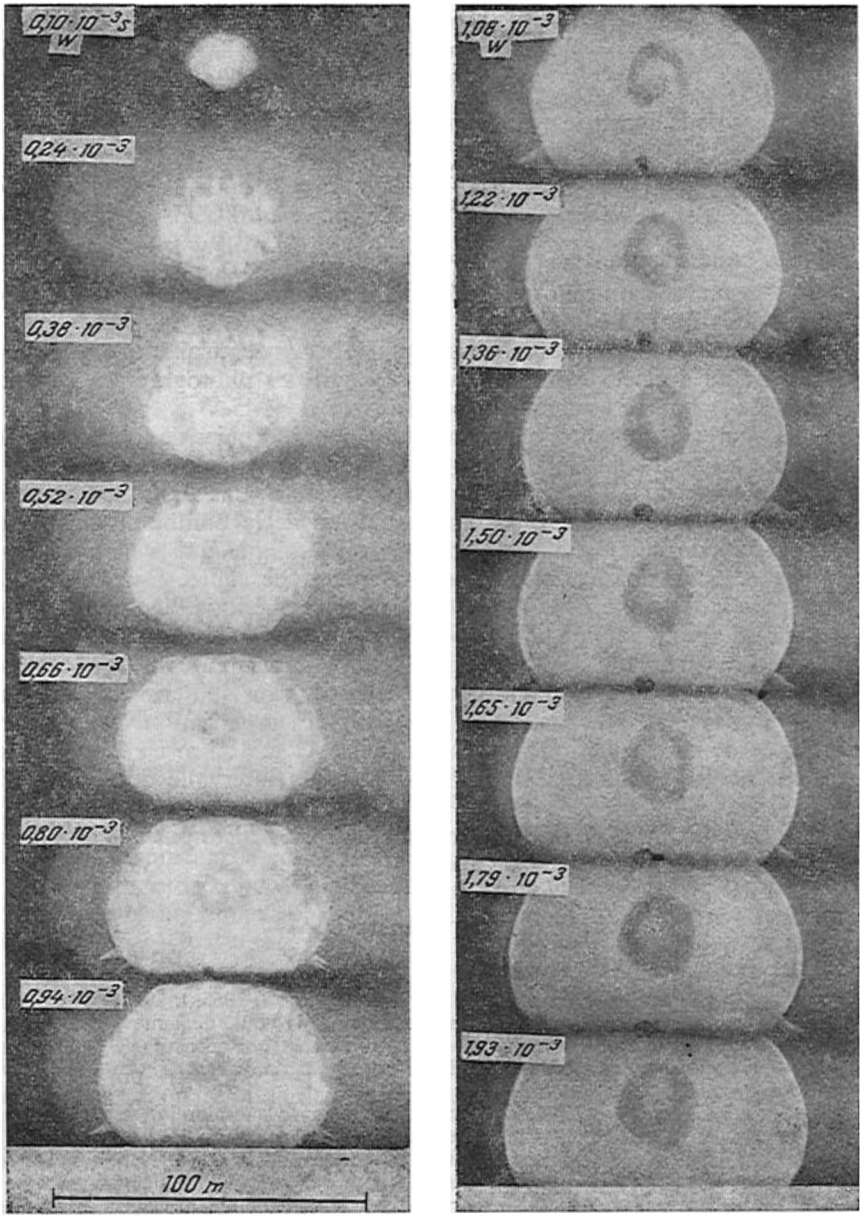


Fig. 67. Photographies d'une boule de feu prise dans l'intervalle de $t=0{,}1\cdot10^{-3}$ à $t=1{,}93\cdot10^{-3}$ s lors de l'explosion de la bombe atomique à New Mexico

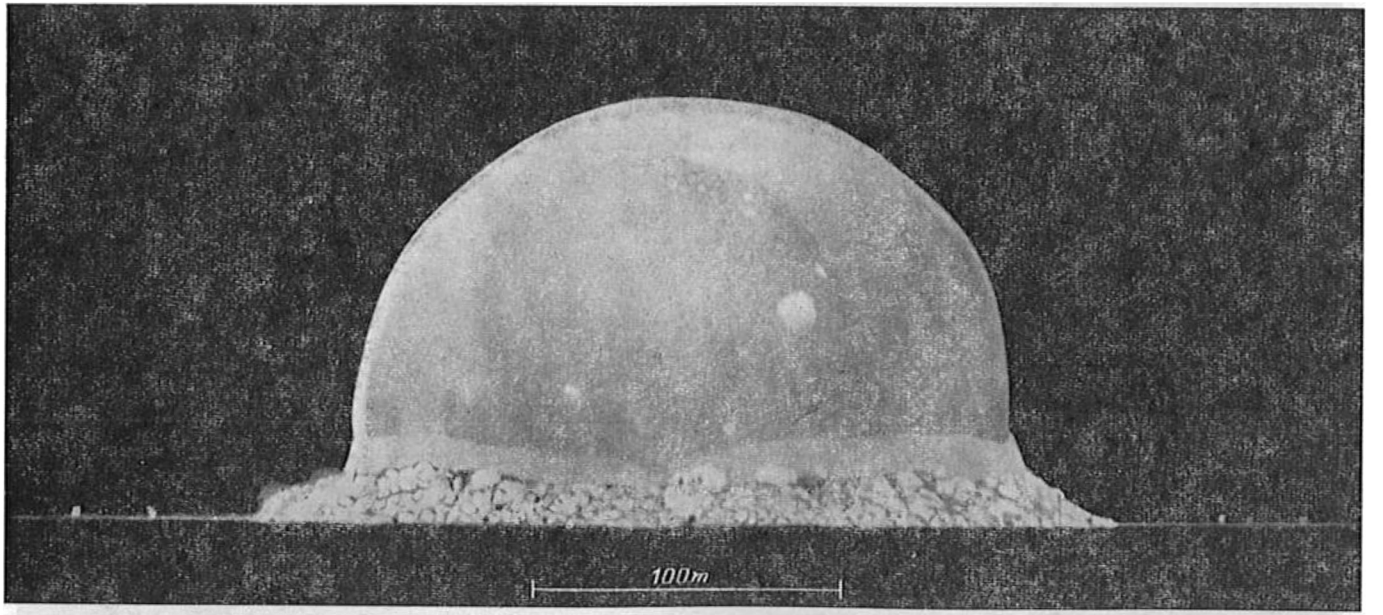


Fig. 68. Boule de feu à l'instant $t = 15 \cdot 10^{-3}$ s

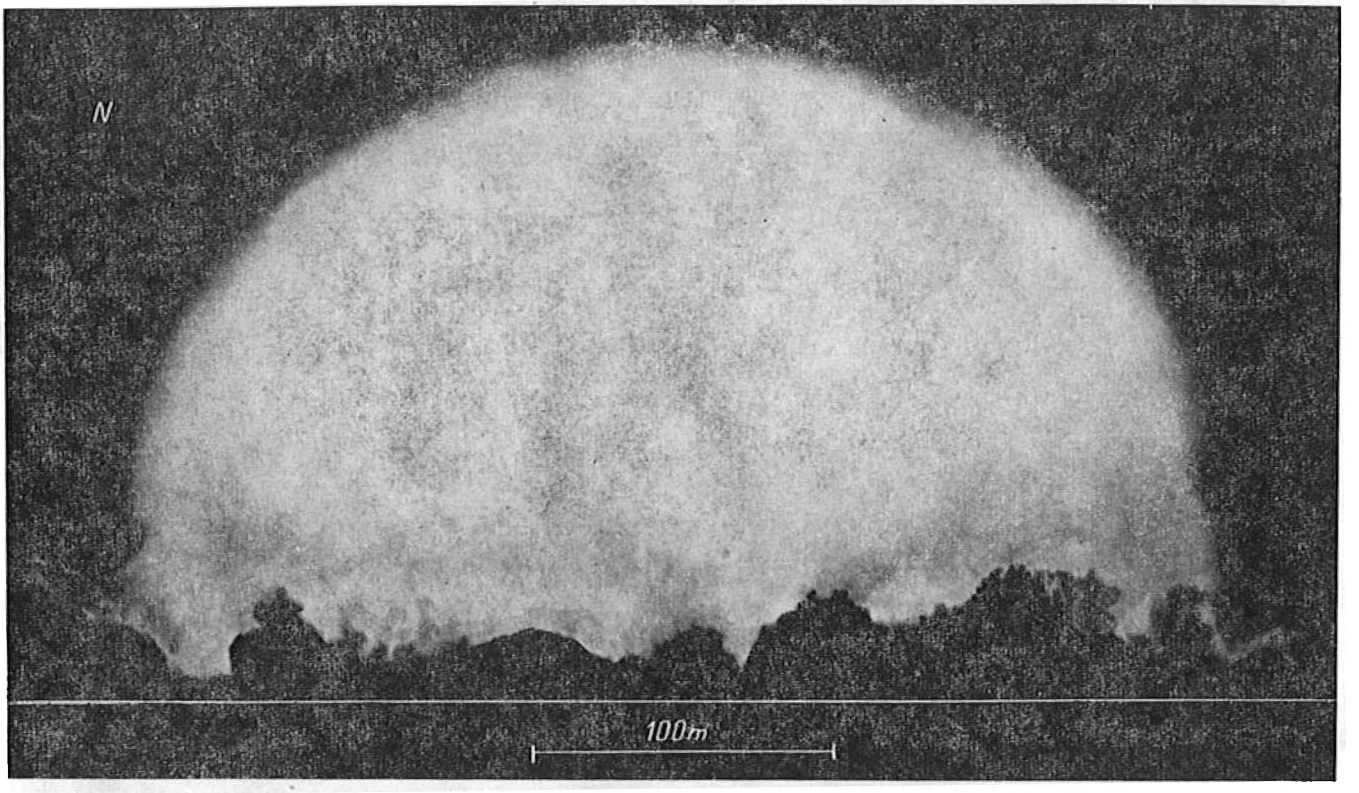


Fig. 69. Photographie de l'explosion à l'instant $t = 127 \cdot 10^{-3}$ s

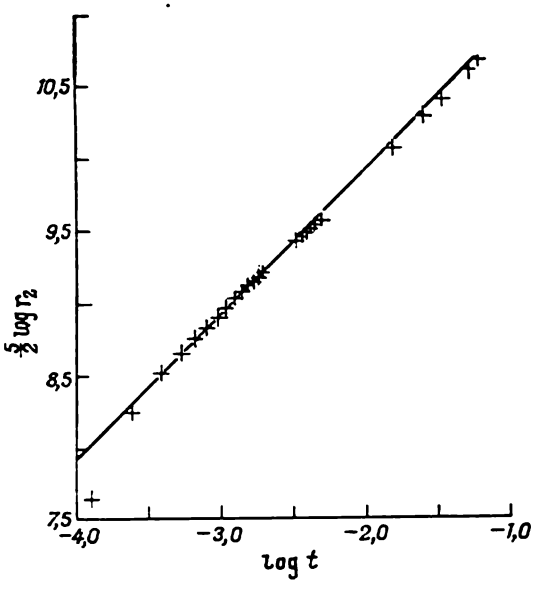


Fig. 70. Les données expérimentales représentées par des croix se situent sur une droite inclinée à 45° sur les axes de coordonnées; c'est une bonne vérification de la formule théorique $r_2=(E/\varrho_1)^{1/5}t^{2/5}$

coïncidant avec la formule théorique (11.4) après le calcul des logarithmes et si l'on pose en outre

$$\frac{1}{2}\log\frac{E}{\varrho_1}=11{,}915,$$

d'où pour $\varrho_1=0{,}00125$ g/cm^3

$$E=6{,}76\cdot10^{23}\ \varrho_1=8{,}45\cdot10^{20}\ \text{ergs}. \tag{11.7}$$

Les données expérimentales confirment bien la loi de propagation de l'onde de choc (11.4) que l'on a établie en s'appuyant sur la théorie dimensionnelle, et permettent de déterminer la valeur de la constante E d'après l'égalité (11.7).

Les formules de la vitesse de l'onde de choc peuvent aussi se présenter comme suit :

$$c=\frac{2}{\nu+2}\,\frac{r}{t}.$$

En mettant cette expression de c dans les conditions sur l'onde de choc (11.2) et en y passant, d'après les formules (1.1), aux variables adimensionnées V, $\mathcal{R}$, P et $z=\gamma P/\mathcal{R}$, on trouvera les valeurs V_2, $\mathcal{R}_2$ et z_2 derrière l'onde de choc :

$$V_2=\frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)},\quad \mathcal{R}_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\quad z_2=\frac{8\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2(\nu+2)^2}. \tag{11.8}$$

Pour obtenir la solution du problème de l'écoulement perturbé d'un gaz lors d'une explosion forte on peut avoir recours à l'analyse du champ des courbes intégrales dans le plan z, V donnée au § 5 et aux intégrales finies établies au § 3.

Les champs des courbes intégrales pour $\nu=1$, 2 sont analogues à ceux du cas sphérique où $\nu=3$ (voir fig. 42).

Lorsqu'on suit de manière continue une courbe intégrale, le paramètre λ ne peut tendre vers l'infini qu'en s'approchant des points singuliers O et F. Par conséquent, le point infiniment éloigné dans le gaz qu'on peut gagner par un déplacement continu peut être traduit, dans le plan z, V, uniquement par les points O et F. Pour $t\neq 0$ au centre de symétrie correspond $\lambda=0$. Le long des courbes intégrales le paramètre λ tend vers 0 uniquement sur les courbes intégrales $z=0$ pour $V=\pm\infty$ et à l'approche du point singulier C où aboutit l'unique courbe intégrale dont l'autre extrémité se situe au point B. Aux points B et D correspondent des valeurs finies du paramètre $\lambda\neq 0$.

On voit donc qu'à la solution du problème de l'explosion forte peut répondre l'unique courbe intégrale aboutissant au point singulier C correspondant au centre de symétrie*). Mais cette solution ne peut pas être prolongée de manière continue jusqu'à $r=\infty$ et c'est pourquoi l'écoulement continu du gaz est impossible lors d'une explosion forte. Pour pouvoir prolonger cette solution et la joindre au repos à travers une onde de choc forte il faut et il suffit que, d'après (11.8), le point M de coordonnées

$$V_2=\frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)}, \quad z_2=\frac{8\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2(\nu+2)^2}$$

appartienne à la courbe intégrale aboutissant à l'infini au point singulier C.

L'importante question théorique portant sur l'existence de la solution du problème de l'explosion forte posé plus haut est liée à la possibilité de démontrer que les points M et C appartiennent à la même courbe intégrale de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre (5.10) pour $\omega=0$, $\delta=2/(2+\nu)$. Il est clair qu'une solution approchée numérique ne fournit pas de réponse à cette question.

Toutefois, il s'est avéré que la solution s'obtient sous une forme finie fermée.

En effet, il suit des conditions sur l'onde de choc (11.8) que la constante dans le second membre de l'intégrale de l'énergie (3.11) est nulle. On en conclut que la courbe intégrale dans le plan z, V correspondant à la solution cherchée se représente par une équation simple

$$z=\frac{(\gamma-1)V^2\left(V-\dfrac{2}{\nu+2}\right)}{2\left[\dfrac{2}{(\nu+2)\gamma}-V\right]}. \tag{11.9}$$

*) Une analyse détaillée de cette question se trouve dans l'ouvrage qui remonte à 1945. Voir L. Sédov, *Propagation d'ondes d'explosion fortes*, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. X, op. 2, 1946.

En mettant z de (11.9) dans l'équation (5.11) et compte tenu de la condition aux limites

$$\lambda=1 \quad \text{pour} \quad V=V_2=\frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)}$$

on obtient aisément $\lambda(V)$ par une quadrature.

La fonction $\mathcal{R}(V)$ se déduit sans peine de l'intégrale d'adiabacité et des fonctions trouvées $z(V)$ et $\lambda(V)$. La constante de l'intégrale d'adiabacité est donnée par les conditions sur l'onde de choc (11.8).

La courbe intégrale (11.9) est justement cette unique courbe intégrale de l'équation (5.10) qui aboutit au point singulier C ($z=\infty$, $V=2/\gamma(\nu+2)$). Le long de cette courbe le paramètre λ diminue de l'unité sur l'onde de choc jusqu'à zéro au point singulier C où V prend une valeur finie $2/\gamma(\nu+2)$. D'où il vient que la vitesse du gaz au centre de symétrie est nulle ($v=rV/t$), ce qui est la condition mécanique naturelle qui permet de prolonger la solution jusqu'au centre de symétrie.

On a ainsi démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème automodèle de l'explosion forte.

Cette démonstration repose essentiellement sur le fait que les valeurs z_2 et V_2 (11.8) en arrière du front de l'onde de choc appartiennent justement à cette même courbe intégrale unique qui passe par le point singulier C, ce qui permet de prolonger la solution jusqu'au centre de symétrie. Sur aucune courbe intégrale voisine l'écoulement du gaz ne peut être prolongé jusqu'au centre de symétrie.

On donne plus bas les formules universelles, les graphiques et les tableaux valables pour $p_1=0$ pour toutes les valeurs de la densité initiale ϱ_1 et de l'énergie d'explosion E_0.

Nous allons utiliser les notations et relations suivantes découlant des définitions (1.1) et des conditions sur l'onde de choc (11.2)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r}{r_2}=\lambda, \quad \frac{v}{v_2}=f=\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}\lambda V,\\ &\frac{\varrho}{\varrho_2}=g=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mathcal{R}, \quad \frac{p}{p_2}=h=\frac{(\nu+2)^2(\gamma+1)}{8\gamma}\lambda^2\mathcal{R}z,\end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

en outre

$$\left.\begin{aligned} &v_2=\frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)}\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{\frac{1}{2+\nu}}\frac{1}{t^{\frac{\nu}{\nu+2}}}=\frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)}\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{r_2^{\frac{\nu}{2}}},\\ &\varrho_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\varrho_1,\\ &p_2=\frac{8\varrho_1}{(\nu+2)^2(\gamma+1)}\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{\frac{2}{2+\nu}}\frac{1}{t^{\frac{2\nu}{\nu+2}}}=\frac{8E}{(\nu+2)^2(\gamma+1)}\frac{1}{r_2^{\nu}},\\ &T_2=\frac{p_2}{R\varrho_2}.\end{aligned}\right\} \tag{11.11}$$

Notons par r_0 la coordonnée initiale des particules du gaz qui est la coordonnée lagrangienne. Il est évident que pour chaque particule la coordonnée r_0 est égale au rayon de l'onde de choc r_2 à l'instant où elle passe par la particule.

Il découle des conditions sur l'onde de choc et des conditions d'adiabacité derrière le front d'onde

$$\frac{p}{\varrho^\gamma}=\frac{p_2}{\varrho_2^\gamma}(r_0)=\frac{8(\gamma-1)^\gamma}{(\nu+2)^2(\gamma+1)^{(\gamma+1)}}\,\frac{E}{\varrho_1^\gamma}\,\frac{1}{r_0^\nu}, \tag{11.12}$$

d'où l'on obtient la formule

$$\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^\nu=\frac{8\gamma(\gamma-1)^\gamma}{(\nu+2)^2(\gamma+1)^{(\gamma+1)}}\,\frac{\mathcal{R}^{\gamma-1}}{\lambda^2 z}, \tag{11.13}$$

qui peut servir à calculer la coordonnée lagrangienne. Selon (11.11) sont vraies les égalités

$$\frac{v_2}{v_{20}}=\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{-\frac{\nu}{2}},\quad \frac{p_2}{p_{20}}=\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{-\nu},$$

où v_{20} et p_{20} sont la vitesse et la pression derrière l'onde de choc à l'instant où celle-ci passe par le point de coordonnée r_0.

La solution du problème de l'explosion forte est représentée par des formules finies sous forme paramétrique à paramètre variable V*). L'intervalle de variation de V et le caractère du mouvement au voisinage du centre de symétrie dépendent de la disposition réciproque du point M correspondant à l'écoulement du gaz derrière le front du saut, et du point singulier $\mathcal{E}$ qui, comme on l'a vu au § 5, appartient à l'intégrale (11.9) et monte pour les grands γ dans le domaine $z>0$ (voir fig. 43).

Selon (11.8) et (5.14), l'égalité de V_2 pour le point M à V^* pour le point $\mathcal{E}$

$$\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}=\frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)}$$

a lieu avec $\nu=3$ pour $\gamma=7$, avec $\nu=2$ pour $\gamma=\infty$ et avec $\nu=1$ uniquement pour $\gamma=-1$.

Par conséquent, lorsque $\nu=1$, 2 et $\gamma>1$, l'intervalle de variation de V est défini par l'inégalité

$$\frac{2}{(\nu+2)\gamma}\leq V\leq\frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)}. \tag{11.14a}$$

*) On envisage l'écoulement automodèle du gaz provoqué par une forte explosion périphérique engendrant une onde de choc dirigée vers le centre de symétrie de manière analogue au problème de l'explosion forte au centre de symétrie du gaz au repos (voir G. Grodzovski, « Doclady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. III, n° 5, 1956; N. Kotchina, N. Melnikova, Troudy MIAN de l'U. R. S. S., t. 87, 1966).

Dans l'inégalité (11.14a) la valeur

$$V=\frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)}$$

correspond à l'onde de choc et $V=2/(\nu+2)\gamma$ au centre d'explosion.

Si $\nu=3$ et $\gamma<7$, la formule (11.14a) est également valable; lorsque $\nu=3$ et $\gamma>7$ l'intervalle de variation de V est défini par les inégalités

$$\frac{4}{5(\gamma+1)}\leq V\leq\frac{2}{5}. \tag{11.14b}$$

Dans l'inégalité (11.14b) la valeur $V=\frac{2}{5}$ correspond à la frontière du vide en expansion et $V=\frac{4}{5(\gamma+1)}$ à l'onde de choc. Aussi, pour γ grands et finis le vide s'obtient-il uniquement dans le cas de symétrie sphérique.

Après les transformations indiquées la solution complète est présentée par les formules

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r}{r_2}=\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-\frac{2}{2+\nu}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{(\nu+2)\gamma}{2}V-1\right)\right]^{-\alpha_2}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(\nu+2)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{-\alpha_1},\\
&\frac{r_0}{r_2}=\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-\frac{2}{2+\nu}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{(\nu+2)\gamma}{2}V-1\right)\right]^{\alpha_6}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(\nu+2)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{\alpha_7}\times\\
&\qquad\qquad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{-\left(\alpha_6+\alpha_7-\frac{2}{2+\nu}\right)},\\
&\frac{v}{v_2}=f=\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\frac{r}{r_2},\\
&\frac{\varrho}{\varrho_2}=g=\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{(\nu+2)\gamma}{2}V-1\right)\right]^{\alpha_3}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{\alpha_5}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(2+\nu)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{\alpha_4},\\
&\frac{p}{p_2}=h=\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\right]^{\frac{2\nu}{2+\nu}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{\alpha_3+1}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(\nu+2)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{\alpha_4-2\alpha_1},\\
&\qquad\qquad\frac{T}{T_2}=\frac{p}{p_2}\frac{\varrho_2}{\varrho},
\end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

où

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{(\nu+2)\gamma}{2+\nu(\gamma-1)}\left[\frac{2\nu(2-\gamma)}{\gamma(\nu+2)^2}-\alpha_2\right], && \alpha_2=\frac{1-\gamma}{2(\gamma-1)+\nu},\\
&\alpha_3=\frac{\nu}{2(\gamma-1)+\nu}, && \alpha_4=\frac{\alpha_1(\nu+2)}{2-\gamma},\\
&\alpha_5=\frac{2}{\gamma-2}, && \alpha_6=\frac{\gamma}{2(\gamma-1)+\nu},\\
&\qquad\qquad \alpha_7=\frac{[2+\nu(\gamma-1)]\alpha_1}{\nu(2-\gamma)}.
\end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

On déduit aisément des formules (11.15) pour $\gamma<7$ les formules asymptotiques de v, ϱ, p et de la température T au voisinage du centre d'explosion pour

$$V\to\frac{2}{(2+\nu)\gamma} \quad \text{et} \quad r\to 0.$$

Ces formules s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}
v&=\frac{2}{(2+\nu)\gamma}\,\frac{r}{t},\\
\varrho&=k_1\varrho_1\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{-\frac{\nu}{(\nu+2)(\gamma-1)}}t^{-\frac{2\nu}{(\nu+2)(\gamma-1)}}r^{\frac{\nu}{\gamma-1}},\\
p&=k_2\varrho_1\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{\frac{2}{\nu+2}}t^{-\frac{2\nu}{\nu+2}},\\
T&=k_3\frac{1}{c_v}\left(\frac{E}{\varrho_1}\right)^{\frac{2(\gamma-1)+\nu}{(\gamma-1)(\nu+2)}}t^{\frac{2\nu(2-\gamma)}{(\nu+2)(\gamma-1)}}r^{-\frac{\nu}{\gamma-1}},
\end{aligned}\right\} \tag{11.17}$$

où

$$\left.\begin{aligned}
k_1&=\frac{(\gamma+1)^{\frac{3\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)(3\gamma-1)}}}{2^{\frac{6}{5(\gamma-1)}}\gamma^{\frac{7\gamma-1}{(\gamma-1)(3\gamma-1)}}(\gamma-1)}\left(\frac{2\gamma+1}{7-\gamma}\right)^{\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{5(\gamma-1)(2-\gamma)(3\gamma-1)}},\\
k_2&=\frac{0{,}32}{2^{6/5}}\,\frac{(\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{3\gamma-1}}}{\gamma^{\frac{4\gamma}{3\gamma-1}}}\left(\frac{2\gamma+1}{7-\gamma}\right)^{\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{5(2-\gamma)(3\gamma-1)}},\\
k_3&=\frac{k_2}{k_1(\gamma-1)}
\end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

pour la symétrie sphérique;

$$k_1=\frac{(\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{\gamma-1}\,\frac{\gamma^{\frac{3\gamma-4}{(\gamma-1)(2-\gamma)}}}{2^{\frac{2}{(\gamma-1)(2-\gamma)}}},\quad k_2=\frac{\gamma^{\frac{2(\gamma-1)}{2-\gamma}}}{2^{\frac{4-\gamma}{2-\gamma}}},\quad k_3=\frac{k_2}{k_1(\gamma-1)} \tag{11.19}$$

pour la symétrie cylindrique et

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{(2\gamma-1)^{\frac{5\gamma-4}{3(\gamma-1)(2-\gamma)}}(\gamma+1)^{\frac{4+\gamma-3\gamma^2}{3(\gamma-1)(2-\gamma)}}}{2^{\frac{2}{3(\gamma-1)}}\gamma^{\frac{1}{\gamma-1}}(\gamma-1)}, \\ k_2 &= \frac{2^{\frac{7}{3}}}{9}\,\frac{(2\gamma-1)^{\frac{5\gamma-4}{3(2-\gamma)}}}{(\gamma+1)^{\frac{2(\gamma+1)}{3(2-\gamma)}}}, \\ k_3 &= \frac{k_2}{k_1(\gamma-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (11.20)$$

pour les ondes planes.

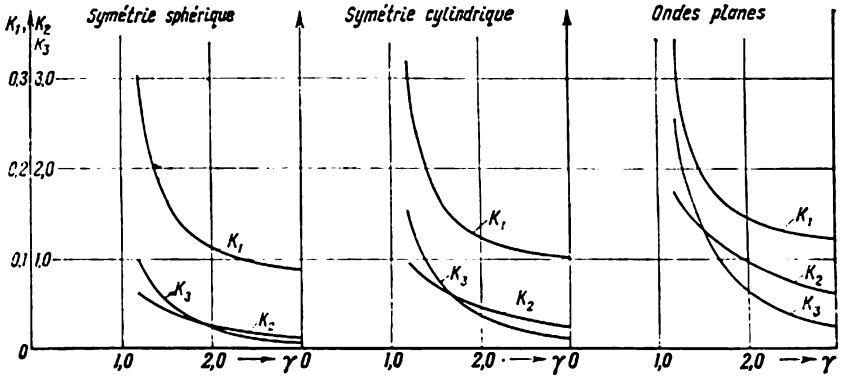


Fig. 71. Quantités $k_1(\gamma)$, $k_2(\gamma)$, $k_3(\gamma)$ des formules (11.17) donnant les valeurs asymptotiques de la pression, de la densité et de la température au voisinage du centre de l'explosion

La variation des constantes k_1, k_2 et k_3 en fonction de γ est donnée à la figure 71.

Au voisinage du centre de symétrie la vitesse est proche de zéro; la pression est non nulle et est asymptotiquement constante en r; la densité tend très rapidement vers zéro et la température vers l'infini. Il est aisé de constater que l'entropie tend également vers l'infini. Au voisinage du centre d'explosion apparaissent de grands gradients de température; cela souligne l'importance de la conduction thermique. Si l'on tient compte de la conduction thermique, la température au centre d'explosion s'obtient finie.

Le gaz est dispersé du centre d'explosion (pour $r=0$ on a $\varrho\approx 0$), la pression au centre est finie mais tend vers zéro avec le temps.

D'où il est clair qu'une explosion forte dans un gaz où, avant l'explosion, la pression était finie doit créer un écoulement inverse du gaz, dirigé vers le

centre d'explosion. On observe ce phénomène lors des explosions sous-marines qui font apparaître des pulsations secondaires de la bulle gazeuse.

A la suite de l'écart du gaz à partir du centre et de la chute de pression on voit apparaître la poussée d'Archimède qui fait monter le domaine de l'écoulement perturbé du gaz dans l'atmosphère environnante. D'après les photographies de l'explosion de la bombe atomique à New Mexico, la vitesse verticale d'ascension du noyau incandescent était de l'ordre de 35 m/s.

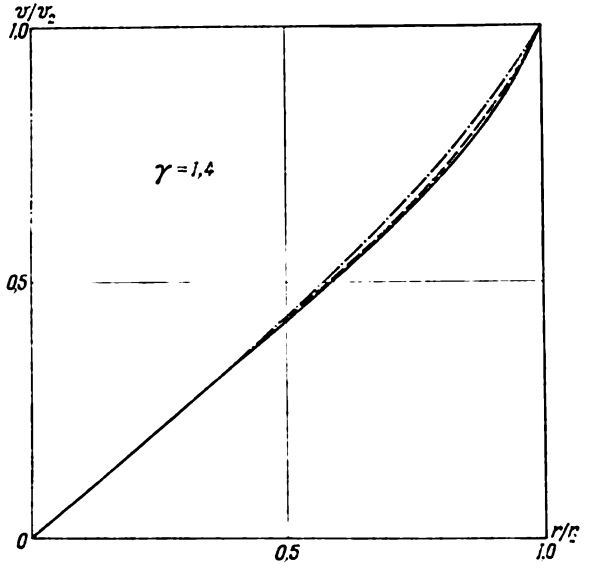


Fig. 72. Distribution de la vitesse derrière l'onde de choc : ——— cas sphérique; - - - - cas cylindrique; —·—·—·— cas plan

Les figures 72 à 79 donnent pour $\gamma=1{,}4$ les graphiques de distribution des vitesses, de la densité, de la pression, de la température en arrière du front d'onde, les lois du mouvement et les lois de variation des caractéristiques d'état des particules gazeuses pour $\nu=1, 2, 3$.

Les tables qui suivent rassemblent quelques valeurs numériques des grandeurs utiles dans différentes applications.

L'influence de l'indice de Poisson γ sur la distribution des caractéristiques du mouvement en arrière du front de l'onde de choc dans le cas de la symétrie sphérique est illustrée par les figures 80, 81 et 82.

Dans les formules (11.16) le coefficient $\alpha_5=\infty$ pour $\gamma=2$, alors pour calculer les caractéristiques de l'écoulement gazeux pour $\gamma=2$ il y a lieu de passer à la limite dans les formules (11.15) lorsque $\gamma\to 2$.

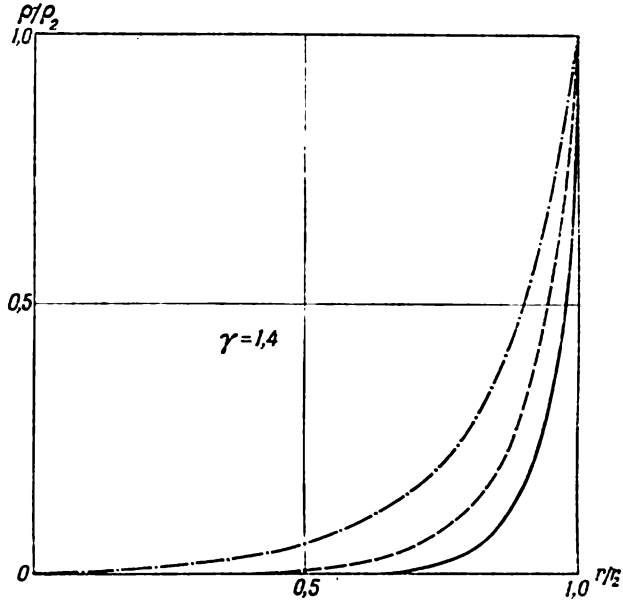


Fig. 73. Distribution de la densité derrière l'onde de choc

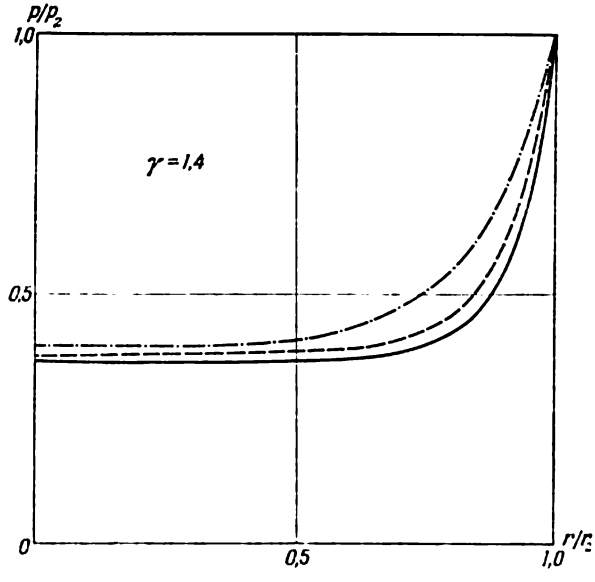


Fig. 74. Distribution de la pression derrière l'onde de choc : ——— cas sphérique; - - - - cas cylindrique; —·—·— cas plan

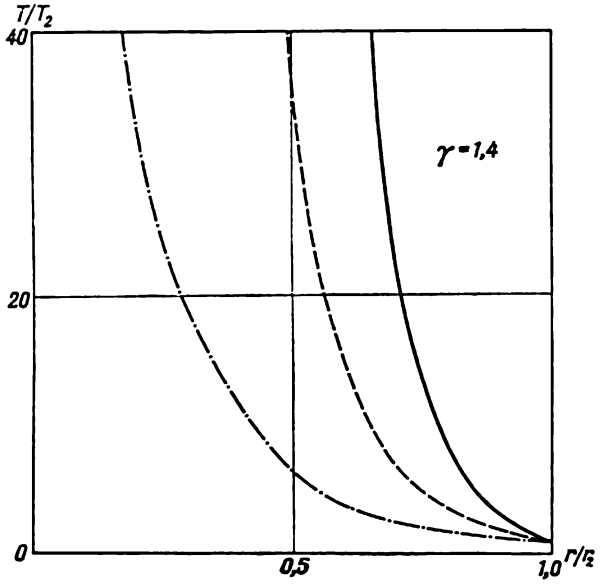


Fig. 75. Distribution des températures derrière l'onde de choc

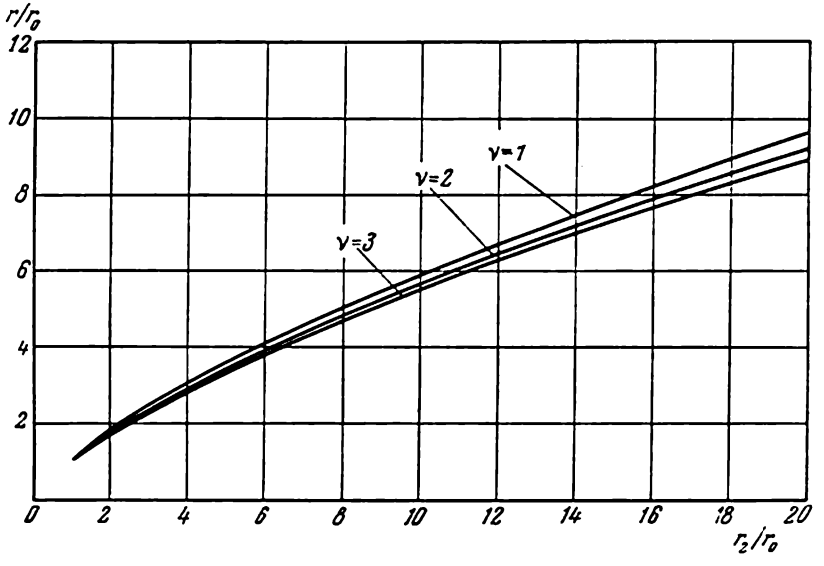


Fig. 76. Loi du mouvement des particules gazeuses ($\gamma = 1{,}4$)

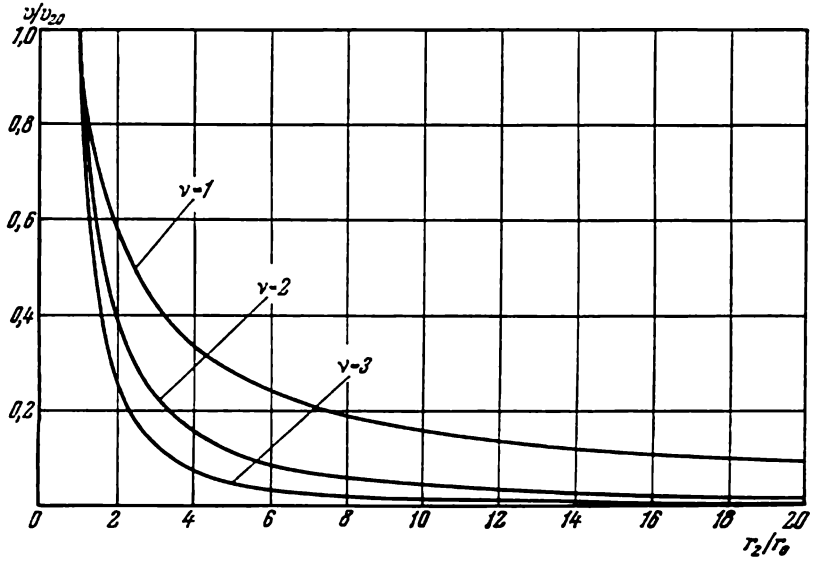


Fig. 77. Vitesse de la particule en fonction de la position de l'onde de choc ($\gamma=1{,}4$)

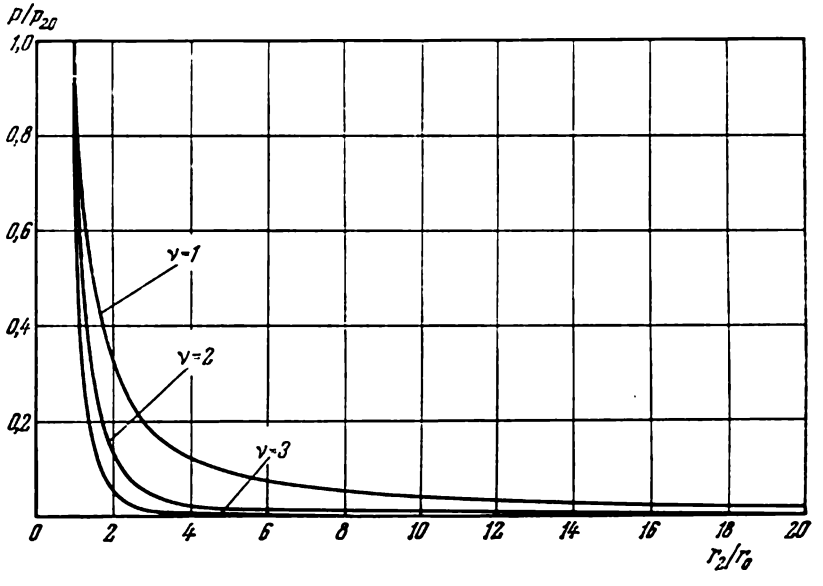


Fig. 78. Densité de la particule en fonction de la position de l'onde de choc ($\gamma=1{,}4$)

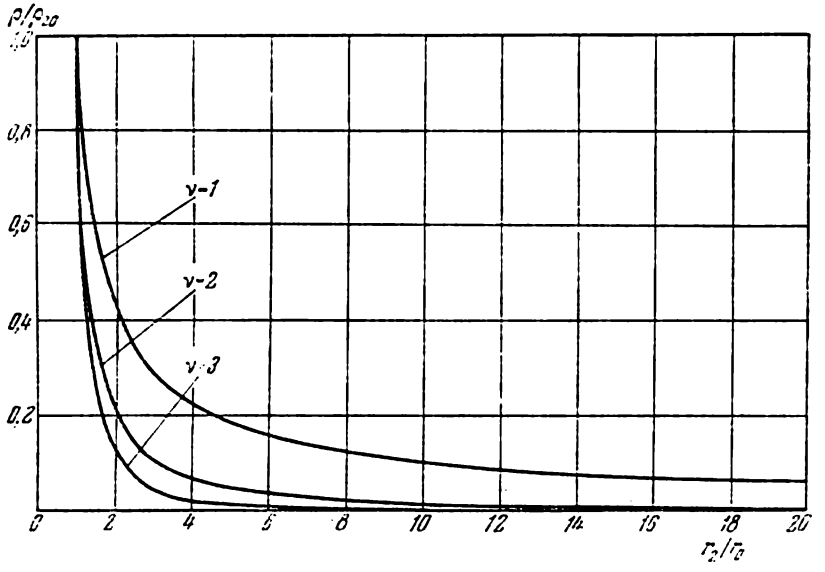


Fig. 79. Pression dans la particule en fonction de la position de l'onde de choc ($\gamma = 1{,}4$)

$\nu = 1, \quad \gamma = 1{,}4$

$\lambda = \frac{r}{r_2}$	$\frac{r_0}{r_2}$	$\frac{v}{v_2} = f$	$\frac{\varrho}{\varrho_2} = g$	$\frac{p}{p_2} = h$	$f'(\lambda)$	$g'(\lambda)$	$h'(\lambda)$
1	1	1	1	1	1,5	7,5	4,5
0,9797	0,8873	0,9699	0,8625	0,9162	1,4688	6,1575	3,8131
0,9420	0,7151	0,9156	0,6659	0,7915	1,4067	4,3615	3,8352
0,9013	0,5722	0,8599	0,5160	0,6923	1,3367	3,1109	2,0959
0,8565	0,4501	0,8017	0,3982	0,6120	1,2597	2,2183	1,5250
0,8050	0,3427	0,7390	0,3019	0,5457	1,1758	1,5638	1,0723
0,7419	0,2448	0,6678	0,2200	0,4904	1,0862	1,0738	0,7067
0,7029	0,1980	0,6263	0,1823	0,4661	1,0396	0,8726	0,5483
0,6553	0,1514	0,5780	0,1453	0,4437	0,9921	0,6919	0,4022
0,5925	0,1040	0,5172	0,1074	0,4229	0,9438	0,5232	0,2648
0,5396	0,0741	0,4682	0,0826	0,4116	0,9144	0,4213	0,1838
0,4912	0,0529	0,4244	0,0641	0,4038	0,8947	0,3473	0,1289
0,4589	0,0415	0,3957	0,0536	0,4001	0,8849	0,3020	0,1003
0,4161	0,0293	0,3580	0,0415	0,3964	0,8750	0,2551	0,0453
0,3480	0,0156	0,2988	0,0263	0,3929	0,8651	0,1905	0,0237
0,2810	0,0074	0,2410	0,0153	0,3911	0,8602	0,1370	0,0111
0,2320	0,0038	0,1989	0,0095	0,3905	0,8584	0,1025	0,0089
0,1680	0,0012	0,1441	0,0042	0,3901	0,8574	0,0630	0,0029
0,1040	0,0002	0,0891	0,0013	0,3900	0,8572	0,0307	0,0005
0,0000	0,0000	0.0000	0,0000	0,3900	0,8571	0,0000	0,0000

$\nu=2, \quad \gamma=1{,}4$

$\lambda=\frac{r}{r_2}$	$\frac{r_0}{r_2}$	$\frac{v}{v_2}=f$	$\frac{\varrho}{\varrho_2}=g$	$\frac{p}{p_2}=h$	$f'(\lambda)$	$g'(\lambda)$	$h'(\gamma)$
1	1	1	1	1	1,8333	14,1667	7,8333
0,9998	0,9954	0,9996	0,9973	0,9985	1,8325	14,1149	7,8102
0,9802	0,8911	0,9645	0,7653	0,8659	1,7516	9,8877	5,8478
0,9644	0,8164	0,9374	0,6285	0,7832	1,6848	7,5936	4,6993
0,9476	0,7460	0,9097	0,5164	0,7124	1,6132	5,8431	3,7665
0,9295	0,6789	0,8812	0,4234	0,6514	1,5371	4,4922	3,0009
0,9096	0,6140	0,8514	0,3451	0,5983	1,4569	3,4390	2,3668
0,8725	0,5115	0,7998	0,2427	0,5266	1,3206	2,1977	1,5608
0,8442	0,4461	0,7638	0,1892	0,4884	1,2313	1,6219	1,1574
0,8094	0,3695	0,7226	0,1414	0,4545	1,1394	1,1561	0,8136
0,7629	0,3009	0,6720	0,0975	0,4242	1,0455	0,7709	0,5170
0,7242	0,2480	0,6327	0,0718	0,4074	0,9885	0,5660	0,3567
0,6894	0,2071	0,5989	0,0545	0,3969	0,9503	0,4344	0,2551
0.6390	0,1577	0,5521	0,0362	0,3867	0,9120	0,2998	0,1556
0,5745	0,1081	0,4943	0,0208	0,3794	0,8832	0,1863	0,0798
0,5180	0,0748	0,4448	0,0123	0,3760	0,8698	0,1202	0,0423
0,4748	0,0552	0,4073	0,0079	0,3746	0,8640	0,0839	0,0249
0,4222	0,0370	0,3621	0,0044	0,3737	0,8602	0,0522	0,0123
0,3654	0,0220	0,3133	0,0021	0,3733	0,8583	0,0292	0,0052
0,3000	0,0111	0,2571	0,0008	0,3730	0,8574	0,0132	0,0016
0,2500	0,0058	0,2143	0,0003	0,3729	0,8572	0,0064	0,0005
0,2000	0,0027	0,1714	0,0001	0,3729	0,8572	0,0026	0,0001
0,1500	0,0010	0,1286	0,0000	0,3729	0,8571	0,0008	0,0000
0,1000	0,0002	0,0857	0,0000	0,3729	0,8571	0,0002	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3729	0,8571	0,0000	0,0000

$\nu=3, \quad \gamma=1{,}4$

$\lambda=\frac{r}{r_2}$	$\frac{r_0}{r_2}$	$\frac{v}{v_2}=f$	$\frac{\varrho}{\varrho_2}=g$	$\frac{p}{p_2}=h$	$f'(\lambda)$	$g'(\lambda)$	$h'(\lambda)$
1	1	1	1	1	2,1666	20,8333	11,1666
0,9913	0,9498	0,9814	0,8379	0,9109	2,0981	16,4159	9,2305
0,9773	0,8785	0,9529	0,6457	0,7993	1,9864	11,5610	6,9475
0,9622	0,8103	0,9237	0,4978	0,7078	1,8659	8,1607	5,2109
0,9342	0,7038	0,8744	0,3241	0,5923	1,6548	4,6349	3,2119
0,9080	0,6220	0,8335	0,2279	0,5241	1,4837	2,9536	2,1425
0,8747	0,5320	0,7872	0,1509	0,4674	1,3036	1,7841	1,3269
0,8359	0,4463	0,7397	0,0967	0,4272	1,1495	1,0716	0,7900
0,7950	0,3704	0,6952	0,0621	0,4021	1,0395	0,6690	0,4720
0,7493	0,2983	0,6496	0,0379	0,3856	0,9610	0,4090	0,2669
0,6788	0,2097	0,5844	0,0174	0,3732	0,8991	0,1981	0,1095
0,5794	0,1201	0,4971	0,0052	0,3672	0,8662	0,0679	0,0278
0,4560	0,0519	0,3909	0,0009	0,3656	0,8581	0,0142	0,0036
0,3600	0,0227	0,3086	0,0002	0,3655	0,8572	0,0030	0,0005
0,2960	0,0114	0,2538	0,0000	0,3655	0,8572	0,0008	0,0001
0,2000	0,0051	0,1714	0,0000	0,3655	0,8571	0,0001	0,0000
0,1040	0,0000	0,0892	0,0000	0,3655	0,8571	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,3655	0,8571	0,0000	0,0000

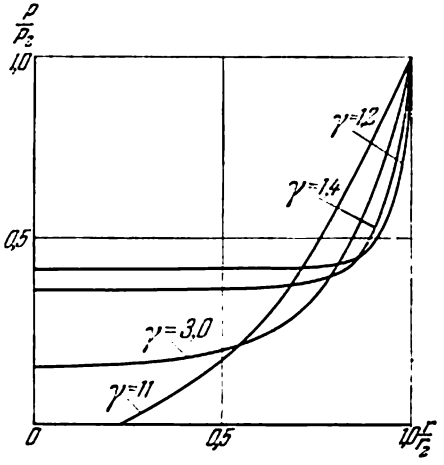


Fig. 80. Influence de la constante γ sur la distribution de la pression derrière le front de l'onde de choc sphérique

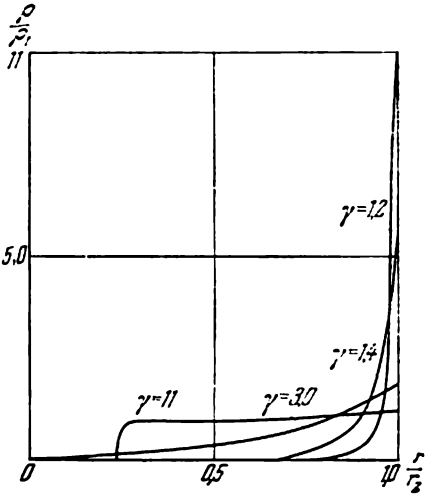


Fig. 81. Influence de la constante γ sur la distribution de la densité derrière le front de l'onde de choc sphérique

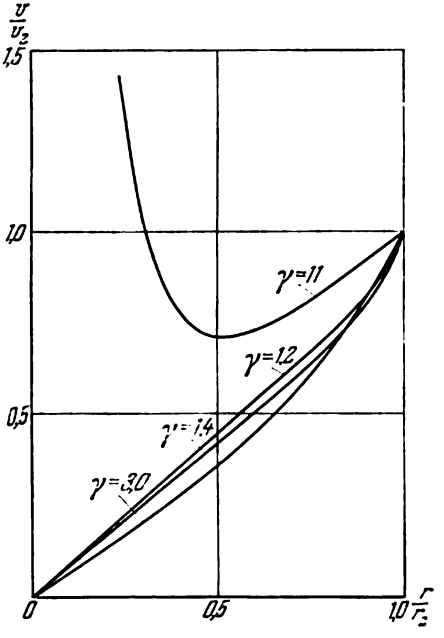


Fig. 82. Influence de la constante γ sur la distribution de la vitesse derrière le front de l'onde de choc sphérique

En passant à la limite, on a

$$\frac{r}{r_2}=\left[\frac{3}{4}(\nu+2)V\right]^{\frac{2}{(\nu+2)}}\left[3\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{-\frac{2}{\nu+2}}[3((\nu+2)V-1)]^{\frac{1}{\nu+2}},$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_2}=\{3[(\nu+2)V-1]\}^{\frac{\nu}{\nu+2}}\left[3\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{\frac{\nu-2}{\nu+2}}\exp\left\{-\frac{4\nu}{\nu+2}\frac{\left[1-\frac{3}{4}(\nu+2)V\right]}{\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)}\right\},$$

$$\frac{p}{p_2}=\left[\frac{3}{4}(\nu+2)V\right]^{\frac{2\nu}{\nu+2}}\left[3\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{\frac{2(\nu-2)}{\nu+2}}\exp\left[-\frac{4\nu}{\nu+2}\frac{1-\frac{3}{4}(\nu+2)V}{1-\frac{\nu+2}{2}V}\right].$$

Au centre de symétrie $[V=1/(\nu+2)]$ pour $\gamma=2$ on a

$$h(0)=3^{\frac{4(\nu-1)}{\nu+2}}4^{\frac{2-3\nu}{\nu+2}}\exp\left[-\frac{2\nu}{\nu+2}\right].$$

Cette formule montre que la pression au centre pour tout ν et $\gamma=2$ est finie et non nulle.

Notons que pour $\gamma=7$ la solution est particulièrement simple :

$$\frac{v}{v_2}=\frac{r}{r_2}=\lambda;\quad \frac{\varrho}{\varrho_2}=\lambda\quad\text{et}\quad \frac{p}{p_2}=\lambda^3. \tag{11.21}$$

Dans ce cas il s'est avéré qu'au centre de symétrie $v=\varrho=p=0$.

Si $\gamma>7$, il se forme au centre de symétrie une sphère vide de rayon r^*; à l'intérieur de cette sphère la pression est nulle. Le rayon r^* croissant avec le temps, le rapport r^*/r_2, fonction du seul γ, demeure constant.

Les grandes valeurs de l'indice γ apparaissent dans l'étude d'une explosion forte au sein des milieux compressibles tels que l'eau.

Le problème de l'explosion ponctuelle posé ci-dessus se résout pour toute valeur constante du paramètre abstrait γ. Si $\gamma=\gamma^*=c_p/c_v$, chaque particule de gaz subit une transformation adiabatique. Si la constante γ est arbitraire et n'est pas égale à $\gamma^*=c_p/c_v$, la transformation est polytropique; dans ce cas le front du saut est analogue au front de détonation ou au front de transformations de phase avec absorption de la chaleur.

En effet, la condition (2.6) peut être écrite sous la forme

$$\frac{\gamma^* p_1}{(\gamma^*-1)\varrho_1}+\frac{1}{2}(v_1-c)^2+Q=\frac{\gamma^* p_2}{(\gamma^*-1)\varrho_2}+\frac{1}{2}(v_2-c)^2, \tag{11.22}$$

où

$$Q=\frac{\gamma-\gamma^*}{(\gamma-1)(\gamma^*-1)}\left(\frac{p_2}{\varrho_2}-\frac{p_1}{\varrho_1}\right);$$

comme $p_2/\varrho_2=RT_2>RT_1=p_1/\varrho_1$, la condition (11.22) est analogue à la

condition au front de détonation pour $\gamma > \gamma^* = c_p/c_v > 1$ lorsque $Q > 0$. Sur le front la chaleur sera absorbée ($Q < 0$) si $\gamma > 1$ et $\gamma < \gamma^*$.

D'autre part, dans une transformation réversible à l'intérieur du flux en arrière du front du saut, chaque particule gazeuse vérifie l'égalité

$$dQ = T\,dS = Tc_v\,d\,\mathrm{Log}\left(\frac{p}{\varrho^{\gamma^*}}\right) = Tc_v\,d\,\mathrm{Log}\left(\frac{p}{\varrho^{\gamma}}\varrho^{\gamma-\gamma^*}\right);$$

d'où, étant donné que pour une particule $p/\varrho^\gamma = \text{const}$ et $p = R\varrho T$, on a

$$dQ = Tc_v(\gamma-\gamma^*)\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\gamma-\gamma^*}{\gamma-1}c_v\,dT. \tag{11.23}$$

Dans les solutions traitées les particules fixées étaient telles que $d\varrho < 0$ et $dT < 0$, de sorte que la particule subissait une transformation avec dégagement de chaleur $dQ > 0$ pour $\gamma < \gamma^*$ et avec absorption de chaleur $dQ < 0$ pour $\gamma > \gamma^*$.

Les formules établies plus haut pour les caractéristiques dimensionnées du mouvement incluent la constante E qui doit être exprimée au moyen de l'énergie de la charge E_0 (égale à l'énergie totale du gaz perturbé dans le problème étudié). Les caractéristiques adimensionnées du mouvement sont représentées par les courbes universelles indépendantes de l'énergie d'explosion E_0 ou de la valeur E qui lui est proportionnelle.

Pour l'énergie totale on a les formules :

$$E_0 = \int_0^{r_2} \frac{\varrho v^2}{2} 4\pi r^2\,dr + \int_0^{r_2} \frac{p}{\gamma-1} 4\pi r^2\,dr \quad \text{dans le cas d'ondes sphériques;}$$

$$E_0 = \int_0^{r_2} \frac{\varrho v^2}{2} 2\pi r\,dr + \int_0^{r_2} \frac{p}{\gamma-1} 2\pi r\,dr \quad \text{dans le cas d'ondes cylindriques;}$$

$$\frac{1}{2}E_0 = \int_0^{r_2} \frac{\varrho v^2}{2}\,dr + \int_0^{r_2} \frac{p}{\gamma-1}\,dr \quad \text{dans le cas d'ondes planes.}$$

Le premier terme exprime l'énergie cinétique et le second, l'énergie thermique du gaz. Introduisant les paramètres adimensionnés on trouve

$$E_0 = \alpha(\gamma)E, \tag{11.24}$$

où

$$\alpha = 2\pi \int_0^1 \mathcal{R}V^2\lambda^4\,d\lambda + \frac{4\pi}{(\gamma-1)}\int_0^1 P\lambda^4\,d\lambda \quad \text{dans le cas d'ondes sphériques;}$$

$$\alpha = \pi \int_0^1 \mathcal{R}V^2\lambda^3\,d\lambda + \frac{2\pi}{(\gamma-1)}\int_0^1 P\lambda^3\,d\lambda \quad \text{dans le cas d'ondes cylindriques;}$$

$$\alpha = 1 \int_0^1 \mathcal{R}V^2\lambda^2\,d\lambda + \frac{2}{(\gamma-1)}\int_0^1 P\lambda^2\,d\lambda \quad \text{dans le cas d'ondes planes.}$$

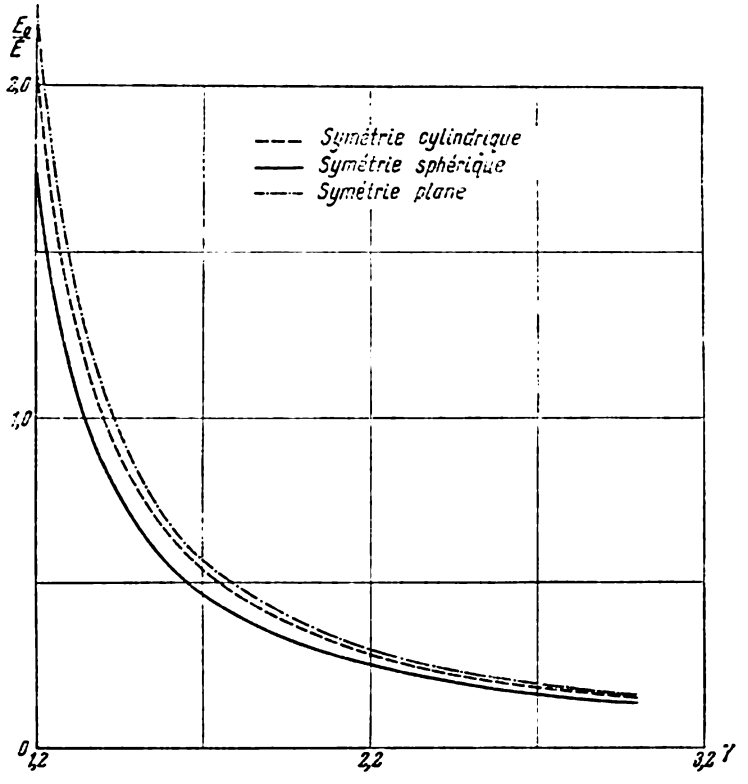


Fig. 83. Rapport $E_0/E=\alpha$ en fonction de γ

La figure 83 représente la relation $\alpha(\gamma)$ calculée pour les cas de symétries sphérique, cylindrique et plane.

En particulier, dans le cas de la symétrie sphérique on a pour $\gamma=1{,}4$

$$E_0=(0{,}186+0{,}665)E=0{,}851E \text{ ou } E=1{,}175E_0.$$

Si l'on se sert de la valeur de E donnée par la formule (11.7), en conformité avec les données expérimentales fournies par l'explosion de la bombe atomique à New Mexico, et si l'on pose $\gamma=1{,}4$, on obtient pour l'énergie d'explosion*) $E_0=7{,}19\times10^{20}$ ergs, ce qui équivaut à l'énergie dégagée lors de l'explosion de 16 800 t de trinitrotoluène.

Il est intéressant de considérer un écoulement du gaz dans lequel des impuretés très fines telles que des particules solides ou fluides se meuvent

*) En évaluant l'énergie totale dégagée lors de l'explosion d'une bombe atomique il faut avoir en vue qu'une importante partie de l'énergie est dépensée sous forme de rayonnement.

avec les particules gazeuses (atmosphère poussiéreuse)*). La densité des particules en suspension dans le gaz est parfois assez grande; en effet, 1 cm³ d'air dans une grande ville industrielle contient environ 20 000 grains de poussière, 1 cm³ d'un nuage ou de brouillard contient de 100 à 600 et quelquefois jusqu'à 1400 gouttes. On peut supposer que la présence des particules dans le gaz augmente l'inertie du milieu, celui-ci restant homogène avec une densité

$$\varrho' = \varrho(1+k),$$

où ϱ est la densité du gaz, k une constante positive.

Considérons le système d'équations de l'hydrodynamique définissant les écoulements adiabatiques. Les équations du mouvement contiendront la densité $\varrho' = \varrho(1+k)$ et l'équation de continuité, la densité ϱ, mais celle-ci étant homogène par rapport à la densité, on peut la ramener, en la multipliant par une valeur constante $(1+k)$, à l'équation de continuité pour un milieu continu de densité ϱ'. Notons tout particulièrement la condition d'adiabacité qui dans le milieu considéré prend la forme

$$\varrho c_v\, dT + ck\varrho\, dT + \varrho' p\, d(1/\varrho') = 0,$$

c étant la capacité calorifique des particules supposée constante; c_v et c_p, les chaleurs spécifiques du gaz. Après l'intégration il vient

$$p = A\varrho'^{\frac{c_p+kc}{c_v+kc}},$$

où A est une constante dépendant de la particule du milieu. Désignons par γ' l'expression $\frac{c_p+kc}{c_v+kc}$. L'équation d'adiabacité ainsi que tout le système d'équations de l'hydromécanique prennent alors la forme usuelle. La densité du milieu considéré ϱ' et le rapport γ' des chaleurs spécifiques du milieu en font partie:

$$\gamma' = \frac{c'_p}{c'_v}, \quad \text{où} \quad c'_p = \frac{\varrho c_p + k\varrho c}{\varrho(1+k)}, \quad c'_v = \frac{\varrho c_v + k\varrho c}{\varrho(1+k)}.$$

Considérons maintenant les conditions aux sauts de compression. Les conditions de conservation de la masse et de la quantité de mouvement demeurent toujours les mêmes au passage à travers l'onde de choc. Il en est de même de la troisième condition, la condition de conservation du flux d'énergie. Car celle-ci contient la densité du milieu ϱ' et l'énergie spécifique interne qui s'écrit, dans ce cas, de la même façon que pour le gaz parfait, le rapport des capacités calorifiques étant γ'. En effet,

$$d\varepsilon\varrho(1+k) = c_v\varrho\, dT + ck\varrho\, dT,$$

où

$$\varepsilon = \frac{c_v+kc}{1+k} T = c'_v T = \frac{1}{\gamma'-1}\frac{p}{\varrho'},$$

$$1 < \gamma' < \gamma,$$

*) S. Sidorkina, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 112, n° 3, 1957.

si bien que γ' s'approche de l'unité à mesure que $\frac{kc}{c_v}$ croît, c'est-à-dire lorsque la concentration des particules s'accroît ainsi que leur capacité calorifique. Il suit des formules (11.22) et (11.23) que la présence des impuretés conditionne l'absorption de la chaleur sur le front d'onde ($dQ<0$), tandis que les particules échauffées dans le flux gazeux cèdent de la chaleur ($dQ>0$).

On peut en tirer la conclusion que dans tous les problèmes de la gazodynamique un milieu contenant beaucoup de particules se comporte comme un gaz dont le rapport des capacités calorifiques γ' est inférieur à celui du gaz pur.

Abordons le problème de l'explosion forte dans un milieu poussiéreux et déterminons l'intensité de l'onde d'explosion. La formule (11.11) appliquée à l'onde de choc fournit

$$p_2'=\frac{8E}{(\nu+2)^2(\gamma'+1)}\frac{1}{r_2^\nu},$$

où $E=\frac{E_0}{\alpha(\gamma')}$.

Le rapport p_2'/p_2 pour deux explosions dégageant une même énergie E_0 à une même distance du centre d'explosion r_2 dépend simplement de γ :

$$\frac{p_2'}{p_2}=\frac{\alpha(\gamma)(\gamma+1)}{\alpha(\gamma')(\gamma'+1)}=\frac{f(\gamma)}{f(\gamma')}.$$

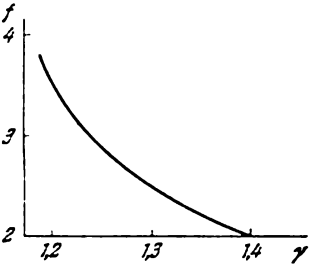


Fig. 84. Graphique de la fonction $f(\gamma)$ caractérisant l'influence de l'atmosphère poussiéreuse sur la pression

La figure 84 donne $f(\gamma)=\alpha(\gamma)(\gamma+1)$ où $\alpha(\gamma)$ est une fonction représentée sur la figure 83. La fonction $f(\gamma)$ croît à mesure que γ décroît, ce qui entraîne une chute de pression sur l'onde de choc dans l'atmosphère poussiéreuse en comparaison avec la pression sur l'onde de choc dans le gaz pur. Lorsque γ diminue de 1,4 à 1,2, la pression sur l'onde de choc tombe de 2 fois. Toutefois ce phénomène se produit pour une densité d'aérosol très élevée (888 g de poussière par 1 m³ d'air). Pour abaisser p_2 de 10 % il suffit d'avoir une densité de poussière de 0,12 kg/m³. La présence de la poussière dans l'air dans une ville industrielle entraîne une diminution de p_2 de 2 %.

2. Le rôle de la conduction. On a noté précédemment que la viscosité et la conductibilité thermique peuvent avoir une certaine influence sur l'écoulement du gaz au voisinage du centre d'explosion. Si l'on ne néglige ni la viscosité ni la conduction, les équations du mouvement contiendront le coefficient de viscosité μ et le coefficient de conductibilité thermique $\varkappa$.

Il convient de souligner que le coefficient de conductibilité entre en tant que facteur multiplicatif de la température T.

Lorsqu'on arrive à éliminer la température à l'aide de l'équation d'état (pour simplifier, posons que c'est l'équation de Clapeyron $T=p/R\varrho$ (R est la

constante des gaz parfaits)), c'est le rapport $\varkappa/R$ qui entre dans les équations et non pas le $\varkappa$ lui-même. On sait que les coefficients μ et $\varkappa$ sont fonction de la température. On les suppose d'ordinaire proportionnels à une puissance quelconque de la température T (le plus souvent, à $\sqrt{T}$) ou constants. Posons donc

$$\mu=\mu_1 T^{\alpha} \quad \text{et} \quad \varkappa=\varkappa_1 T^{\alpha},$$

μ_1 et $\varkappa_1$ étant des constantes.

Une fois T éliminé, l'équation renfermera de nouvelles constantes

$$\frac{\mu_1}{R^{\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{\varkappa_1}{R^{\alpha+1}}$$

de dimensions

$$\left[\frac{\mu_1}{R^{\alpha}}\right]=\left[\frac{\varkappa_1}{R^{\alpha+1}}\right]=\mathrm{ML}^{-1-2\alpha}\mathrm{T}^{-1+2\alpha}.$$

Pour que l'écoulement soit automodèle il suffit que les dimensions de ces nouvelles constantes s'expriment par celles de ϱ_1 et E_0. Il est évident qu'il faut poser pour cela $\alpha=\frac{1}{6}$ dans le cas sphérique*), $\alpha=0$ dans le cas cylindrique et $\alpha=-\frac{1}{2}$ dans le cas d'ondes planes.

Ainsi le problème de l'explosion forte peut être résolu par l'intégration des équations différentielles ordinaires en tenant compte de la viscosité et de la conduction à condition de poser :

$$\mu=\mu_1 T^{1/6}, \quad \varkappa=\varkappa_1 T^{1/6} \quad \text{pour les ondes sphériques;} \tag{11.25}$$

$$\mu=\text{const}, \quad \varkappa=\text{const} \quad \text{pour les ondes cylindriques;} \tag{11.26}$$

$$\mu=\mu_1/\sqrt{T}, \quad \varkappa=\varkappa_1/\sqrt{T} \quad \text{pour les ondes planes.} \tag{11.27}$$

On dispose actuellement de publications sur les solutions approchées du problème de l'explosion ponctuelle forte qui tiennent compte de la conduction**).

Il est clair que pour le gaz parfait et pour de nombreux autres milieux le problème de l'explosion forte demeure également automodèle aux cas où grâce à un échange thermique intense (dû à une conduction excessivement grande, au rayonnement et aux autres processus) il est possible de poser la température uniforme mais, généralement parlant, variable dans le temps,

---

*) Ce résultat a été obtenu par G. Bam-Zélikovitch, *Propagation d'ondes d'explosion fortes* (en russe). Recueil d'articles n° 4 « Teoretitcheskaïa hydromekhanika » sous la rédaction de L. Sédov, Oboronguiz, 1949. Lorsque $\alpha=\frac{1}{6}$ on a $[\mu_1/R^{\alpha}]=[(E\varrho_1^2)^{1/3}]$.

**) V. Korobeïnikov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 113, n° 5, 1957.

en d'autres termes, lorsque l'équation d'adiabacité peut être remplacée par l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial r}=0.$$

Les solutions des problèmes correspondants de l'explosion ponctuelle et du piston font l'objet d'une série d'ouvrages*).

3. Autosimilitude de l'explosion ponctuelle pour les milieux parfaits. Il convient encore de faire une remarque sur la possibilité de résoudre le problème de l'explosion forte dans le cadre de la théorie du fluide parfait lorsque l'équation d'état se présente sous sa forme générale et l'énergie interne ε du gaz s'exprime en fonction de p et ϱ**). La fonction $\varepsilon(p, \varrho)$ entre directement dans les conditions sur l'onde de choc et dans l'équation de la chaleur reçue. En général, on peut toujours lui conférer la forme

$$\varepsilon=\frac{p}{\varrho_1}\varphi\left(\frac{p}{p^*}, \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)+\text{const},$$

où φ est une fonction adimensionnée et p^* une constante quelconque ayant la dimension de la pression.

La dimension de p^* ne pouvant pas être exprimée au moyen des dimensions de ϱ_1 et de E, il suffit, pour que l'écoulement soit automodèle, que ε ne contienne pas p^*, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varepsilon=\frac{p}{\varrho_1}\varphi\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right), \tag{11.28}$$

où φ est une fonction arbitraire de son argument.

L'équation d'adiabacité ne peut pas contenir de nouvelles constantes physiques car sa forme est la suivante

$$d\varepsilon+pd\frac{1}{\varrho}=0.$$

La condition (11.28) impose une certaine restriction à l'équation d'état. En effet,

$$\frac{d\varepsilon+pd\dfrac{1}{\varrho}}{T}=dS$$

étant une différentielle totale, T et ε doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$T+\frac{\partial T}{\partial p}\left(\varrho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho}-p\right)-\varrho^2\frac{\partial T}{\partial\varrho}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varrho}=0.$$

*) V. Korobeïnikov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 109, n° 2, 1956; O. Ryjov et G. Taganov, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. XX, op. 4, 1956; N. Melnikova, Jassy, Bull. de l'Ecole Polytechn. n° 13, op. 2, 1963.

**) Voir l'ouvrage cité plus haut de G. Bam-Zélikovitch.

En y mettant $\varepsilon = p\varphi(\varrho)$ (pour simplifier on peut poser $\varrho_1 = 1$), on obtient

$$T + \frac{\partial T}{\partial p} p[\varphi'(\varrho)\varrho^2 - 1] - \varrho^2\varphi(\varrho)\frac{\partial T}{\partial \varrho} = 0.$$

On peut écrire un système équivalent d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dT}{T} = -\frac{dp}{p[\varphi'(\varrho)\varrho^2 - 1]} = \frac{d\varrho}{\varphi(\varrho)\varrho^2}.$$

Ce système admet deux intégrales premières

$$Te^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)}} = C_1 \quad \text{et} \quad p\varphi(\varrho)e^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)}} = C_2,$$

de sorte que

$$p\varphi(\varrho)e^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)}} = \Phi\left(Te^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)}}\right), \tag{11.29}$$

où φ et Φ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments. Il est évident qu'à la relation (11.29) satisfont toutes les équations d'état pour lesquelles la température est proportionnelle à la pression et est une fonction arbitraire de la densité. Toutefois, malgré la présence de deux fonctions arbitraires, de nombreuses équations d'état d'intérêt pratique (notamment l'équation de Van der Waals) ne peuvent pas être écrites sous la forme (11.29).

Si la fonction Φ se ramène à une constante, la pression et, partant, l'énergie interne ne dépendent que de la densité; une constante dimensionnelle correspondante, égale à Φ, entrera dans l'expression de l'énergis interne. Dans ce cas le système devient monoparamétrique et il est dès lore impossible de poser le problème comme précédemment.

En général la fonction Φ de (11.29) peut dépendre d'un nombre de constantes dimensionnées qui ne sont pas susceptibles de compromettre l'autosimilitude du problème formulé à l'aide de v, p, ϱ au § 1. Toutefois, la présence de telles constantes peut entraîner une variation non automodèle de la température T en fonction de r et de t dans le flux perturbé du milieu.

Notons encore qu'il découle de la formule (11.29)

$$p\varphi(\varrho)e^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)}} = \psi(S), \quad Te^{-\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)}} = \psi'(S),$$

où $\psi(S)$ est une fonction de l'entropie dépendant de la forme de la fonction Φ de (11.29) et satisfaisant à l'équation

$$\psi(S) = \Phi(\psi'(S)).$$

4. Explosion ponctuelle au sein d'un fluide parfait incompressible. On peut considérer le problème de l'explosion ponctuelle en supposant le milieu incompressible*). L'équation d'adiabacité peut être remplacée par l'équation

$$\varrho = \varrho_1 = \text{const}. \tag{11.30}$$

*) Le problème de l'explosion ponctuelle dans un milieu parfait compressible est traité dans les ouvrages de N. Kotchina, N. Melnikova, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. XXII, op. 1, 1958, et de V. Karlikov, V. Korobeïnikov, E. Riazanov, PMTF, n° 2, 1964.

Comme dans ce cas les perturbations se propagent à une vitesse infiniment grande, on peut avoir une solution sans onde de choc. L'écoulement du fluide incompressible lors d'une explosion ponctuelle peut être obtenu comme limite des écoulements adiabatiques du gaz lorsque $\gamma \to +\infty$. Tout comme dans le cas général, si $p_1=0$, l'écoulement du fluide est automodèle et il est facile de constater que le champ des vitesses vérifie la formule suivante :

$$v=\frac{2}{5}\left(\frac{E_0}{2\pi\varrho_1}\right)^{3/5}\frac{t^{1/5}}{r^2}, \tag{11.31}$$

puisque l'écoulement doit correspondre à une source d'intensité variable, fonction des seuls E_0, ϱ, t. Le facteur constant se détermine par l'énergie cinétique du fluide égale à $\frac{4}{25}E_0$. Il découle du théorème de Lagrange que

$$\frac{1}{\varrho_1}p=\frac{2}{25}\left(\frac{E_0}{2\pi\varrho_1}\right)^{2/5}t^{-6/5}\frac{r^*}{r}\left[1-\left(\frac{r^*}{r}\right)^3\right]. \tag{11.32}$$

Il se forme, au centre, une sphère vide de rayon croissant r^* vérifiant la formule

$$r^*=\left(\frac{E_0}{2\pi\varrho_1}\right)^{1/5}t^{2/5}. \tag{11.33}$$

A l'intérieur de la sphère de rayon r^* la pression est nulle.

La courbe *1* de la figure 85 donne la distribution des pressions dans le fluide, distribution qui, rapportée aux variables

$$\frac{pt^{6/5}}{\varrho_1\left(\frac{E_0}{2\pi\varrho_1}\right)^{2/5}}, \quad \frac{r}{r^*},$$

est représentée par une courbe universelle.

La pression maximale diminue en raison inverse de $t^{6/5}$, le maximum étant atteint indépendamment du temps pour $r^*/r_{p_{max}}=4^{-1/3}$, d'où

$$r_{p_{max}}=\sqrt[3]{4}r^*=4^{1/3}\left(\frac{E_0}{2\pi\varrho_1}\right)^{1/5}t^{2/5}. \tag{11.34}$$

Pour l'écoulement en question seul le rapport E_0/ϱ_1 est essentiel.

Si $p_1\neq 0$, l'écoulement du fluide incompressible provoqué par une explosion ponctuelle, tout comme celui du gaz, n'est pas automodèle. Toutefois dans ce cas la solution complète s'obtient aisément sous une forme analytique simple.

Le potentiel des vitesses et la grandeur de la vitesse s'expriment

$$\left.\begin{aligned} \varphi&=-\frac{r^{*2}\frac{dr^*}{dt}}{r} \\ \text{et}\qquad v&=\frac{r^{*2}}{r^2}\frac{dr^*}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{11.35}$$

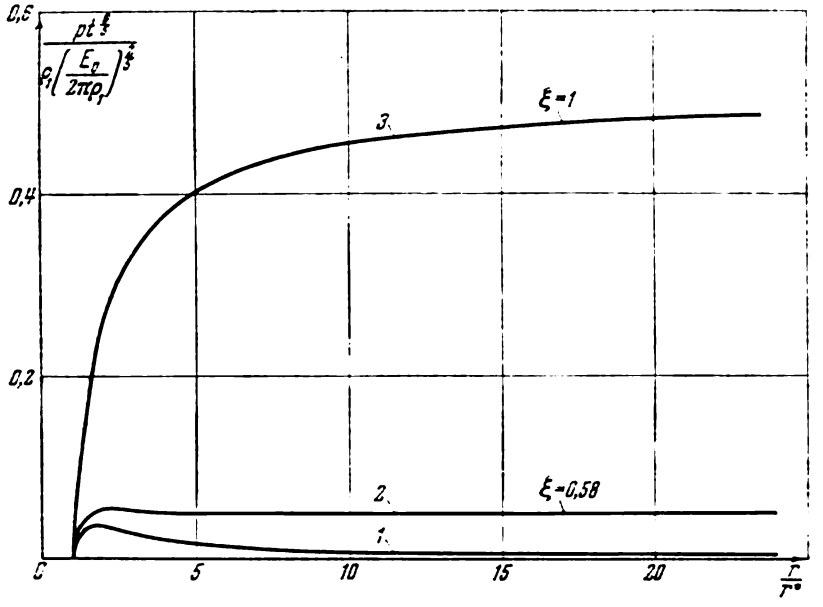


Fig. 85. Distribution des pressions dans un fluide incompressible lors d'une explosion ponctuelle : *1* — solution automodèle; *2* — solution tenant compte de la contre-pression pour les $\xi = r^*/r_{max}$ petits; *3* — pression au cas où la cavité interne a un rayon maximal

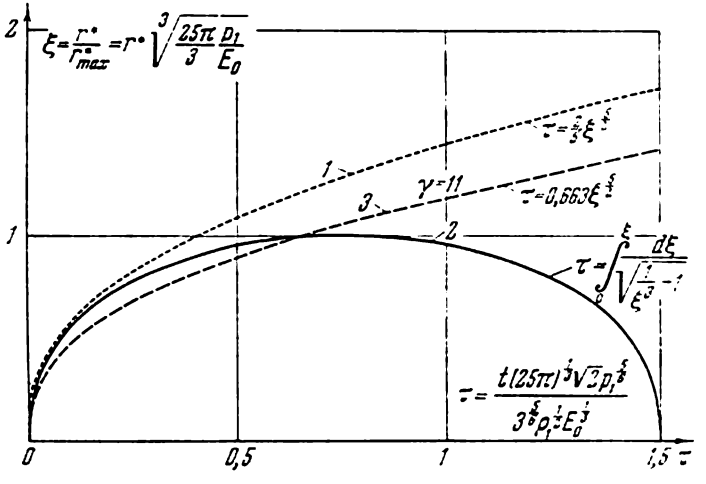


Fig. 86. Loi de la dilatation de la cavité interne : *1* — solution automodèle; *2* — écoulement d'un fluide incompressible compte tenu de la contre-pression; *3* — milieu compressible pour $\gamma = 11$

Ces formules sont valables quelle que soit la loi $r^*(t)$ de dilatation de la cavité sphérique intérieure.

Lorsque la pression intérieure $p^*=0$ et la pression extérieure à l'infini $p_1=\text{const}$, on tire du théorème de Lagrange

$$-\frac{p_1}{\varrho}=r^*\frac{d^2r^*}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dr^*}{dt}\right)^2. \tag{11.36}$$

D'où

$$\left(\frac{dr^*}{dt}\right)^2=-\frac{2}{3}\frac{p_1}{\varrho_1}+Cr^{*-3}. \tag{11.37}$$

En partant de la solution du problème automodèle et compte tenu de la formule (11.33) on trouve

$$C=\frac{4}{25}\left(\frac{E_0}{2\pi\varrho_1}\right).$$

En introduisant les notations

$$\left.\begin{aligned}\tau&=t\frac{(25\pi)^{1/3}\sqrt{2}p_1^{5/6}}{3^{5/6}\varrho_1^{1/2}E_0^{1/3}},\\ \xi&=\frac{r^*}{r^*_{\max}},\qquad r^*_{\max}=\sqrt[3]{\frac{3}{25\pi}\frac{E_0}{p_1}},\end{aligned}\right\} \tag{11.38}$$

on confère à la loi de dilatation de la cavité intérieure la formule universelle

$$\tau=\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{\xi^3}-1}}. \tag{11.39}$$

Il est évident que $r_{\max}$ est égal au plus grand rayon de la cavité intérieure.

La loi de dilatation (11.39) est représentée sur la figure 86. Exprimée à l'aide des mêmes variables, la loi de dilatation automodèle sera représentée par la formule

$$\tau=\frac{2}{5}\xi^{5/2} \tag{11.40}$$

dont la courbe est montrée en pointillé sur la figure 86. On y voit également la courbe de la solution automodèle pour le gaz lorsque $\gamma=11$.

§ 12. Explosion ponctuelle et contre-pression

Examinons maintenant le problème formulé au § 1 de l'explosion ponctuelle dans un gaz parfait de densité initiale constante ϱ_1 et de pression initiale constante p_1 non nulle. Lorsqu'on prend en considération la pression p_1 incluse dans les conditions sur l'onde de choc, le problème cesse d'être automodèle.

Comme il a été indiqué au § 1, la solution du problème non automodèle ne dépend que de deux variables adimensionnées indépendantes et d'une constante abstraite γ.

Désignons comme auparavant par r_2 le rayon variable de l'onde de choc et par $c=dr_2/dt$ la vitesse de l'onde de choc.

En décrivant l'écoulement du point de vue d'Euler prenons les variables adimensionnées indépendantes suivantes :

$$\lambda=\frac{r}{r_2} \quad \text{et} \quad q=\frac{a_1^2}{c^2}, \tag{12.1}$$

où $a_1^2=\gamma p_1/\varrho_1$, a_1 étant la vitesse du son dans le gaz à l'état non perturbé. Les intervalles de variation de q et λ sont donnés par les inégalités

$$0\leq\lambda\leq 1,$$
$$0\leq q\leq 1.$$

Au lieu de la variable q on peut également prendre l'une des variables adimensionnées

$$\tau=\frac{t}{t^0}, \quad \text{où} \quad t^0=E_0^{1/\nu}\sqrt{\varrho_1}p_1^{-\frac{\nu+2}{2\nu}}, \tag{12.2}$$

τ étant le temps sans dimension ou

$$l=\frac{r_2}{r_0}, \quad \text{où} \quad r^0=\left(\frac{E_0}{p_1}\right)^{1/\nu}, \tag{12.3}$$

étant la coordonnée sans dimension de l'onde de choc; t_0 est le temps dynamique caractéristique; r^0, la longueur dynamique caractéristique.

La figure 87 donne les graphiques, pour le cas de symétrie sphérique, permettant de déterminer r^0 en mètres, t^0 en secondes en fonction de l'énergie de l'explosion et de l'altitude de l'atmosphère standard donnant la pression p_1 et la densité ϱ_1. Prenons par exemple comme l'énergie de base l'énergie E_0 calculée à la page 255 et pour fixer les idées donnons les valeurs numériques suivantes pour l'altitude $H=5$ km :

$$0{,}0001E_0=7{,}19\cdot 10^{16}\text{ ergs}, \quad r^0\simeq 51\text{ m}, \quad t^0\simeq 0{,}002\text{ s};$$
$$E_0=7{,}19\cdot 10^{20}\text{ ergs}, \quad r^0\simeq 1100\text{ m}, \quad t^0\simeq 4{,}1\text{ s};$$
$$1000E_0=7{,}19\cdot 20^{23}\text{ ergs}, \quad r^0\simeq 11\,000\text{ m}, \quad t^0\simeq 41\text{ s}.$$

Pour une explosion forte lorsque $p_1=0$, on a $q=0$, $\tau=0$, $l=0$.

Pour une explosion ponctuelle lorsque $p_1\neq 0$ et $t\to 0$, on a $\tau\to 0$, $l\to 0$ et $q\to 0$.

On peut admettre par la suite que si les caractéristiques adimensionnées

$$f(\lambda, q, \gamma)$$

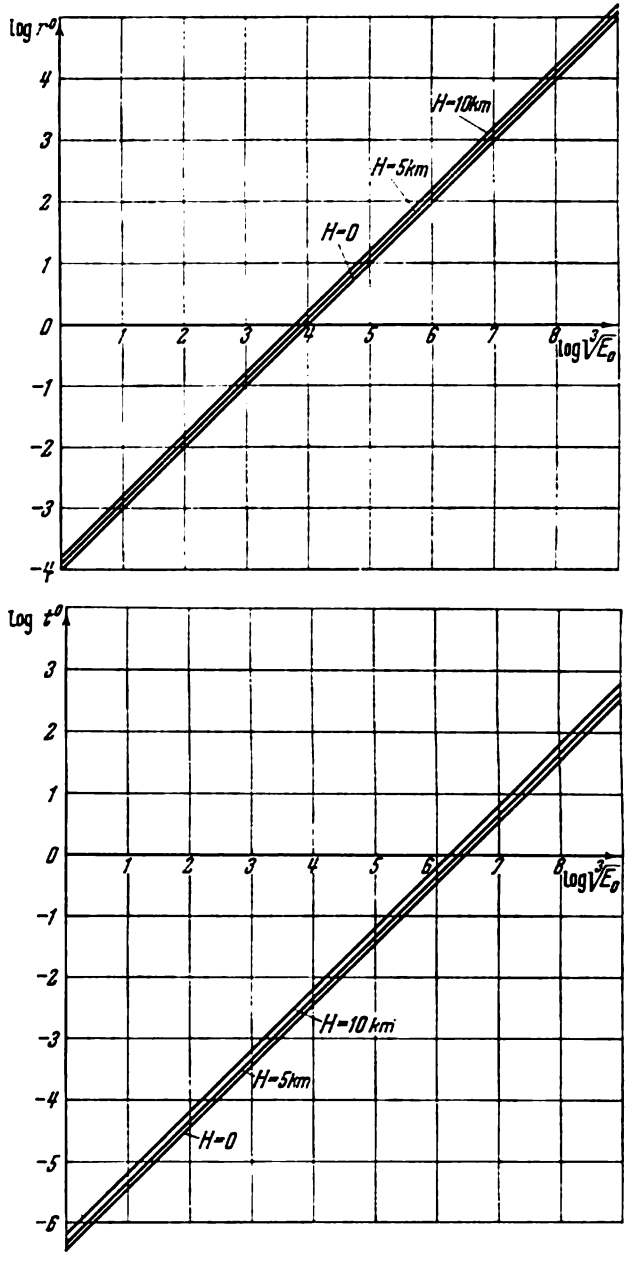


Fig. 87. Constantes d'échelle : $r^0 = \sqrt{E_0/p_1}$ dimension linéaire dynamique en mètres; $t^0 = E_0^{1/3} \varrho_1^{1/2} p_1^{-5/6}$ le temps dynamique en secondes; H la hauteur de l'atmosphère standard; E_0 l'énergie de l'explosion en ergs

de l'écoulement gazeux conservent une valeur finie lorsque $q \to 0$ ou $\tau \to 0$ ou $l \to 0$, elles tendent vers la fonction d'écoulement automodèle correspondante, donnée par la solution examinée au § 11.

Pour une solution automodèle, indépendante de p_1, les p_1, ϱ_1 et E_0 étant finis, on peut considérer les quantités finies q, τ, l.

La vitesse de l'onde de choc en fonction du temps t ou de la coordonnée r_2 dans le cas d'un écoulement automodèle étant connue (formules (11.4), (11.5) et (11.6)), on obtient les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} q &= \gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)^2 \alpha^{\frac{2}{2+\nu}} \tau^{\frac{2\nu}{2+\nu}}, \\ q &= \gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)^2 \alpha l^{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

Pour un écoulement non automodèle les relations fonctionnelles $q(\tau)$ ou $q(l)$ sont définies par la loi du mouvement de l'onde de choc, ces fonctions tendant respectivement vers (12.4) lorsque $q \to 0$. On voit aisément que si la vitesse du son $a_1 = \sqrt{\gamma p_1/\varrho_1}$ est constante, on a la formule suivante :

$$\frac{dl}{dq} = \sqrt{\frac{\gamma}{q}}\,\frac{d\tau}{dq}. \tag{12.5}$$

Désignons comme auparavant par v_2, ϱ_2 et p_2 les valeurs de la vitesse, de la densité et de la pression sur le front de l'onde d'explosion. En vertu des conditions sur l'onde de choc (11.1) on a les formules

$$v_2 = \frac{2a_1}{\gamma+1}\,\frac{1-q}{\sqrt{q}}; \quad \varrho_2 = \frac{\varrho_1(\gamma+1)}{\gamma-1+2q}; \quad p_2 = \frac{p_1}{\gamma+1}\,\frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{q} \tag{12.6}$$

donnant explicitement toutes les caractéristiques du gaz sur le front de l'onde de choc en fonction de q. On ne sait pas à l'avance comment v_2, ϱ_2, p_2 dépendent de τ ou de l; établir cette dépendance revient à établir la fonction $q(\tau)$ ou la fonction $q(l)$.

Si l'on prend comme fonctions inconnues les valeurs

$$f(\lambda, q) = \frac{v}{v_2}; \quad g(\lambda, q) = \frac{\varrho}{\varrho_2}; \quad h(\lambda, q) = \frac{p}{p_2}, \tag{12.7}$$

les conditions exactes sur l'onde de choc se présentent sous forme simple

$$\text{pour } \lambda = 1 \quad f(1, q) = g(1, q) = h(1, q) = 1. \tag{12.8a}$$

La vitesse se réduisant à zéro au centre de symétrie, on a l'égalité

$$f(0, q) = 0. \tag{12.8b}$$

Les conditions initiales du problème de l'explosion ponctuelle peuvent s'écrire

$$(f\lambda, 0) = f_0(\lambda); \quad g(\lambda, 0) = g_0(\lambda); \quad h(\lambda, 0) = h_0(\lambda), \tag{12.9}$$

où $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ et $h_0(\lambda)$ sont les fonctions déterminées et analysées au § 11 lors de la résolution du problème du mouvement automodèle.

Rapporté à ces variables, le système d'équations (1.3) décrivant les écoulements unidimensionnels adiabatiques non stationnaires du gaz prend la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1}f-\lambda\right](1-q)\frac{\partial f}{\partial\lambda}+\\
&\qquad+\frac{[\gamma+1+(\gamma-1)(1-q)][\gamma+1-2(1-q)]}{2\gamma(\gamma+1)}\,\frac{1}{g}\,\frac{\partial h}{\partial\lambda}+\\
&\qquad\qquad+\left[(1-q)\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{2-(1-q)}{2q}f\right]r_2\frac{dq}{dr_2}=0,\\
&\frac{2(1-q)}{\gamma+1}\,\frac{\partial f}{\partial\lambda}+\left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1}f-\lambda\right]\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial\lambda}+\frac{2(1-q)}{\gamma+1}\,\frac{(\nu-1)}{\lambda}f+\\
&\qquad\qquad+\left[\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial q}-\frac{2}{\gamma+1-2(1-q)}\right]r_2\frac{dq}{dr_2}=0,\\
&\left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1}f-\lambda\right]\frac{1}{h}\,\frac{\partial h}{\partial\lambda}-\left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1}f-\lambda\right]\frac{\gamma}{g}\,\frac{\partial g}{\partial\lambda}+\left[\frac{1}{h}\,\frac{\partial h}{\partial q}-\frac{\gamma}{g}\,\frac{\partial g}{\partial q}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{2\gamma(\gamma-1)(1-q)^2}{[\gamma+1-2(1-q)][\gamma+1+(\gamma-1)(1-q)]q}\right]r_2\frac{dq}{dr_2}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{12.10}$$

On peut satisfaire à l'équation (12.10) et aux conditions (12.8) et (12.9) en posant

$$\left.\begin{aligned}
f(\lambda,q)&=f_0(\lambda)+qf_1(\lambda)+\ldots,\\
g(\lambda,q)&=g_0(\lambda)+qg_1(\lambda)+\ldots,\\
h(\lambda,q)&=h_0(\lambda)+qh_1(\lambda)+\ldots,\\
l^\nu&=\left(\frac{2}{2+\nu}\right)^2\frac{q}{\gamma\alpha(\gamma)}e^{Aq+\ldots}.
\end{aligned}\right\}\tag{12.11}$$

A l'aide des équations (12.10) et des conditions aux limites (12.8a) et (12.8b) on peut déterminer les fonctions $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $h_1(\lambda)$ et la constante A*).

Les conditions aux limites fournissent

$$f_1(0)=0;\quad f_1(1)=0;\quad g_1(1)=0;\quad h_1(1)=0.\tag{12.12}$$

*) La résolution de ce problème est donnée dans la thèse de N. Melnikova (Bournova) soutenue à l'Université de Moscou en 1953 (Bulletin « Mekhanika », n° 3, 2535, 1954).

Un peu plus tard A. Sakurai a envisagé indépendamment et par une méthode différente le problème linéarisé analogue de l'explosion ponctuelle où intervient la contre-pression (voir Journ. Phys. Soc. Japan 8, n° 1953; 9, n° 2, 1954).

Les équations (12.4) donnent le système suivant d'équations différentielles linéaires ordinaires contenant la constante inconnue A :

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0-\lambda\right]g_0\frac{df_1}{d\lambda}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{dh_1}{d\lambda}+\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0'+\frac{\nu}{2}\right]g_0f_1+\\
&\qquad+\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0f_0'-\lambda f_0'-\frac{\nu}{2}f_0\right]g_1+\\
&\qquad+\left[\frac{\gamma^2+4\gamma-1}{2\gamma(\gamma+1)}h_0'-\nu f_0g_0-\frac{2}{\gamma+1}f_0f_0'g_0+\frac{\nu}{2}f_0g_0A\right]=0,\\
&\frac{2g_0}{\gamma+1}\frac{df_1}{d\lambda}+\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0-\lambda\right]\frac{dg_1}{d\lambda}+\frac{2}{\gamma+1}\left[\frac{\nu-1}{\lambda}g_0+g_0'\right]f_1+\\
&\qquad+\left[\frac{2}{\gamma+1}\frac{\nu-1}{\lambda}f_0+\frac{2}{\gamma+1}f_0'+\nu\right]g_1-\lambda g_0'-\frac{2}{\gamma-1}\nu g_0=0,\\
&\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]g_0\frac{dh_1}{d\lambda}-\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]\gamma h_0\frac{dg_1}{d\lambda}+\frac{2}{\gamma+1}[g_0h_0'-\gamma h_0g_0']f_1+\\
&\qquad+\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]h_0'g_1-\nu(\gamma+1)h_0g_1-\gamma\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]g_0'h_1-\\
&\qquad-\frac{2}{\gamma+1}(g_0h_0'-\gamma h_0g_0')f_0+\nu h_0g_0\left[A+\frac{4\gamma^2-(\gamma-1)^2}{2\gamma(\gamma-1)}\right]=0.
\end{aligned}\right\}\tag{12.13}$$

Les coefficients de ces équations sont les fonctions connues de λ s'exprimant par les fonctions f_0, g_0, h_0 correspondant à la solution automodèle. La constante A entrant uniquement dans les termes constants de façon linéaire, la solution recherchée du système (12.10) peut se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
f_1&=f_{11}+Af_{12},\\
g_1&=g_{11}+Ag_{12},\\
h_1&=h_{11}+Ah_{12}.
\end{aligned}\right\}\tag{12.14}$$

Définissons les fonctions $f_{11}(\lambda)$, $g_{11}(\lambda)$, $h_{11}(\lambda)$ en tant que solution du problème de Cauchy pour le système (12.13) pour $A=0$ et pour les conditions initiales

$$f_{11}(1)=0,\quad g_{11}(1)=0,\quad h_{11}(1)=0.$$

Définissons les fonctions $f_{12}(\lambda)$, $g_{12}(\lambda)$ et $h_{12}(\lambda)$ en tant que solution du problème de Cauchy pour un système d'équations analogue aux termes constants correspondants modifiés et aux conditions initiales

$$f_{12}(1)=0,\quad g_{12}(1)=0,\quad h_{12}(1)=0.$$

La condition (12.12) au centre sera vérifiée si la constante A se détermine de la condition

$$\lim_{\lambda\to 0}(f_{11}+Af_{12})=0.\tag{12.15}$$

Les problèmes de Cauchy peuvent être résolus par une méthode numérique.

En exprimant la variable indépendante λ par V selon les formules (11.10) et (11.15) on transforme le système d'équations différentielles linéaires ordinaires (12.13) en un système d'équations différentielles ordinaires dont les coefficients revêtent la forme des fonctions rationnelles simples de V.

Pour $V=2/(2+\nu)\gamma$ certains coefficients admettent des pôles aux points correspondant au centre de symétrie. Les solutions recherchées du système transformé peuvent se présenter sous la forme de séries convergentes pour toutes les valeurs de V sur l'intervalle

$$\frac{2}{(2+\nu)\gamma}<V<\frac{4}{(\gamma+1)(2+\nu)}$$

(pour $\nu=3$ lorsque $\gamma<7$) dans lequel on se propose de trouver la solution nécessaire.

Les calculs numériques fournissent dans les trois cas $\nu=1$, 2, 3 une valeur de A voisine de deux*).

Au lieu de la condition (12.8) et, dans le cas linéaire, au lieu de la condition (12.15) on peut exiger la finitude de l'énergie de l'écoulement perturbé. Dans le cas des équations linéarisées la finitude de l'énergie et la condition

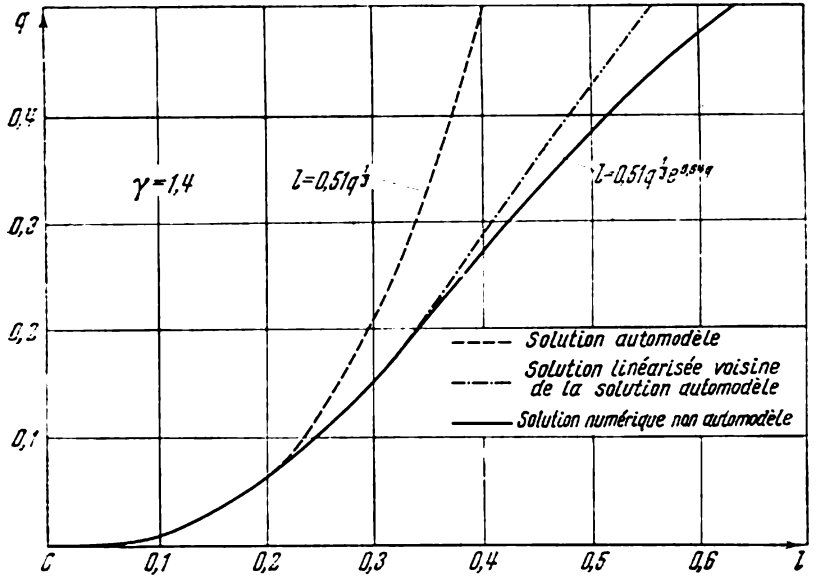


Fig. 88. Comparaison des diverses théories avec les solutions numériques pour la fonction $q(l)$ ($q=a_1^2/c^2$, $l=r_2/r^0$)

*) Les calculs numériques dans les cas $\nu=1$ et $\nu=2$ sont exposés dans l'article de D. Brouchlinski et T. Solomakhova publié dans le recueil d'articles n° 19, op. 7, « Teoretitcheskaia hydromekhanika » sous la rédaction de L. Sédov, Oborongiuz, 1956.

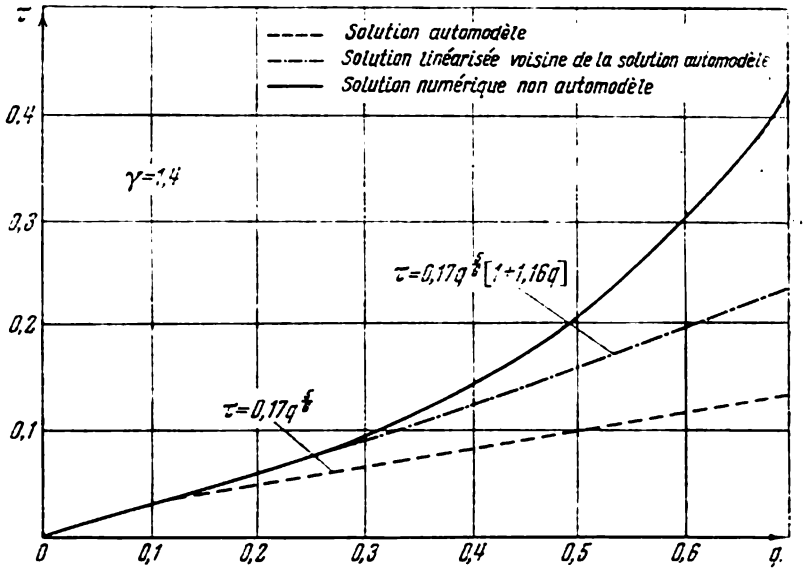


Fig. 89. Comparaison des diverses théories avec les solutions numériques pour la fonction $\tau(q)$ $(\tau = t/t^0)$

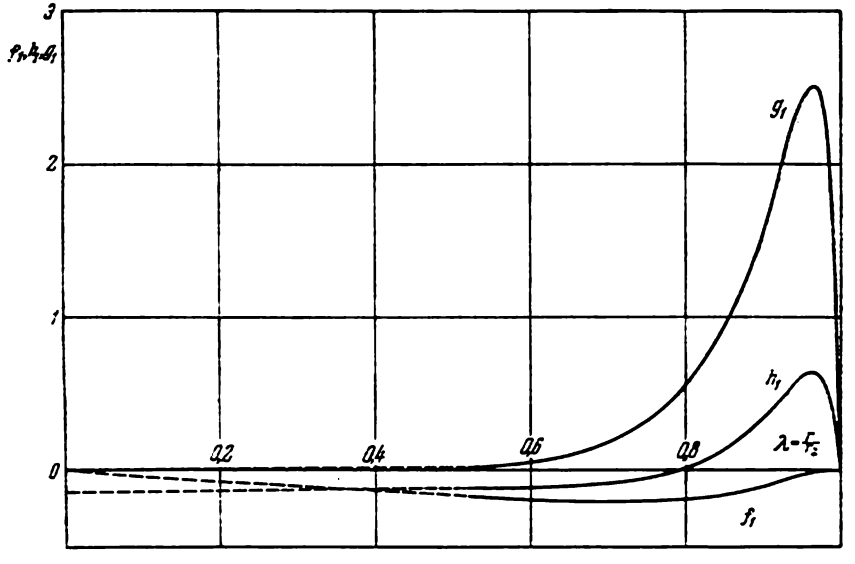


Fig. 90. Dérivées $\left(\frac{\partial \frac{\varrho}{\varrho_2}}{\partial q}\right)_{q=0} = g_1(\lambda)$, $\left(\frac{\partial \frac{p}{p_2}}{\partial q}\right)_{q=0} = h_1(\lambda)$ et $\left(\frac{\partial \frac{v}{v_2}}{\partial q}\right)_{q=0} = f_1(\lambda)$ décrivant l'influence de la contre-pression au stade initial d'une explosion ponctuelle

(12.15) sont équivalentes. Ayant déterminé la constante A à partir des formules (12.11) on obtient, aux termes d'ordre élevé près, une relation plus exacte entre l et q pour q petits. En vertu de (12.5) la relation entre q et τ pour q petits a la forme

$$\tau=\left(\frac{2}{2+\nu}\right)^{\frac{2}{\nu}}\frac{q^{\frac{2+\nu}{2\nu}}}{\nu(\gamma\alpha)^{1/\nu}\gamma^{1/2}}\left[\frac{2\nu}{2+\nu}+A\frac{2(\nu+1)}{2+3\nu}q\right]. \tag{12.16}$$

Les courbes correspondantes sont données sur les figures 88 et 89. Les courbes en pointillé traduisent la loi automodèle (12.4), celles en trait interrompu mixte correspondent à des lois précisées tenant compte des

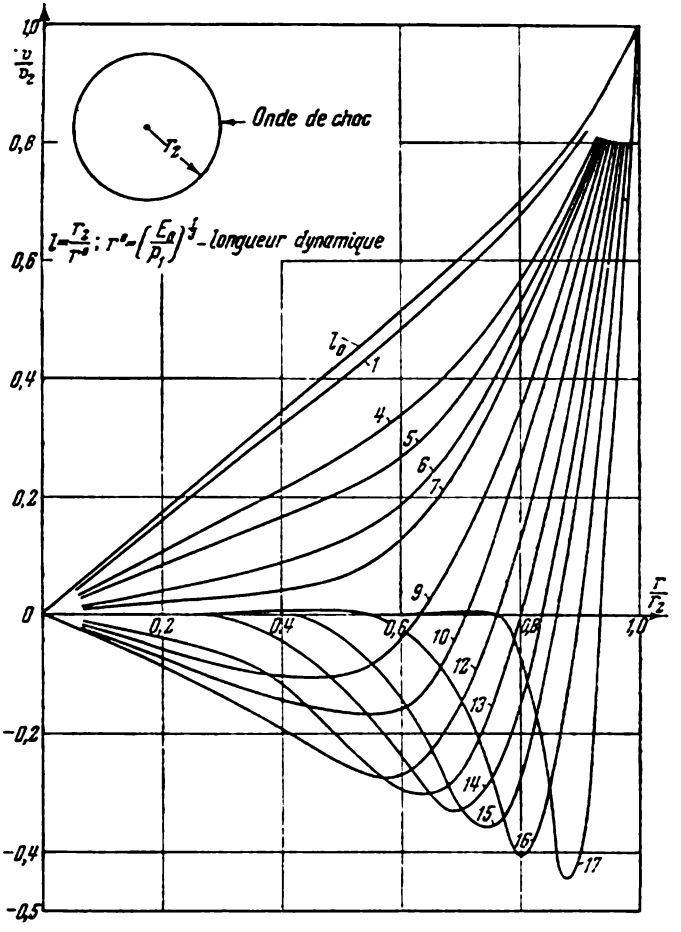


Fig. 91. Distribution des vitesses lors d'une explosion ponctuelle

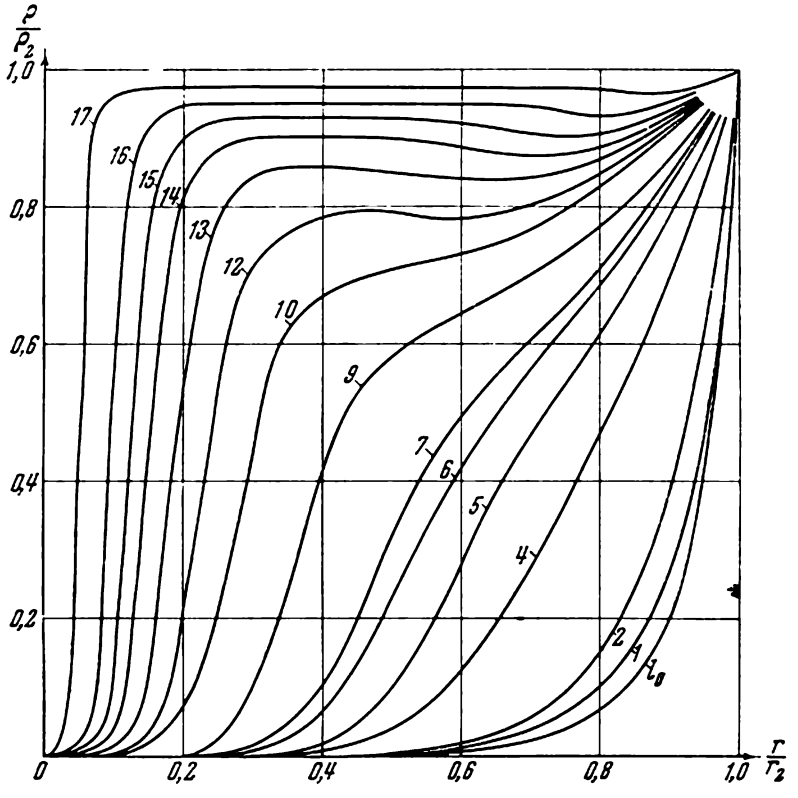


Fig. 92. Distribution de la densité lors d'une explosion ponctuelle

termes linéaires, les courbes en trait continu sont les résultats des calculs numériques effectués sur calculateur électronique*).

Les résultats des calculs numériques pour les fonctions $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ et $h_1(\lambda)$ pour $\nu=3$ sont représentés sur la figure 90. Ces graphiques permettent d'évaluer pour q petits la variation des caractéristiques de l'écoulement du gaz en fonction du temps selon les formules (12.11)**).

*) J. Neumann and H. Goldstine, Comm. Pure and Appl., Math. 8, n° 2 (327-354), 1955. Les calculs se rapportent à l'intervalle $100 \geq p_2/p_1 \geq 1{,}017$. H. Brode, Appl. Physics 26, n° 6 (766-775), 1955. L'intervalle des calculs : $1600 \geq p_2/p_1 \geq 1{,}06$. D. Okhotsimski, I. Kondracheva, Z. Vlassova, P. Kazakova, Troudy MIAN de l'U. R. S. S., t. L, 1957. L'intervalle des calculs : $1740 \geq p_2/p_1 \geq 1{,}008$. D. Okhotsimski, Z. Vlassova, « Revue des mathématiques numériques et de physique mathématique », t. 2, n° 1, 1962.

**) Le problème linéarisé de l'écoulement non stationnaire du gaz déplacé par un piston en dilatation a été envisagé par N. Kotchina et N. Melnikova, « Prikladnaïa matematika i mekhanika » t. XXIV, op. 2, 1960, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 122, n° 2, 1958.

Depuis 1955 commencent à paraître les ouvrages*) donnant la solution numérique du problème non automodèle de l'explosion ponctuelle (cas sphérique : $\nu=3$, $\gamma=1{,}4$) compte tenu de la contre-pression.

Les résultats de tous les ouvrages cités ont été confrontés et ramenés aux variables adimensionnées introduites auparavant**).

Les figures 91 à 93 donnent les distributions de la vitesse, de la densité et de la pression en arrière du front d'onde d'explosion; les graphiques

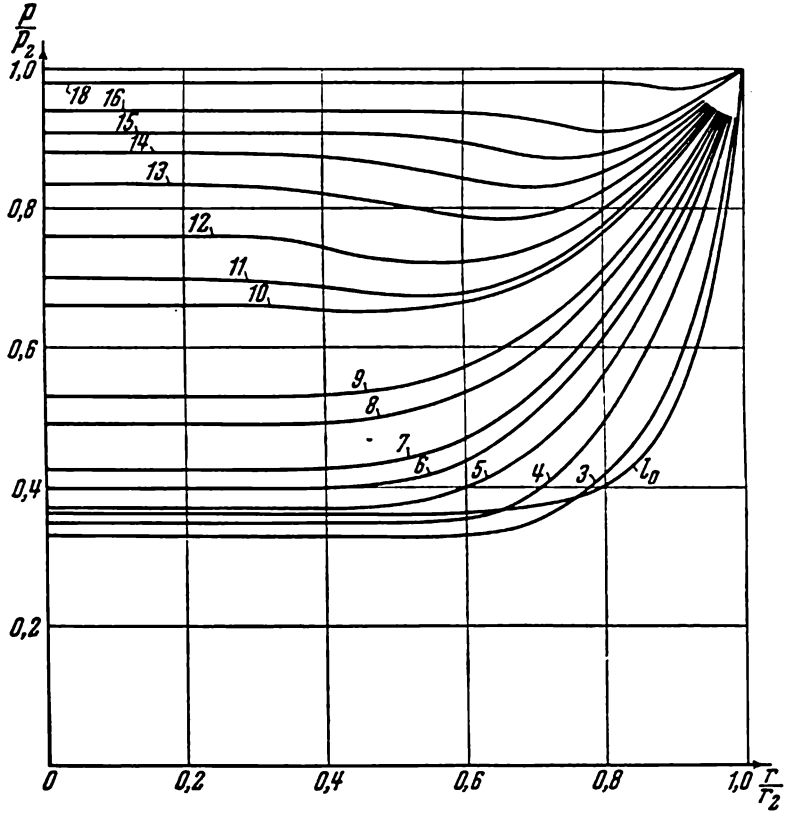


Fig. 93. Distribution des pressions lors d'une explosion ponctuelle

*) Voir la note**) au bas de la page 272.

**) Les résultats des calculs numériques qui suivent sont présentés par N. Melnikova, V. Korobeïnikov et E. Riazanov.

Les résultats des calculs du problème non automodèle de l'explosion ponctuelle pour $\nu=1$; 2; 3 et pour un large intervalle de valeurs de γ sont donnés dans les ouvrages datant de 1964 (Voir V. Korobeïnikov, P. Tchuchkine « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., 54, n° 3, 1964; N. Melnikova, T. Salamakhine, PMTF, n° 4, 1964).

portent la variable la plus essentielle $l=r_2/r^0$, caractérisant la distance de l'onde d'explosion au centre d'explosion mesurée en fractions de longueur dynamique $r^0=(E_0/p_1)^{1/3}$.

Dans le tableau ci-joint sont groupées les valeurs numériques des l_k numérotées, les valeurs de $\tau=t/t^\circ$ ainsi que la chute de pression sur le front d'onde de choc p_2/p_1.

$l=\frac{r_2}{r^0}$	$\tau=\frac{t}{t^0}$	$\frac{p_2}{p_1}$	Désignation de l	$l=\frac{r_2}{r^0}$	$\tau=\frac{t}{t^0}$	$\frac{p_2}{p_1}$	Désignation de l
Courbes automodèles		—	l_0	Courbes automodèles		—	l_0
0,1867	0,01403	21,1	l_1	1,2524	0,6296	1,338	l_{10}
0,2669	0,03230	10,31	l_2	1,3210	0,6811	1,315	l_{11}
0,3342	0,05431	4,967	l_3	1,5171	0,8299	1,255	l_{12}
0,4890	0,1231	3,056	l_4	1,8751	1,1080	1,185	l_{13}
0,6003	0,1842	2,321	l_5	2,3222	1,4636	1,136	l_{14}
0,6812	0,2333	2,010	l_6	2,8641	1,8973	1,102	l_{15}
0,7566	0,2807	1,835	l_7	3,6983	2,7763	1,066	l_{16}
0,9566	0,3667	1,615	l_8	7,0791	5,3764	1,032	l_{17}
0,9801	0,4323	1,521	l_9	9,6424	7,5180	1,022	l_{18}

Tous les graphiques sont également valables pour l'explosion ponctuelle quels que soient p_1, ϱ_1 et E_0 mais pour $\gamma=1{,}4$.

Les relations $q(l)$ et $q(\tau)$ sont représentées sur les figures 88 et 89. Les graphiques permettent d'estimer les intervalles de bonne approximation ainsi que le caractère des écarts lors de l'amortissement de l'onde de choc. A partir de ces graphiques et des formules (12.6) il est aisé d'établir les valeurs p_2/p_1, ϱ_2/ϱ_1 et v_2/a_1 associées au front d'onde en fonction de l ou de τ. Les courbes correspondantes sont données sur les figures 94 à 96 (les courbes des figures 94 et 96 sont exécutées à l'échelle logarithmique). Ces graphiques comportent également les courbes correspondant à l'écoulement automodèle et à la formule asymptotique de L. Landau*).

Les figures 97 et 98 représentent les graphiques extraits de l'article cité de Neumann et Goldstine donnant la variation de la pression p/p_1 en fonction du temps en un point fixe de l'espace et la variation de la pression p/p_1 en fonction de la coordonnée r/r^0 à un instant fixe.

Les graphiques ci-dessus sont calculés pour le cas sphérique lorsque $\gamma=1{,}4$. On connaît les formules approchées**) théoriques donnant la loi du mouvement de l'onde de choc et les caractéristiques du gaz en arrière du front d'onde pour d'autres γ ainsi que pour les cas des ondes cylindriques et planes.

*) Voir L. Landau, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. IX, op. 4, 1945.

**) V. Korobeïnikov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. III, n° 3, 1956.

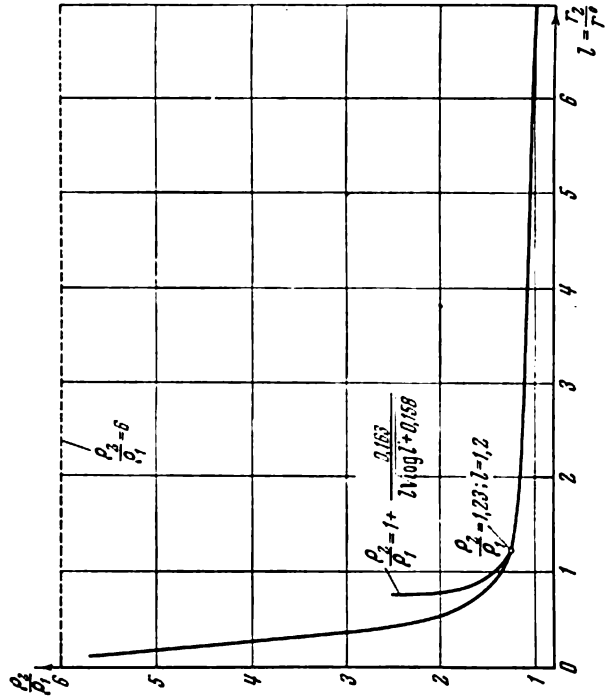


Fig. 95. Densité derrière le front d'onde en fonction du rayon de l'onde de choc

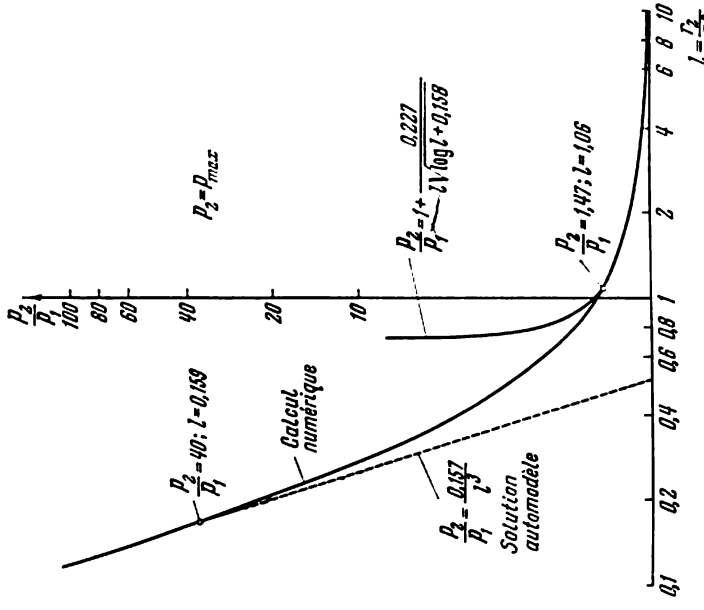


Fig. 94. Chute de pression sur le front d'onde en fonction du rayon de l'onde de choc

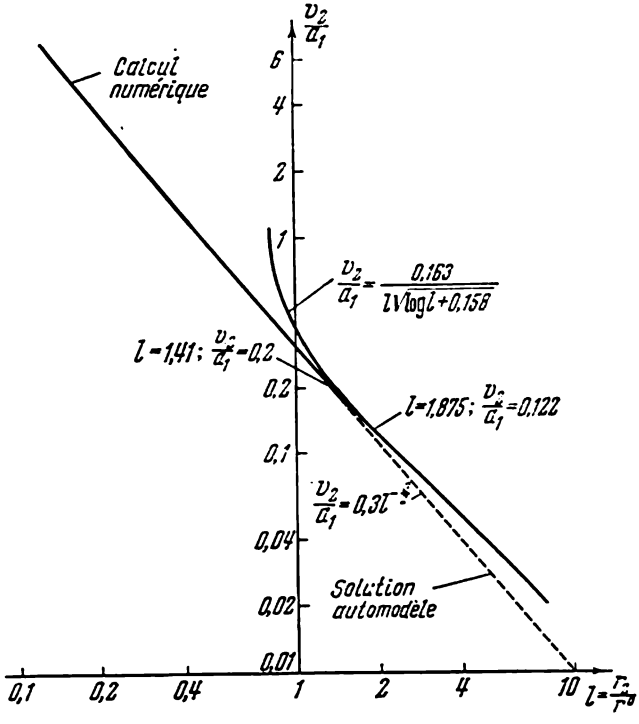


Fig. 96. Vitesse derrière le front d'onde en fonction du rayon de l'onde de choc

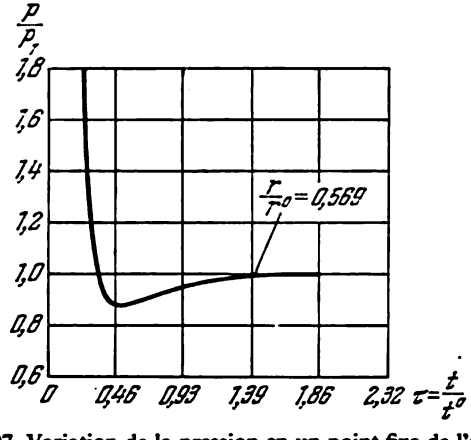


Fig. 97. Variation de la pression en un point fixe de l'espace

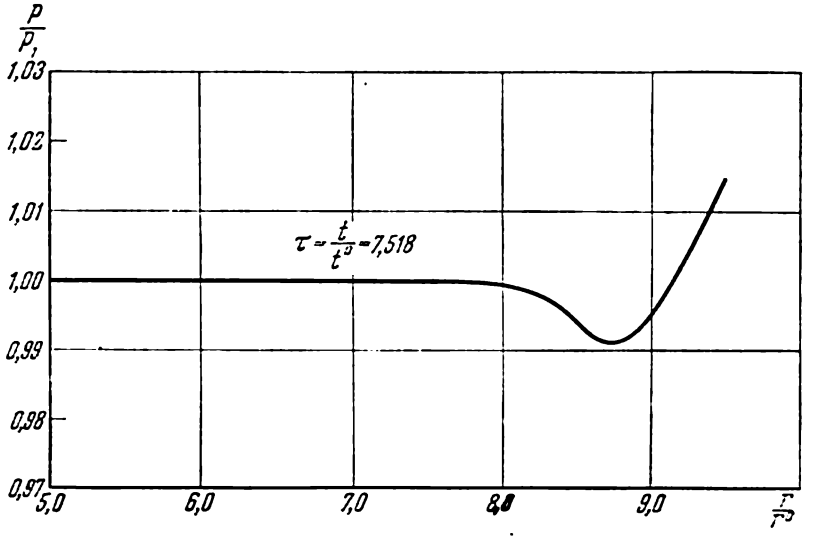


Fig. 98. Distribution de la pression en un instant fixe

§ 13. Simulation et formules de pression et d'impulsion maximales lors des explosions

On aurait pu donner les formules définissant les pressions maximales, les impulsions, etc., en fonction de la distance au centre d'explosion, de l'énergie d'explosion et d'autres facteurs au début du livre, à titre d'exemple analogue aux exemples considérés au § 6, ch. II.

Toutefois, il apparaît plus commode d'exposer cette question ainsi que les règles de simulation du phénomène de l'explosion et de son action après avoir développé la théorie d'explosion ponctuelle au sein d'un gaz; cela simplifie la tâche et permet de s'appuyer sur les formulations des problèmes appropriés que nous avons précédemment données.

Pour évaluer l'action de l'explosion sur un certain corps entrant en interaction avec le champ de l'écoulement perturbé du gaz on peut considérer la pression maximale p_{max} ou la valeur de l'impulsion I agissant sur la surface du corps et rapportée à l'unité de surface définie sur l'aire élémentaire de la surface du corps.

Si la surface du corps ne subit que les contraintes de pression, l'impulsion I peut se définir par la formule

$$I=\int_{t_0}^{t_1}(p-p_1)\,dt,$$

où p_1 est la pression initiale du gaz non perturbé; t_0 et t_1 sont les dates

caractéristiques (par exemple, t_0 est l'instant du début de l'action, $t_1=\infty$ ou t_1 est associé à l'instant où la différence $p-p_1$ change de signe, etc.). Parfois, il devient important de connaître le vecteur impulsion résultant général $\boldsymbol{J}$ appliqué au corps et pris pour un intervalle de temps caractéristique.

Lors de l'explosion on observe l'interaction des perturbations au sein du milieu entourant le corps et au sein du corps lui-même. La valeur p_{max} en différents points de la surface du corps, l'impulsion I, le vecteur impulsion résultant $\boldsymbol{J}$ et les autres caractéristiques de l'interaction dépendent non seulement des propriétés de la charge, de sa position par rapport au corps, des propriétés de l'atmosphère ambiante mais également — et cela d'une façon essentielle — des propriétés du corps lui-même, de sa configuration, des conditions de sa fixation, de la masse et des autres caractéristiques dynamiques, de sa déformabilité et des forces de cohésion interne, de sa position par rapport à d'autres corps, etc.

En établissant le système de paramètres de définition et les critères de similitude, il faut relever les paramètres dimensionnés et les paramètres sans dimension, les caractéristiques du corps lui-même qui définissent son encombrement, sa configuration et sa masse ainsi que la distribution de cette dernière dans le volume du corps, les paramètres caractérisant les forces internes de cohésion, la pondérabilité du corps, etc.

En général, la difficulté principale consiste à choisir les facteurs essentiels seulement qui varient dans chaque cas concret selon le caractère du problème à résoudre.

Les constantes physiques supplémentaires susceptibles de caractériser un corps n'apparaissent pas aux cas limites où le corps est un solide parfait et immobile (ce peut être un corps de masse infinie à la limite) ou lorsque le corps est extrêmement petit de sorte qu'on est en droit de négliger les perturbations qu'il cause dans le champ de l'explosion. En effet, un solide parfait immobile de configuration arbitraire fixe peut être donné par un seul paramètre dimensionné, la dimension caractéristique linéaire D; les autres paramètres peuvent être considérés comme abstraits et ils demeurent constants pour une série de cas géométriquement semblables. Si l'on suppose que l'action de l'explosion ne se définit que par l'énergie de la charge E_0 (dans la pratique on caractérise souvent l'action de la charge uniquement par son poids qui est proportionnel à l'énergie d'explosion, faisant abstraction de la forme, de la nature chimique ou physique de la charge, etc.), il est possible de se servir de l'hypothèse de l'explosion ponctuelle instantanée, celle-ci étant entièrement définie par la valeur de l'énergie dégagée E_0. Comme on sait, cette hypothèse est incorrecte dans nombre de cas*) dont, en particulier, celui de l'action des obus à charge creuse.

Si l'explosion est forte et ponctuelle et si elle se produit au sein d'un gaz parfait remplissant tout l'espace extérieur au solide parfait, alors pour le

*) Dans les cas correspondants les développements ultérieurs peuvent exiger des corrections sensibles.

problème formulé au § 1, le système de paramètres définissant l'ensemble du phénomène est représenté, évidemment, par le tableau :

$$\gamma,\ E_0,\ \varrho_1,\qquad \xi=\frac{D}{R},\ R,\ \varphi,\ \psi, \tag{13.1}$$

où R, φ, ψ sont les coordonnées polaires du centre d'explosion dans un certain repère lié au corps (fig. 99).

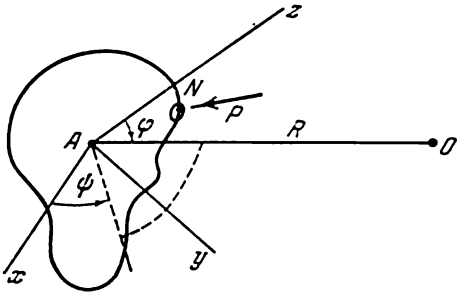


Fig. 99. Le point O est le centre d'explosion

Soit N un point sur le corps et soient $p_{\max}$ et I la pression maximale et l'impulsion en ce point.

On vérifie aisément que la théorie dimensionnelle fournit

$$p_{\max}=\frac{E_0}{R^3}\,f_1(\xi,\ \varphi,\ \psi,\ N,\ \gamma), \tag{13.2}$$

$$I=\sqrt{\frac{\varrho_1 E_0}{R}}\,f_2(\xi,\ \varphi,\ \psi,\ N,\ \gamma). \tag{13.3}$$

Les coordonnées du point N peuvent être considérées comme des nombres abstraits. En fixant le point N on peut, sans restreindre la généralité, y placer l'origine des coordonnées.

Pour l'impulsion résultante obtenue par sommation sur tous les points de la surface du corps on a la formule suivante :

$$J=\sqrt{\frac{\varrho_1 E_0}{R}}\,D^2 f_3(\xi,\ \varphi,\ \psi,\ \gamma). \tag{13.4}$$

Le calcul théorique de ces fonctions fait appel à la résolution d'un problème tridimensionnel complexe, ce qui n'est pas toujours possible.

Pour une forte explosion ($p_1=0$) les relations entre $p_{\max}$, I, J d'une part et E_0, ϱ_1, R d'autre part dans les cas géométriquement semblables s'établissent de façon évidente sans qu'on ait à résoudre ce problème complexe.

Les critères de similitude dynamique se ramènent dans ce cas à la constance des paramètres $\xi=D/R$, φ, ψ et ils n'imposent aucune restriction sur ϱ_1, R et E_0.

Pour $\xi=D/R\to 0$, lorsque le corps se réduit à un point, les quantités $p_{\max}$, I demeurent finies de sorte que lorsque $\xi\to 0$, les fonctions f_1, f_2 et f_3 conservent, à la limite, une valeur finie.

Pour les corps de faibles dimensions le paramètre ξ peut être posé nul. Dans ce cas les formules (13.2), (13.3) et (13.4) donnent les grandeurs considérées en fonction de la distance du corps R au centre de l'explosion.

Si l'on fait intervenir la pression initiale ($p_1 \neq 0$), les seconds membres des formules (13.2), (13.3) et (13.4) comportent un argument adimensionné supplémentaire

$$\chi = \frac{R}{\sqrt[3]{\frac{E_0}{p_1}}} = \frac{R}{r_0}.$$

Ce paramètre est proche de zéro pour E_0 grands et R petits; il est grand pour E_0 quelconques et R grands; c'est-à-dire que les critères de similitude ainsi que la relation entre les grandeurs considérées et l'énergie peuvent subir des modifications pour de grands R. En présence de la contre-pression p_1 les critères de similitude ont pour expression :

$$\frac{R}{\sqrt[3]{\frac{E_0}{p_1}}} = \text{const}, \quad \frac{D}{R} = \text{const}, \quad \varphi = \text{const} \quad \text{et} \quad \psi = \text{const}. \tag{13.5}$$

Au cours d'une expérience ces critères sont remplis s'il y a similitude géométrique et si l'on a

$$E_0 = \text{const}\, p_1 R^3,$$

ce qui est facilement réalisable en pratique lorsque diminuent les échelles. Si des données supplémentaires (par exemple des données expérimentales) fournissent quelques-unes des grandeurs $p_{\max}$, I ou J en fonction de l'énergie d'explosion E_0, on est alors en mesure de déterminer respectivement les f_1, f_2, f_3 en fonction du paramètre χ et, donc, pour $\xi = 0$, la dépendance de la distance R sera connue.

Les critères de similitude (13.5) peuvent être étendus au cas plus général où le corps donné serait un milieu continu de densité constante ϱ^*, un fluide impondérable incompressible ou un corps élastique sans poids caractérisé par le module de Young $\mathcal{E}$ et le coefficient de Poisson σ. Pour cela on doit ajouter aux critères (13.5) les conditions

$$\frac{\varrho^*}{\varrho_1} = \text{const} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{E}}{p_1} = \text{const}, \quad \sigma = \text{const}. \tag{13.6}$$

Les critères de similitude (13.5) et (13.6) gardent également leur forme au cas où il y a un système de fluides, de corps élastiques et de frontières parfaitement rigides. Dans un cas plus général outre la similitude géométrique — critères (13.5) — les conditions du type (13.6) doivent être remplies pour chaque corps avec les rapports constants correspondants.

Naturellement, la densité ϱ^* peut être variable dans l'espace mais dans les cas semblables les distributions de la densité doivent être semblables*).

*) S. Sidorkina, *Sur certains mouvements d'aérosol*, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 112, n° 3, 1957.

Tous les résultats précédents ont été établis sans tenir compte de la pesanteur.

Lorsqu'on tient compte du poids propre des différents corps, y compris le gaz, l'on doit admettre, dans le système de paramètres de définition, la constante de l'accélération de la pesanteur g. Dans ce cas les critères de similitude sont complétés par la condition stipulant la constance du paramètre adimensionné

$$\frac{p_1}{\varrho_1 g D} = \text{const.} \tag{13.7}$$

Si les dimensions linéaires D diminuent notablement, la condition (13.7) sera satisfaite par la diminution de p_1, l'augmentation de ϱ_1 ou l'augmentation de g. Si les propriétés élastiques sont essentielles et s'il n'est pas possible de faire varier sensiblement le module de Young $\mathcal{E}$, la condition $p_1/\mathcal{E} = \text{const}$ nous oblige à maintenir constante la valeur p_1. La densité de l'air peut varier dans de larges limites tandis que la densité des corps élastiques varie dans un étroit intervalle, donc on peut dire que la condition

$$\frac{\varrho^*}{\varrho_1} = \text{const}$$

fixe la densité ϱ_1.

Par conséquent, pour remplir la condition (13.7) il faut varier g. On peut y parvenir à l'aide d'une centrifugeuse ou d'une plate-forme animée d'un mouvement accéléré (§ 6, ch. II). Toutefois les deux méthodes compliquent à l'extrême la mise en œuvre des expériences: elles impliquent des modèles réduits avec un très grand rapport des échelles linéaires; en outre on est obligé à compter avec l'influence supplémentaire du courant d'air contournant le modèle, la courte durée du processus sur la plate-forme mobile, etc. Une très grande réduction de l'échelle peut également entraîner nombre d'autres facteurs (mode d'exécution du modèle, impossibilité d'assurer une similitude complète de la structure des matériaux, viscosité et capillarité, etc.) manifestement non essentiels pour la nature.

Dans le cas d'un fluide incompressible ($\mathcal{E} = \infty$) la condition $p_1/\mathcal{E}$ étant éliminée, on parvient à satisfaire à la condition (13.7) en diminuant la pression caractéristique p_1 (les expériences dans le vide). Les exemples ne manquent pas où le poids propre joue un rôle essentiel : ébranlement de grandes structures lors de l'explosion, effondrement de structures peu stables, formation d'entonnoirs d'explosion dans les sols et jaillissement de jets d'eau, formation de vagues à la surface d'eau lors d'une explosion aérienne au-dessus de cette surface, etc.

Dans l'étude des ruptures locales à la surface ou au sein de diverses structures métalliques les propriétés d'inertie et de résistance peuvent bien souvent être essentielles tandis que le rôle de la pondérabilité est en général insignifiant.

Traitons d'une manière plus détaillée la question des dimensions des entonnoirs d'explosion dans les sols. Dans bien des cas et, plus particulièrement, dans celui d'une explosion dans les sols sablonneux les forces des

contraintes internes dues aux propriétés physiques du sol (forces de frottement, contraintes de clivage) et à la pression atmosphérique sont faibles. Les forces de pression interne, qui se manifestent comme la pression hydrostatique, dues à la pesanteur peuvent être grandes et l'on tiendra compte de leur effet.

Considérons les expériences schématisées à la figure 100.

Supposons que pour un explosif donné l'éjection du sol ainsi que l'éjection de l'eau par explosion soient essentiellement liées à la densité et à la pondérabilité du sol et de l'eau. Admettons comme il est d'usage couran dans la pratique que les dimensions de l'entonnoir ne dépendent essentielle ment que de l'énergie de la charge E*) (poids de la charge) et de la pro

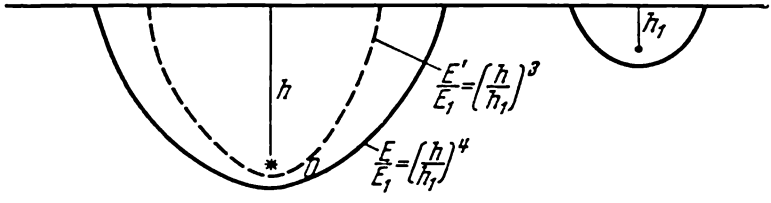


Fig. 100. Explosion ponctuelle souterraine; le point O est le centre d'explosion; h la profondeur de l'explosion. Dans des cas semblables on a $E/E_1=(h/h_1)^4$

fondeur h. En outre, on négligera la pression p_1 à la surface du sol. Ainsi, le système de paramètres caractéristiques sera ϱ_1, g, h, E. Pour qu'il y ait similitude il faut maintenir constant le paramètre

$$\frac{E}{\varrho_1 g h^4}=\text{const}=c. \tag{13.8}$$

Si la profondeur h est grande, i.e. c est petit, l'entonnoir ne se forme pas (camouflet). On voit de (13.8) que les entonnoirs sont semblables si

$$E=c\varrho_1 g h^4. \tag{13.9}$$

Pour les entonnoirs semblables l'énergie de la charge et, par suite, le poids de la charge doivent être proportionnels à la quatrième puissance de l'échelle. Le volume de sol éjecté étant proportionnel au cube de l'échelle, la relation entre l'énergie de la charge et le volume de sol éjecté Q, s'il y a similitude, est évidemment de la forme

$$E=c_1(c)Q^{4/3}\varrho_1 g. \tag{13.10}$$

Si l'explosion se produit à la surface $h=0$, le critère (13.8) s'élimine. Dans ce cas, sous les hypothèses formulées précédemment, la formule (13.10) est toujours en vigueur, en outre la constante $c_1=c_1(\infty)$ est une

*) Plus précisément, la valeur E est égale à l'énergie mécanique transmise de la charge au sol. Une partie de l'énergie de la charge peut être perdue par rayonnement, dépensée pour la fusion et la vaporisation du sol, etc.

constante numérique déterminée, indépendante de la densité du sol et de l'énergie d'explosion.

On confère à la formule (13.10) une nouvelle forme plus adaptée à la pratique en remplaçant l'énergie de la charge E par le poids de la charge, avec les modifications qui s'imposent, et le volume $\underline{Q}$ par le poids du sol.

Si les explosions obéissent à la loi $E'/E=(h/h')^3$, la similitude est rompue, les entonnoirs ne sont plus semblables; l'entonnoir qui se forme dans ce cas est montré en pointillé à la figure 100.

Dans les développements précédents on a négligé l'effet de la pression atmosphérique extérieure p_1 à la surface du sol. Cet effet ainsi que celui des forces élastiques internes s'exerce, pour un même matériau, par l'intermédiaire des paramètres $\mu=p_1/\varrho_1 gh$ et $p_1/\mathcal{E}$.

Pour p_1, ϱ_1 et g constants μ diminue à mesure qu'augmente h; pour ϱ, g, h constants la diminution de μ correspond à celle de la pression p_1.

Il est possible d'admettre que pour ϱ_1, g, h, $\mathcal{E}$ constants les dimensions de l'entonnoir augmentent lorsque diminue la pression extérieure p_1.

Par conséquent, la diminution du paramètre

$$\mu=\frac{p_1}{\varrho_1 gh}$$

par suite de l'augmentation de h, les autres grandeurs caractéristiques adimensionnées restant constantes, dérange la similitude en ce sens que le volume du sol éjecté dépasse le volume calculé d'après la loi de similitude.

Il est donc clair que pour obtenir un entonnoir de volume semblable dans la nature l'énergie de la charge doit augmenter moins que ne l'exige la loi (13.10).

Ainsi donc, l'influence des pressions extérieures et des forces de cohésion internes s'affaiblit avec l'augmentation des dimensions linéaires si l'énergie d'explosion croît proportionnellement à la quatrième puissance des dimensions linéaires.

Le déplacement relatif et les déformations sur la nature seront supérieurs à ceux du modèle si l'énergie croît proportionnellement à la quatrième puissance de l'échelle.

D'autre part, si la pondérabilité ne joue aucun rôle, la similitude est garantie par les critères (13.5) et (13.6) conformément auxquels l'énergie est proportionnelle au cube de l'échelle. L'action supplémentaire de la pesanteur compromet la similitude, notamment les déplacements et les déformations relatives diminuent lorsqu'on passe du modèle à la nature.

On en conclut que pour ϱ_1, p_1 et g constants les déformations relatives réelles sont supérieures à celles du modèle de dimensions réduites si $E\sim h^4$ et inférieures à celles du modèle réduit si $E\sim h^3$.

Il est utile de se souvenir de ces conclusions pour l'organisation de l'expérience et pour le dépouillement des données expérimentales concernant les effets de l'explosion.

Il découle de ce qui précède que pour l'explosion ayant pour but la projection des sols il semble peu avantageux d'un point de vue énergétique

d'utiliser de très grandes charges concentrées. On peut obtenir de bons résultats en répartissant judicieusement les charges et en améliorant les procédés d'explosion.

Nous avons étudié plus haut les formules générales des $p_{\max}$, I et J pour l'interaction de l'écoulement gazeux non stationnaire avec le corps solide. En l'absence de corps on peut fixer, par la pensée, une certaine surface Σ que l'écoulement gazeux ne sollicite pas et envisager les grandeurs analogues $p^0_{\max}$, I^0 et J^0 représentant les caractéristiques du champ d'explosion; elles ne seront manifestement pas égales aux grandeurs respectives $p_{\max}$, I et J déterminées essentiellement par l'interaction entre l'écoulement gazeux et le corps solide.

Dans ce cas pour chaque élément de la surface Σ sont vraies les formules

$$p^0_{\max}=\frac{E_0}{r^3}f_1\left(\frac{r}{r_0},\gamma\right) \quad \text{et} \quad I^0=\sqrt{\frac{\varrho_1 E_0}{r}}\,f_2\left(\frac{r}{r^0},\gamma\right), \tag{13.11}$$

où r est la distance de l'élément considéré au centre de l'explosion. Les fonctions f_1 et f_2 ne dépendent que du paramètre $r/r^0\left(r^0=\sqrt[3]{E_0/p_1}\right)$ et de γ. La pression au sein du gaz parfait étant indépendante de l'orientation de l'élément de surface considéré, la pression $p^0_{\max}$ est égale à la valeur de la pression derrière le front du saut au moment où celui-ci passe par cet élément. Pour une forte explosion $r/r^0\approx 0$ si bien que les fonctions f_1 et f_2 deviennent des constantes que l'on calcule facilement à l'aide de la solution établie au § 11*).

Ces constantes pour $\gamma=1{,}4$ ont pour valeur**) :

$$f_1=0{,}157, \quad f_2=0{,}486. \tag{13.12}$$

La figure 94 donne le graphique de la fonction $f_1(r/r^0,\gamma)(r^0/r)^3=p_{\max}/p_1$ pour $\gamma=1{,}4$.

En s'appuyant sur la solution décrite au § 12 pour l'explosion ponctuelle avec contre-pression on parvient à calculer la pression en fonction du temps pour chaque point de coordonnée r. Cette pression, qui est initialement toujours supérieure à la valeur initiale non perturbée p_1, devient inférieure à p_1 à partir d'un certain moment $\bar{t}$, puis atteint un minimum et, enfin, croît continûment jusqu'à la valeur p_1 (voir fig. 97).

---

*) L'analyse de la solution du problème de l'explosion au sein d'un milieu parfait biparamétrique arbitraire en fonction des paramètres définissant l'écoulement, ainsi que l'analyse de la possibilité d'adapter la solution aux autres valeurs des paramètres ont été faites par N. Kotchina et N. Melnikova (voir « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 138, n° 2, 1961).

**) L'impulsion I^0 est définie par la formule $I^0=\int_{t_0}^{\infty}(p-p_1)\,dt$; t_0 est le moment où l'onde de choc passe par le point considéré.

A chaque point nous associerons une impulsion positive d'après la formule

$$I^{+}=\int_{t_0}^{\bar{t}}(p-p_1)\,dt=\sqrt{\frac{\varrho_1 E_0}{r}}\,f_2^{+}\left(\frac{r}{r^0}\right) \tag{13.13}$$

et une impulsion négative d'après la formule

$$I^{-}=-\int_{t}^{\infty}(p-p_1)\,dt=\sqrt{\frac{\varrho_1 E_0}{r}}\,f_2^{-}\left(\frac{r}{r^0}\right).$$

La résolution numérique a fourni les fonctions $f_2^{+}(r/r^0)$ et $f_2^{-}(r/r^0)$. Les graphiques correspondants sont représentés à la figure 101. On voit que pour $r/r^0>0{,}3$ l'impulsion négative dépasse en valeur absolue l'impulsion positive.

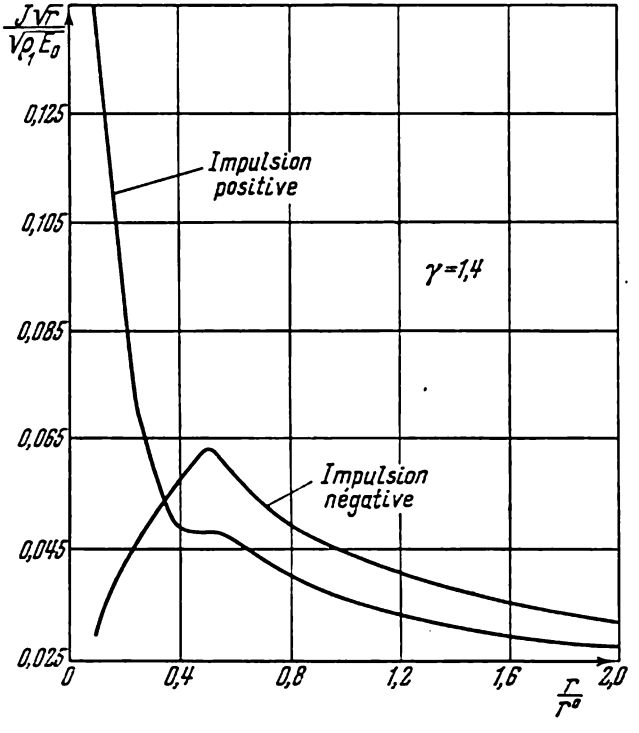


Fig. 101. Distribution des impulsions positives et négatives sommaires d'une explosion ponctuelle en fonction de la distance au centre d'explosion

Lorsque l'explosion se produit le long d'une droite — cas d'ondes cylindriques — la dimension de E_0 change, de sorte que les formules (13.11) sont remplacées par les formules

$$p^0_{\max}=\frac{E_0}{r^2}f_1\left(\frac{r}{r^0}\right) \quad \text{et} \quad I^0=\sqrt{\varrho_1 E_0}f_2\left(\frac{r}{r^0}\right), \quad r^0=\sqrt{\frac{E_0}{p_1}} \tag{13.14}$$

et pour une explosion le long d'un plan, par les formules

$$p^0_{\max}=\frac{E_0}{r}f_1\left(\frac{r}{r^0}\right) \quad \text{et} \quad I^0=\sqrt{\varrho_1 E_0 r}f_2\left(\frac{r}{r^0}\right), \quad r^0=\frac{E_0}{p_1}, \tag{13.15}$$

où r est respectivement la distance à la droite ou au plan d'explosion.

Si l'on définit l'impulsion I^0 pour une forte explosion par la formule

$$I^0=\int_{t_0}^{\infty} p\,dt=\int_{r_2=r_0}^{\infty} p\frac{dr_2}{c},$$

on obtient $I^0=\infty$ dans les cas plan et cylindrique. Ici les valeurs limites de I^0 s'obtiennent si l'on se sert de la définition

$$I^0=\int_{r}^{kr} p\frac{dr_2}{c},$$

où k est un nombre quelconque supérieur à l'unité.

§ 14. Problème de l'explosion forte dans un milieu de densité variable

La formulation, la méthode et la solution du problème de l'explosion forte peuvent facilement s'appliquer au cas où la densité initiale ϱ_1 dépend de la coordonnée initiale r_0 de la particule d'après la loi

$$\varrho_1=\frac{A}{r_0^{\omega}}, \tag{14.1}$$

où ω est une constante abstraite, positive ou négative, et A est une constante positive de dimension

$$[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}.$$

Si pour une explosion forte on néglige la pression initiale p_1 et si l'on suppose adiabatique l'écoulement du gaz parfait, la liste de paramètres de définition sera la suivante :

$$\omega,\ \gamma,\ A,\ E_0,\ r,\ t. \tag{14.2}$$

D'où il découle que l'écoulement gazeux perturbé correspondant est automodèle. Dans la suite il ne sera question que du cas de la symétrie sphérique, aussi la dimension de l'énergie caractéristique aura-t-elle pour expression

$$[E_0]=\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}.$$

Toutes les valeurs adimensionnées peuvent être considérées comme des fonctions des paramètres suivants :

$$\omega,\ \gamma,\ \lambda=\left(\frac{A\alpha}{E_0}\right)^{\frac{1}{5-\omega}}\frac{r}{t^{\frac{2}{5-\omega}}}, \tag{14.3}$$

où α est une constante que l'on peut choisir à volonté ($\delta=2/(5-\omega)$).

Il découle de la formulation du problème que pour les états de même phase ($\lambda=\text{const}$) et en particulier sur l'onde de choc sont vraies les relations

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\lambda_2=\text{const},\qquad r_2=\lambda_2\left(\frac{E_0}{A\alpha}\right)^{\frac{1}{5-\omega}}t^{\frac{2}{5-\omega}},\\&c=\frac{dr_2}{dt}=\frac{2}{5-\omega}\,\frac{r_2}{t}=\frac{2\lambda_2^{\frac{5-\omega}{2}}}{5-\omega}\sqrt{\frac{E_0}{A\alpha}}\,r_2^{\frac{\omega-3}{2}}.\end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

La constante α se détermine à partir de la condition $\lambda_2=1$ sur l'onde de choc. Ayant déterminé α de cette manière on s'aperçoit sans peine que λ répond à la formule

$$\lambda=\frac{r}{r_2}.$$

L'onde de choc se déplace en décélérant lorsque $\omega<3$ et en accélérant si $\omega>3$. Le cas de $\omega<3$ correspond à une masse finie contenue dans une sphère finie quelconque pourvue du centre de symétrie; pour $\omega\geq 3$ cette masse sera infiniment grande.

D'après la formule (14.4), l'onde de choc qui surgit à l'instant $t=0$ au voisinage du centre de symétrie, ne se propage vers la périphérie à une vitesse finie pour $t>0$ que si $\omega<5$. Par la suite nous adoptons $\omega<5$.

On a établi au § 5 que dans ce cas le problème se ramène à l'intégration de l'équation différentielle ordinaire (5.10).

L'analyse du champ des courbes intégrales construit pour divers ω (fig. 42 et 43) montre que le domaine de l'écoulement perturbé, tout comme dans le cas où $\varrho_1=\text{const}$, est séparé du domaine non perturbé par une onde sphérique se mouvant par les particules immobiles à une vitesse variable c donnée par les formules (14.4).

Compte tenu des formules (14.4) et (14.5), les conditions sur l'onde de choc forte (11.2) entraînent, en arrière du saut, les valeurs constantes de V, $\mathcal{R}$ et $z=\gamma P/\mathcal{R}$ suivantes

$$V_2=\frac{4}{(5-\omega)(\gamma+1)}=\frac{2\delta}{\gamma+1},\qquad \mathcal{R}_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\qquad z_2=\frac{8\gamma(\gamma-1)}{(5-\omega)^2(\gamma+1)^2}. \tag{14.5}$$

Comme on a vu au § 3, il y a dans ce cas l'intégrale d'énergie (3.11).

Ayant substitué les valeurs au front d'onde (14.5) dans le premier membre de l'intégrale d'énergie (3.11) on trouve que la constante du second membre

est nulle. D'où il vient que l'équation de la courbe intégrale passant par le point V_2, z_2 dans le plan z, V a la forme

$$z=\frac{(\gamma-1)V^2\left(V-\dfrac{2}{5-\omega}\right)}{2\left[\dfrac{2}{\gamma(5-\omega)}-V\right]}=\frac{(\gamma-1)V^2(V-\delta)}{2\left(\dfrac{\delta}{\gamma}-V\right)}. \tag{14.6}$$

Du point de vue physique il est clair que $z\geq 0$, de sorte que les valeurs admissibles de V sont situées sur le segment

$$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{2}{\gamma(5-\omega)}\leq V\leq\frac{2}{5-\omega}=\delta; \tag{14.7}$$

étant donné que $\gamma>1$, on a évidemment les inégalités

$$\frac{1}{\gamma}<\frac{2}{\gamma+1}<1,$$

c'est pourquoi la valeur V_2 d'après (14.5) tombe sur l'intervalle (14.7). Les extrémités de la courbe intégrale (14.6)

$$\left(z=0,\quad V=\frac{2}{5-\omega}\quad\text{et}\quad z=\infty,\quad V=\frac{1}{\gamma}\,\frac{2}{5-\omega}\right)$$

sont les points singuliers de l'équation différentielle (5.10).

On vérifie également sans peine que le point singulier*) $\mathcal{E}$ de coordonnées

$$\frac{2}{3\gamma-1}=V^*,\qquad \frac{2(\gamma-1)\left(\dfrac{2}{3\gamma-1}-\delta\right)}{(3\gamma-1)^2\left(\dfrac{\delta}{\gamma}-\dfrac{2}{3\gamma-1}\right)}=z^*,$$

appartenant à la courbe intégrale (14.6) pour $\gamma=1{,}4$ ou $\gamma=\frac{5}{3}$ et lorsque ω est voisin de zéro, se situe en dehors de l'intervalle (14.7). Lorsque $\omega=6-3\gamma$, ce point singulier coïncide avec l'extrémité droite de l'intervalle (14.7); l'augmentation ultérieure de ω le fait monter le long de la courbe intégrale (14.6). Lorsque ω prend une valeur déterminée à partir de l'équation

$$\frac{4}{(5-\omega)(\gamma+1)}=\frac{2}{3\gamma-1}\quad\text{soit}\quad \omega=\frac{7-\gamma}{\gamma+1} \tag{14.8}$$

$\left(\text{pour } \gamma=1{,}4,\ \omega=7,\ \text{pour } \gamma=\frac{5}{3},\ \omega=2\right)$, le point singulier en question coïncide avec les valeurs V_2, z_2 en arrière du front du saut.

Il est aisé de voir qu'au point singulier V^*, z^* pour tout ω correspond une solution exacte simple du système d'équations différentielles ordinaires (2.1) à (2.3) :

$$V=V^*=\text{const},\quad z=z^*=\text{const},\quad \mathcal{R}=B\lambda^{\frac{(\omega-3)V^*}{V^*-\delta}},\quad P=B\frac{z^*}{\gamma}\lambda^{\frac{(\omega-3)V^*}{V^*-\delta}}, \tag{14.9}$$

*) Voir § 5 et fig. 43.

à laquelle s'associe la solution exacte des équations aux dérivées partielles en variables dimensionnées

$$v=V^*\frac{r}{t},\quad \varrho=\frac{AB}{r^\omega}\lambda^{\frac{(\omega-3)V^*}{(V^*-\delta)}},\quad p=\frac{ABz^*}{\gamma r^{\omega-2}t^2}\lambda^{\frac{(\omega-3)V^*}{V^*-\delta}}. \tag{14.10}$$

Ici B est une constante arbitraire. Les formules (14.10) sont solution du problème*) de l'explosion forte pour

$$\omega=\frac{7-\gamma}{\gamma+1}.$$

En déterminant la constante B à partir des conditions sur l'onde de choc on obtient

$$v=\frac{2}{3\gamma-1}\frac{r}{t},\quad \varrho=\frac{A(\gamma+1)}{r^\omega(\gamma-1)}\lambda^{\frac{8}{\gamma+1}},\quad p=\frac{A}{r^{\omega-2}t^2}\frac{2(\gamma+1)}{(3\gamma-1)^2}\lambda^{\frac{8}{\gamma+1}}$$

ou, en rapportant la vitesse, la densité et la pression à leurs valeurs respectives en arrière de l'onde de choc, on trouve

$$\frac{v}{v_2}=\lambda,\quad \frac{\varrho}{\varrho_2}=\lambda,\quad \frac{p}{p_2}=\lambda^3. \tag{14.11}$$

On voit que dans ce cas l'écoulement se prolonge jusqu'au centre de symétrie et que la densité et la pression y sont nulles.

Il est aisé de voir que la dérivée $d\,\mathrm{Log}\,\lambda/dV$ au point V_2, z_2 change de signe lorsque ω varie et lorsque le point V^*, z^* dans son mouvement le long de la courbe intégrale (14.6) passe par ce point V_2, z_2. D'où il découle que si l'on se déplace de l'onde de choc vers le centre de symétrie (λ diminue), il faut monter le long de la courbe intégrale (14.6) si $V_2<V^*$ et descendre si $V_2>V^*$ (voir fig. 43). Dans le premier cas, à l'approche du point singulier $V=2/\gamma(5-\omega)$, $z=\infty$, le paramètre λ tend vers zéro et le déplacement est possible jusqu'au centre de symétrie; dans le second cas il faut descendre la courbe intégrale vers le point singulier $V=2/(5-\omega)$, $z=0$ où le paramètre λ prend une valeur finie**).

On établit aisément la relation entre la combinaison $\frac{p}{\varrho^\gamma}$, liée à l'entropie, et la coordonnée initiale r_0. A partir des conditions sur l'onde de choc (11.2) et de la formule (14.4) on obtient

$$\frac{p}{\varrho^\gamma}=\frac{2(\gamma-1)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\varrho_1^{1-\gamma},\quad c^2=\frac{8(\gamma-1)^\gamma A^{-\gamma}E_0}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(5-\omega)^2\alpha}r_0^{\gamma\omega-3}. \tag{14.12}$$

La relation (14.12) servira à définir r_0/r_2 en fonction de la variable paramétrique V.

---

*) La relation analogue entre ω et γ pour les ondes cylindriques pour $\nu=2$ est de la forme $\omega=\frac{4}{\gamma+1}$ et $\omega=1$ pour les ondes planes pour $\nu=1$ et si $\gamma\neq-1$.

**) Les formules (14.14), (14.15) qui sont solution du problème le font voir directement.

Il paraît intéressant de noter qu'à mesure que l'onde de choc se propage par les particules, l'entropie des particules derrière le front du saut diminue si $\omega<3/\gamma$, demeure constante lorsque $\omega=3/\gamma$ et croît lorsque $\omega>3/\gamma$.

Dans l'intervalle

$$\frac{3}{\gamma}<\omega<3$$

l'onde de choc ralentit tandis que l'entropie derrière le front d'onde augmente. En effet, malgré l'amortissement de l'onde de choc et la chute de pression derrière le front de l'onde, la densité tombe si rapidement que l'entropie augmente. En outre, si

$$\frac{3}{\gamma}<\omega\leq\frac{7-\gamma}{\gamma+1},$$

l'écoulement perturbé du gaz occupe tout l'intérieur de la sphère de l'onde de choc, jusqu'au centre de symétrie; mais si

$$\frac{7-\gamma}{\gamma+1}<\omega<3,$$

il se forme le vide au voisinage du centre d'explosion.

Voyons comment varie la température T_2 derrière le front de l'onde de choc. En tenant compte des conditions au saut (11.2) on a

$$RT_2=\frac{p_2}{\varrho_2}=\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}c^2. \tag{14.13}$$

Ici R est la constante des gaz. La température T_2 étant proportionnelle à c^2, la température en arrière du front du saut pour les écoulements gazeux considérés ne peut croître que lorsque c^2 croît, i.e. lorsque $\omega>3$.

En se servant de l'intégrale (14.6) de l'équation (5.10) l'on parvient à déterminer, à partir des équations (5.11) et (5.12), $\lambda(V)$ et $\mathcal{R}(V)$ par une quadrature simple, ce qui permet d'obtenir la solution complète du problème envisagé sous une forme fermée simple.

Cette solution est donnée par les formules

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r}{r_2}&=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-\frac{2}{5-\omega}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma(5-\omega)}{2}V-1\right)\right]^{-\alpha_2}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\right]^{-\alpha_1},\\
\frac{r_0}{r_2}&=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-\frac{2}{5-\omega}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma(5-\omega)}{2}V-1\right)\right]^{\alpha_6}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\right]^{\alpha_7}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{5-\omega}{2}V\right)\right]^{-\left(\alpha_6+\alpha_7-\frac{2}{5-\omega}\right)},
\end{aligned}\right\} \tag{14.14}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{v}{v_2}=f=\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\frac{r}{r_2},\\
&\frac{\varrho}{\varrho_2}=g=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{\frac{2\omega}{5-\omega}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{5-\omega}{2}V\right)\right]^{\alpha_3}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma(5-\omega)}{2}V-1\right)\right]^{\alpha_3+\omega\alpha_2}\times\\
&\qquad\qquad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\right]^{\alpha_4+\omega\alpha_1},\\
&\frac{p}{p_2}=h=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{\frac{6}{5-\omega}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{5-\omega}{2}V\right)\right]^{\alpha_5+1}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\right]^{\alpha_4+\alpha_1(\omega-2)},\\
&\frac{T}{T_2}=\frac{p}{p_2}\,\frac{\varrho_2}{\varrho},
\end{aligned}\right\}\qquad(14.14)$$

où

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{(5-\omega)\gamma}{3\gamma-1}\left[\frac{2(6-3\gamma-\omega)}{\gamma(5-\omega)^2}-\alpha_2\right],\\
&\alpha_2=\frac{1-\gamma}{(2\gamma+1-\gamma\omega)},\qquad \alpha_3=\frac{-\omega+3}{(2\gamma+1-\gamma\omega)},\\
&\alpha_4=\frac{(5-\omega)(3-\omega)\alpha_1}{(6-3\gamma-\omega)},\qquad \alpha_5=\frac{\omega(1+\gamma)-6}{(6-3\gamma-\omega)},\\
&\alpha_6=\frac{\gamma}{(2\gamma+1-\gamma\omega)},\qquad \alpha_7=\frac{(3\gamma-1)\alpha_1}{(6-3\gamma-\omega)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.15)$$

Les formules (14.14) donnent la solution complète dans les descriptions eulérienne et lagrangienne. Ces formules montrent que la distribution des caractéristiques adimensionnées du mouvement est la même pour les différentes valeurs de l'énergie d'explosion E_0.

On peut conférer aux formules (14.14) et (14.15) exprimant la solution complète du problème de l'explosion forte une autre forme plus maniable pour le calcul des caractéristiques du mouvement qui nous intéressent pour certaines valeurs spéciales des paramètres γ et ω_i ($i=1, 2, 3$) :

$$\omega_1=\frac{7-\gamma}{\gamma+1},\qquad \omega_2=\frac{2(\gamma-1)+3}{\gamma},\qquad \omega_3=3(2-\gamma),$$

pour lesquelles les coefficients des secondes membres des formules (14.14) ou les exposants α_j ($j=1, 2, \ldots, 7$) deviennent infinis.

Dans le premier cas où $\omega=\omega_1$, la solution du problème a été analysée plus haut; elle est donnée par les formules (14.11). Etablissons la forme de la solution dans les deux autres cas lorsque $\omega=\omega_2$ (pour $\omega=\omega_2$ les exposants α_1, α_2, α_3, α_6 deviennent infinis) et lorsque $\omega=\omega_3$ (pour $\omega=\omega_3$ les exposants α_4, α_5, α_7 deviennent infinis). On peut procéder soit par le passage à la limite

dans la solution (14.14) lorsque $\omega \to \omega_i$ ($i=2$, 3), soit trouver la solution directement à partir du système d'équations différentielles (5.10) et des conditions aux limites (14.5) où l'on effectue la substitution $\omega=\omega_i$, $\delta=\delta_i$ ($\delta_i=2/(5-\omega_i)$).

Les calculs*) donnent pour $\omega=\omega_2$

$$\frac{r}{r_2}=\left(\frac{(\gamma+1)(5-\omega_2)}{4}V\right)^{-\frac{2\gamma}{3\gamma-1}}\left[\frac{(\gamma+1)}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_2}V-1\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{3\gamma-1}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\gamma+1}{3\gamma-1}\,\frac{\frac{2\delta_2}{\gamma+1}-V}{V-\frac{\delta_2}{\gamma}}\right],$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_2}=\left(\frac{(\gamma+1)(5-\omega_2)}{4}V\right)^{\frac{2(1+2\gamma)}{3\gamma-1}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{V}{\delta_2}\right)\right]^{\frac{1-2\gamma}{3\gamma-1}}\times$$

$$\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_2}V-1\right)\right]^{\frac{1-2\gamma}{3\gamma-1}}\exp\frac{2(\gamma+1)}{1-3\gamma}\,\frac{\frac{2\delta_2}{\gamma+1}-V}{V-\frac{\delta_2}{\gamma}},$$

$$\frac{p}{p_2}=\left(\frac{(\gamma+1)(5-\omega_2)}{4}V\right)^{\frac{6\gamma}{3\gamma-1}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{V}{\delta_2}-1\right)\right]^{\frac{\gamma}{3\gamma-1}}\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma V}{\delta_2}-1\right)\right]^{-\frac{3\gamma}{3\gamma-1}}.$$

On trouve le rapport r_0/r_2 en fonction de V à partir des relations (14.12), les formules de v/v_2 découlent de (14.14). Dans le troisième cas singulier, celui où $\omega=\omega_3$, la solution pour les fonctions r/r_2, ϱ/ϱ_2, p/p_2 peut s'écrire ainsi

$$\frac{r}{r_2}=\left[\frac{(\gamma+1)(5-\omega_3)}{4}V\right]^{-\delta_3}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{V}{\delta_3}\right)\right]^{-\frac{\gamma}{3\gamma-1}}\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_3}V-1\right)\right]^{\frac{\delta_3}{2}},$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_2}=\left[\frac{(\gamma+1)(5-\omega_3)}{4}V\right]^{\frac{6(2-\gamma)}{3\gamma-1}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{V}{\delta_3}\right)\right]^{\frac{3\gamma-5}{3\gamma-1}}\times$$

$$\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_3}V-1\right)\right]^{\frac{3(\gamma-1)}{3\gamma-1}}\exp\left[-\frac{3\gamma(\gamma+1)}{3\gamma-1}\,\frac{\frac{2\delta_3}{\gamma+1}-V}{\delta_3-V}\right],$$

$$\frac{p}{p_2}=\left[\frac{(\gamma+1)(5-\omega_3)}{4}V\right]^{\frac{6}{3\gamma-1}}\left[\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{1}{\delta_3}V\right)\right)\right]^{\frac{2(2\gamma-3)}{3\gamma-1}}\exp\left[-\frac{3\gamma(\gamma+1)}{3\gamma-1}\,\frac{\frac{2\delta_3}{\gamma+1}-V}{\delta_3-V}\right].$$

Les figures 102, 103 et 104 représentent les courbes $v/v_2=f(\lambda, \omega)$, $\varrho/\varrho_2=g(\lambda, \omega)$, $p/p_2=h(\lambda, \omega)$ pour $\gamma=1{,}4$ et pour $\omega=2$, 1, 0, -1, -2 et $\omega=\frac{7}{3}$;

*) Pour la déduction des formules décrivant la solution pour $\omega=\omega_i$ voir le livre de V. Korobeïnikov, N. Melnikova, E. Riazanov, *Théorie de l'explosion ponctuelle* (en russe). Physmatguiz, Moscou, 1961, et l'article de V. Korobeïnikov, E. Riazanov, t. 29, op. 2, 1959.

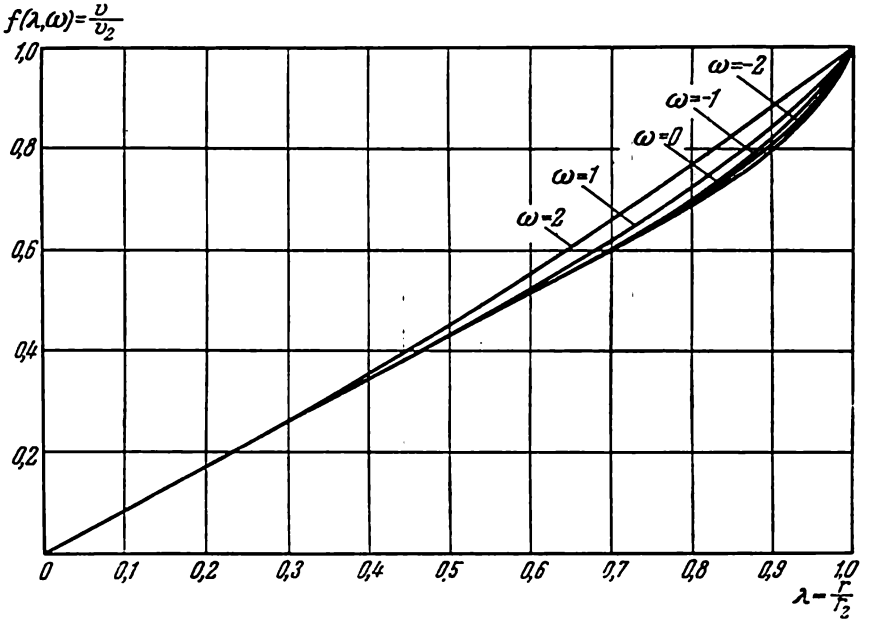


Fig. 102. Champ des vitesses lors d'une explosion ponctuelle dans un gaz de densité initiale variable donnée par $\varrho_1=A/r_0^{\omega}$, $\gamma=1{,}4$. Au cas où $\omega\leq\frac{7}{3}$ l'écoulement se prolonge jusqu'au centre de symétrie

dans tous ces cas l'écoulement gazeux se prolonge jusqu'au centre de symétrie.

Les figures 105, 106, 107 représentent les courbes des mêmes grandeurs pour $\omega=\frac{7}{3}$, 2,5, 3, 3,5, $\gamma=\frac{7}{5}$ et pour $\omega=2$, 2,5, 3, 3,5, $\gamma=\frac{5}{3}$; dans les trois derniers cas à chaque γ correspond, au voisinage du centre, un vide (domaine où sont absentes les masses dont on considère le mouvement).

Pour $\omega<(7-\gamma)/(\gamma+1)$ au voisinage du centre d'explosion on a les formules asymptotiques suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{v}{v_2}=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{r}{r_2},\\
&\frac{p}{p_2}=\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{\frac{6}{5-\omega}}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{\alpha_6+1}\left(\frac{\omega-\dfrac{2\gamma+1}{\gamma}}{\omega-\dfrac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\alpha_4+\alpha_1(\omega-2)},\\
&\frac{\varrho}{\varrho_2}=\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-\omega}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{\alpha_5}\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{-\frac{2}{5-\omega}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}\left(\frac{\omega-\dfrac{2\gamma+1}{2}}{\omega-\dfrac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\alpha_4-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\alpha_3}.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.16)$$

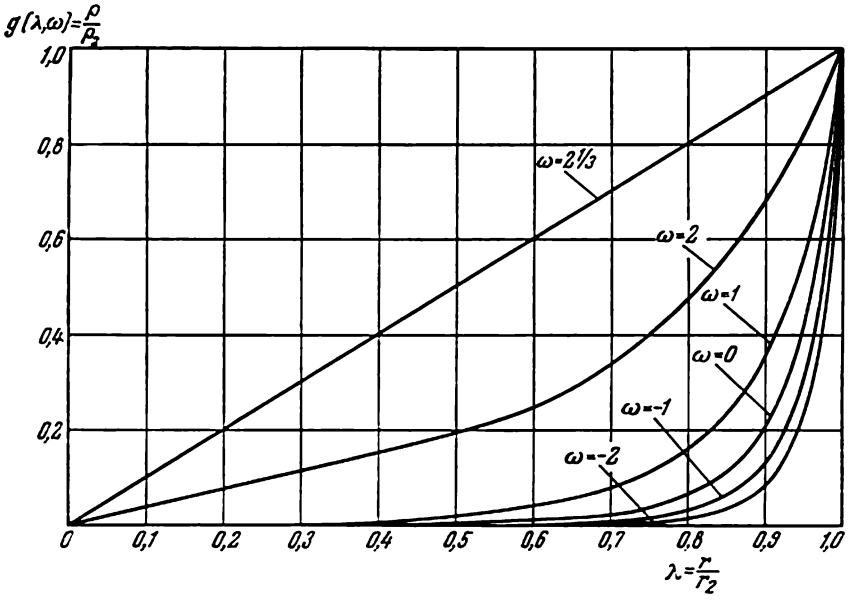


Fig. 103. Champ des densités lors d'une explosion ponctuelle dans un gaz de densité initiale variable donnée par $\varrho_1 = A/r_0^{\omega}$, $\gamma = 1{,}4$. Au cas où $\omega = \frac{7}{3}$ l'écoulement se prolonge jusqu'au centre de symétrie

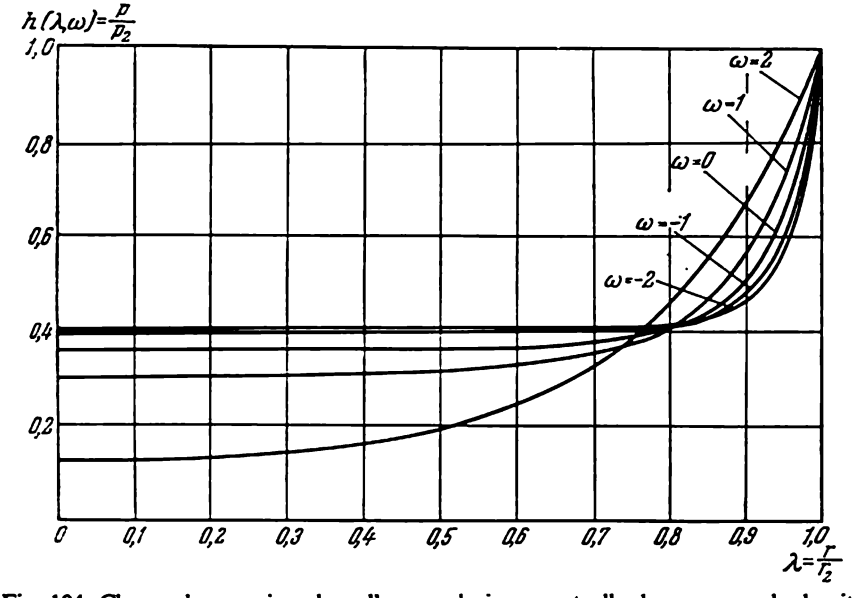


Fig. 104. Champ des pressions lors d'une explosion ponctuelle dans un gaz de densité initiale variable donnée par $\varrho_1 = A/r_0^{\omega}$, $\gamma = 1{,}4$. Au cas où $\omega = \frac{7}{3}$ l'écoulement se prolonge jusqu'au centre de symétrie

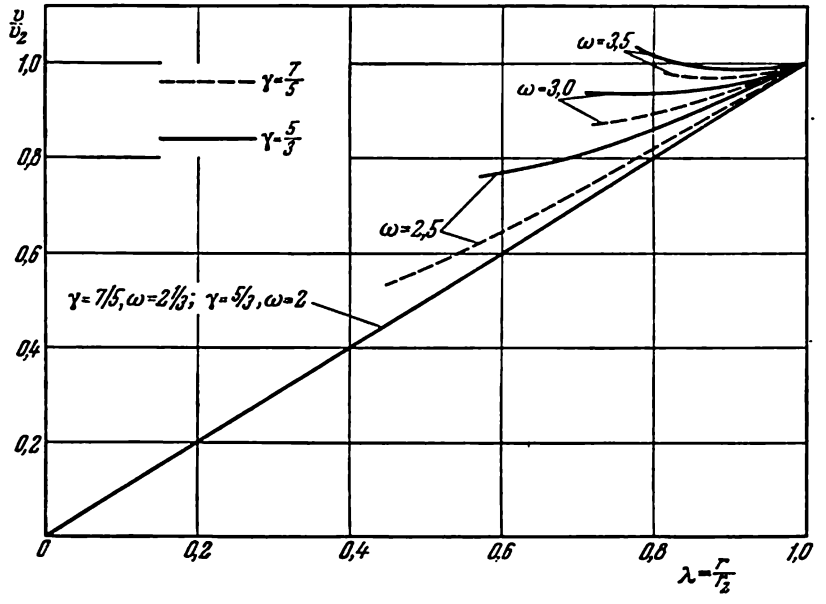


Fig. 105. Champ des vitesses lors d'une explosion ponctuelle dans un gaz de densité initiale variable donnée par $\varrho_1=A/r_0^{\omega}$; $\omega \simeq \frac{7}{3}$ pour $\gamma=\frac{7}{5}$ et $\omega \simeq 2$ pour $\gamma=\frac{5}{3}$

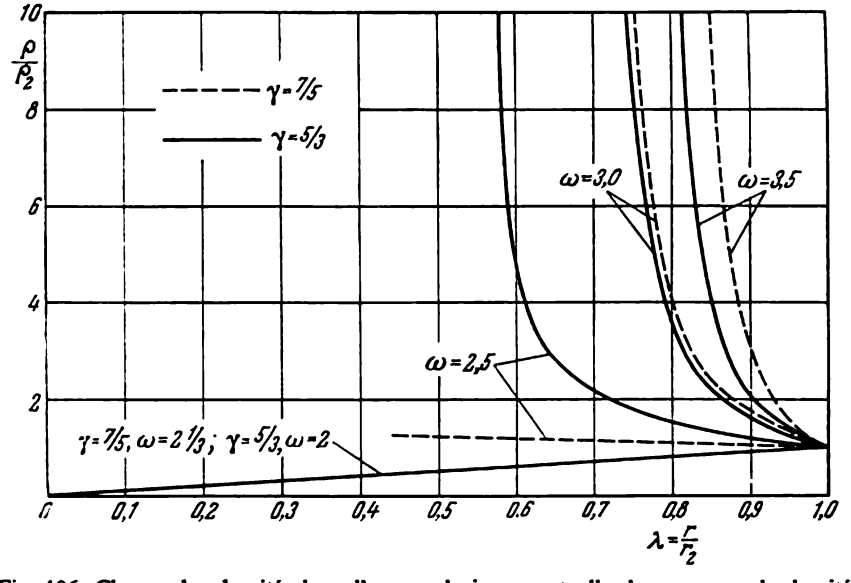


Fig. 106. Champ des densités lors d'une explosion ponctuelle dans un gaz de densité initiale variable donnée par $\varrho_1=A/r_0^{\omega}$; $\omega \simeq \frac{7}{3}$ pour $\gamma=1,4$ et $\omega \simeq 2$ pour $\gamma=\frac{5}{3}$

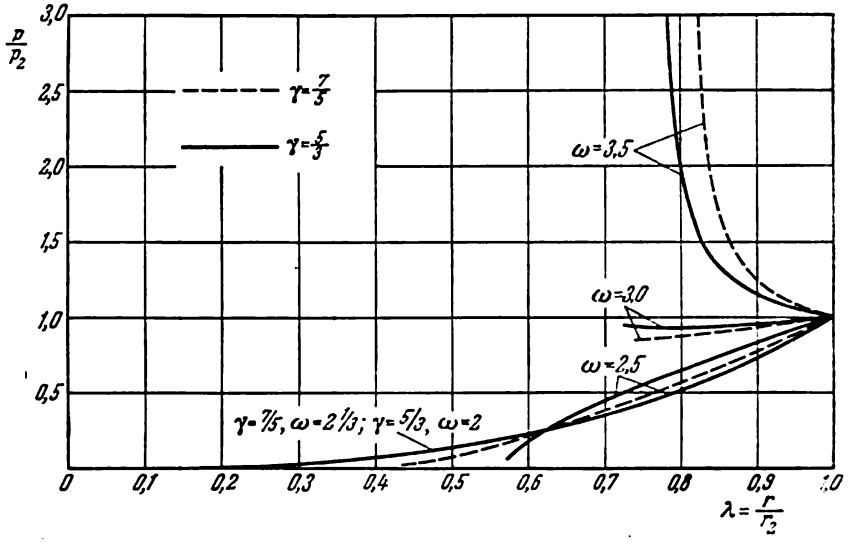


Fig. 107. Champ des pressions lors d'une explosion ponctuelle dans un gaz de densité initiale variable donnée par $\varrho_1=A/r_0^{\omega}$; $\omega\geq\frac{7}{3}$ pour $\gamma=1,4$ et $\omega\geq 2$ pour $\gamma=\frac{5}{3}$

Il découle de la formule (14.16) que si $\omega<3/\gamma$, la densité tend rapidement vers zéro lorsque $r\to 0$ et la pression n'est pas nulle; mais lorsque $\omega\to\to(7-\gamma)/(\gamma+1)$, la pression au centre tend vers zéro. Pour $\omega==(7-\gamma)/(\gamma+1)$ les formules asymptotiques et exactes coïncident (égalités (14.11)).

Lorsque $\omega>(7-\gamma)/(\gamma+1)$, au centre d'explosion se forme un vide en dilatation à la frontière duquel $V=2/(5-\omega)$, et on a les formules asymptotiques suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{v_2}&=\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{r^*}{r_2},\\ \frac{\varrho}{\varrho_2}&=A\left(\frac{r}{r_2}-\frac{r^*}{r_2}\right)^{\alpha_5},\\ \frac{p}{p_2}&=B\left(\frac{r}{r_2}-\frac{r^*}{r_2}\right)^{\alpha_5+1},\end{aligned}\right\}\qquad(14.17)$$

où

$$\frac{r^*}{r_2}=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{2}{5-\omega}}(\gamma+1)^{-\alpha_2}\left(\frac{3\gamma+\omega-6}{\omega-\frac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{-\alpha_1},$$

$$A=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2\omega}{5-\omega}}(\gamma+1)^{\alpha_3+\omega\alpha_2}\left(\frac{3\gamma+\omega-6}{\omega-\frac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\alpha_4+\omega\alpha_1}\left[\frac{\gamma(1-\gamma)}{(\gamma+1)(3\gamma+\omega-6)}\right]^{-\alpha_5}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^{-\alpha_5},$$

$$B=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{6}{5-\omega}}\left(\frac{3\gamma+\omega-6}{\omega-\frac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\alpha_4+\alpha_3(\omega-2)}\left[\frac{\gamma(1-\gamma)}{(\gamma+1)(3\gamma+\omega-6)}\right]^{-(\alpha_5+1)}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^{-(\alpha_5+1)},$$

et α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 sont déterminés d'après les formules (14.15); ici r^* est le rayon pour $V=2/(5-\omega)$; à l'intérieur de la sphère correspondante de rayon r^* il y a le vide. Le rapport r^*/r_2 en fonction de ω est représenté à la figure 108.

Lorsque $\omega<3$, la pression est nulle pour $r=r^*$; la densité est nulle pour $\omega<6/(1+\gamma)$ et infinie pour $\omega>6/(1+\gamma)$. Pour $\omega>3$ la pression à la frontière intérieure est infinie.

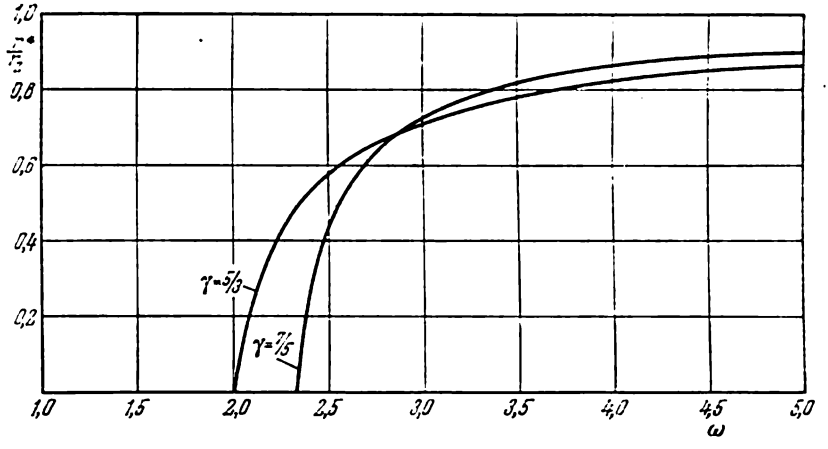


Fig. 108. Rapport r^*/r_2 en fonction de l'exposant ω pour un gaz de densité initiale variable donnée par $\varrho_1=A/r_0^{\omega}$ pour $\gamma=\frac{7}{5}$ et $\gamma=\frac{5}{3}$. r^* est le rayon de la frontière intérieure sphérique; r_2 le rayon de l'onde de choc sphérique

Il découle de ces formules asymptotiques que l'énergie de l'écoulement perturbé est finie pour $\omega<3$. De même il est clair que pour $\omega>3$ l'énergie de l'écoulement perturbé est infinie, car la pression pour $r=r^*$ est constamment infinie, donc le travail communiqué au gaz sur cette frontière est infini*).

*) La solution exacte du problème de l'explosion dans le cas où la densité initiale est répartie suivant une loi spéciale est trouvée par V. Korobeïnikov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 117, n° 6, 1957.

§ 15. L'écoulement non stationnaire du gaz au cas où les vitesses sont proportionnelles à la distance au centre de symétrie*)

Considérons les écoulements non stationnaires adiabatiques d'un gaz parfait dans les cas de symétries sphérique, cylindrique et plane ($\nu=1, 2, 3$) avec la distribution de la vitesse de la forme**)

$$v=r\Phi(t), \tag{15.1}$$

où r est la distance au centre de symétrie.

La formule (15.1) est vraie pour les écoulements automodèles si les dimensions indépendantes des constantes de définition sont de la forme

$$[a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s \quad \text{et} \quad [b]=\mathrm{T} \quad (m=0)$$

et donc la variable $\lambda=t/b$. En général, pour a et b arbitraires, il existe, parmi les mouvements automodèles correspondants, des solutions particulières du type (15.1). En particulier, les solutions correspondant à $V=V^*=\text{const}$ ont la forme (15.1) :

$$v=\frac{r}{t}V^*. \tag{15.2}$$

On en conclut que les solutions particulières associées aux points singuliers du plan z, V avec z^* et V^* constants appartiennent au type considéré.

Rappelons que la solution du problème de la propagation d'une onde de détonation dans un milieu de densité variable $\varrho_1=A/r^\omega$ pour

$$\omega=\frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1}$$

(formules (8.4)), la solution du problème de l'explosion ponctuelle forte pour $\varrho_1=\text{const}$ et $\gamma=7$ (formules (11.21)) ainsi que la solution du problème de l'explosion ponctuelle forte dans un milieu de densité initiale variable pour $\omega=(7-\gamma)/(\gamma+1)$ (formules (14.11)) sont caractérisées par des distributions de la vitesse de la forme (15.1).

Notons que dans tous les problèmes mentionnés la solution de la forme (15.1) est une solution limite séparant les solutions qui se prolongent jusqu'au centre de symétrie de celles caractérisées par la formation du vide en expansion au voisinage du centre de symétrie.

Si l'on fait abstraction des forces de l'attraction newtonienne, alors en vertu de la formule (15.1) pour les écoulements adiabatiques d'un gaz parfait

---

*) Les formules de cette solution ont été publiées pour la première fois dans notre article *Sur l'intégration des équations de l'écoulement unidimensionnel du gaz*, « Doclady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. XC, n° 5, 1953, p. 753. La classification et une analyse détaillée de ces écoulements sont entrées dans la troisième édition russe de 1954 du présent livre.

**) On déduit des équations du mouvement que l'hypothèse $v=f_1(r)f_2(t)$, à condition que $f_2\neq\text{const}$, conduit à la formule (15.1).

on établit aisément à partir des équations (1.3) que la solution du type cherché est représentée par les formules

$$\left.\begin{aligned} dt &= \pm\frac{d\mu}{\mu^2[A+B\mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}}, \\ v &= \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}r = \mp\mu[A+B\mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}r, \\ \varrho &= \frac{\mu^{\nu-1}}{r}\varphi'(\mu r), \\ p &= \mu^{\gamma\nu}\left\{C+\frac{(\gamma-1)\nu}{2}B\varphi(\mu r)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

où A, B et C sont des constantes arbitraires, $\varphi(\mu r)$ une fonction arbitraire de son argument. On peut sans restreindre la généralité supposer positive la fonction $\mu(t)$.

Ainsi donc les formules (15.3) sont solution exacte des équations (1.3), solution qui dépend d'une fonction arbitraire $\varphi(\mu r)$ et des trois constantes arbitraires A, B, C.

La densité ϱ étant positive, la fonction $\varphi'(\mu r)$ doit satisfaire à la condition

$$\varphi'(\mu r)>0.$$

Il découle des formules (15.3) que

$$\frac{p}{\varrho^\gamma}=\Phi(r\mu)=\frac{\left[C+\frac{\gamma-1}{2}\nu B\varphi(\mu r)\right](\mu r)^\gamma}{\varphi'^\gamma(\mu r)}. \tag{15.4}$$

L'entropie dans la particule étant constante, on a pour la solution établie

$$r=\frac{F(\xi)}{\mu(t)},$$

où ξ est une coordonnée lagrangienne. La fonction $\mu(t)$ se trouve à partir de la première équation (15.3); cette fonction détermine complètement, pour différents A et B, la loi de mouvement de toutes les particules gazeuses.

Désignons par ξ la coordonnée r des particules gazeuses à un certain instant t_0 tel que $\mu(t_0)=\mu_0$. On aura évidemment l'égalité

$$F(\xi)=\mu_0\xi$$

et, par conséquent, la loi du mouvement de diverses particules gazeuses peut s'écrire sous la forme

$$r=\frac{\mu_0}{\mu(t)}\xi; \qquad v=\frac{dr}{dt}=-\frac{\mu_0\mu'(t)}{\mu^2(t)}\xi. \tag{15.5}$$

La formule (15.5) s'obtient également directement de la seconde égalité (15.3).

Il suit de (15.4) que la fonction arbitraire $\varphi(\mu r)$ est en rapport direct avec la loi de distribution de l'entropie suivant les particules gazeuses.

Il découle des deux dernières formules (15.3) que la pression et la densité sont à tout instant liées par la formule

$$\frac{\partial p}{\partial r}=B\,\frac{\gamma-1}{2}\,\nu\mu^{\nu(\gamma-1)+2}r\varrho. \tag{15.6}$$

Le gradient de la pression dans une particule et en un point donné de l'espace dépend du temps par l'intermédiaire de μ. Pour $B>0$ la pression croît avec r, pour $B<0$ diminue à mesure qu'on s'éloigne vers la périphérie.

Pour la fonction $r(t)$ trois cas caractéristiques sont possibles :

I. $A>0$, $B>0$ } la pression croît à mesure qu'on s'éloigne du centre
II. $A<0$, $B>0$ } de symétrie;
III. $A>0$, $B<0$ — la pression décroît à mesure qu'on s'éloigne du centre de symétrie.

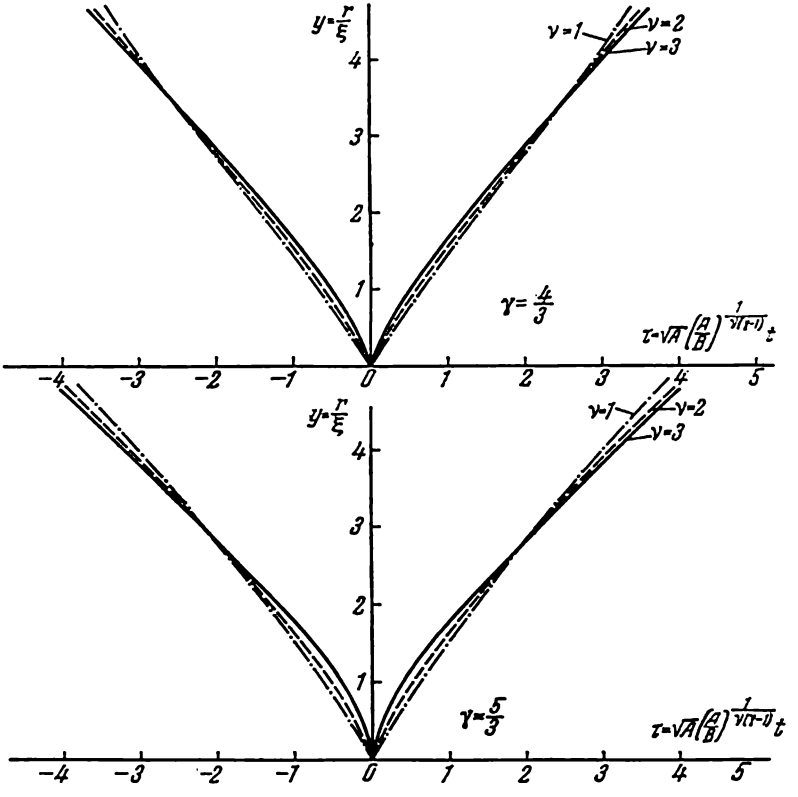


Fig. 109. Loi du mouvement des particules gazeuses au cas I, $A>0$ et $B>0$. Pour $t<0$ les particules convergent vers le centre; pour $t>0$ elles s'écartent du centre vers l'infini

Dans le cas I on peut écrire la première formule (15.3) et la formule (15.5) comme suit :

$$\left.\begin{aligned} \tau=\sqrt{A}\mu_0 t=\mp\int_0^y \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1+y^{\nu(\gamma-1)}}}\,dy, \\ y=\frac{\mu_0}{\mu}=\frac{r}{\xi}, \quad \text{où} \quad \mu_0=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{15.7}$$

Ces formules montrent que les courbes universelles $y(\tau)$ pour différents ν (fig. 109) permettent d'établir aisément la loi du mouvement de chaque particule gazeuse quels que soient $A>0$ et $B>0$.

A l'instant $\tau=t=0$ toutes les particules gazeuses se concentrent au centre de symétrie, lorsque t croît, elles se dispersent à une vitesse initiale infiniment grande. Pour $y=1$ la coordonnée r des différentes particules est égale à ξ. L'instant correspondant se déduit de la relation

$$\tau=\int_0^1 \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1+y^{\nu(\gamma-1)}}}\,dy.$$

Lorsque $\tau\to\infty$, on a $y\to\infty$ et $\mu\to 0$, la vitesse de chaque particule tendant à la limite vers une valeur finie.

Comme $\left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau\to\infty}=1$, $\frac{dr}{dt}=\xi\sqrt{A}\mu_0$.

Comme pour chaque particule $r\mu=\text{const}$, il est évident que la densité et la pression sont infinies pour $t=0$ et $\mu=\infty$ et tendent vers zéro pour $t\to\infty$ lorsque $\mu\to 0$.

Dans le cas II la première formule (15.3) et la formule (15.5) prennent une forme analogue

$$\left.\begin{aligned} \tau=\sqrt{|A|}\,\mu t=\mp\int_0^y \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1-y^{\nu(\gamma-1)}}}\,dy, \\ y=\frac{\mu_0}{\mu}=\frac{r}{\xi}, \quad \text{où} \quad \mu_0=\left(\frac{|A|}{B}\right)^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

Les courbes universelles correspondantes pour divers ν sont représentées à la figure 110. Au voisinage de l'instant $t=0$ les cas I et II se confondent.

Puis, par suite de l'écart des particules, à la différence du cas I la coordonnée r atteint sa valeur maximale égale à ξ ($y=1$). Ceci a lieu simultanément pour toutes les particules à l'instant τ^* donné par la formule

$$\tau^*=\sqrt{|A|}\,\mu_0 t^*=\int_0^1 \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1-y^{\nu(\gamma-1)}}}\,dy.$$

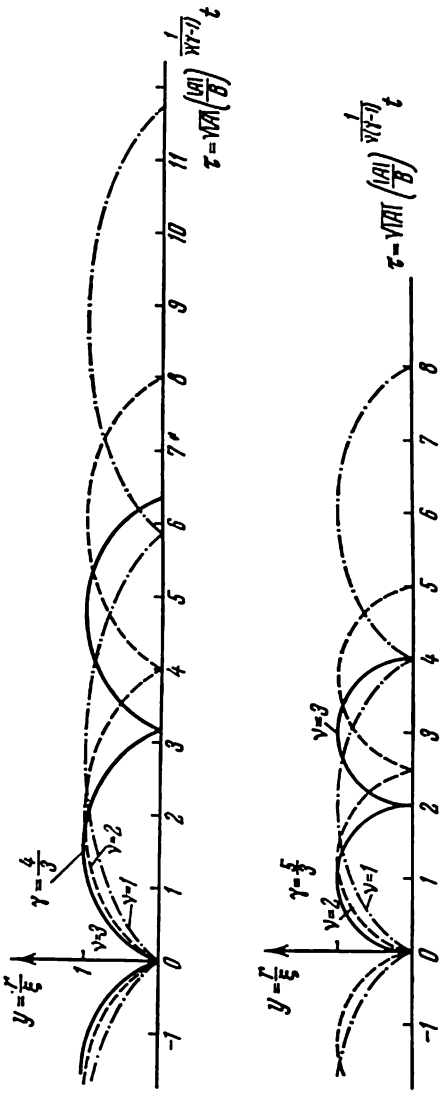


Fig. 110. Loi du mouvement des particules gazeuses au cas II, $A<0$ et $B>0$. A partir du moment $t=0$ les particules commencent à s'éloigner du centre, puis elles s'arrêtent à une distance finie et convergent ensuite vers le centre

A l'instant τ^* toutes les particules s'immobilisent et à l'instant suivant il se crée sous l'influence du gradient de pression un écoulement de reflux dirigé vers le centre ce qui ramène simultanément toutes les particules au centre de symétrie, à l'instant $2\tau^*$.

On peut s'attendre à ce que le processus se reproduise à des instants ultérieurs. On a alors un écoulement gazeux pulsatoire périodique.

Enfin, dans le cas III la première formule (15.3) et la formule (15.5) peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\tau=\sqrt{A}\left(\frac{A}{|B|}\right)^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}} t=\mp\int_1^y \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{y^{\nu(\gamma-1)}-1}}\,dy,\\ &y=\frac{\mu_0}{\mu}=\frac{r}{\xi}, \quad \text{où} \quad \mu_0=\left(\frac{A}{|B|}\right)^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}} \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$

Les courbes universelles correspondantes $y(\tau)$ pour différents ν sont représentées à la figure 111.

A l'instant $\tau=t=0$ on a $y=1$ et $d\mu/dt=0$. La coordonnée lagrangienne ξ représente la valeur des coordonnées r à cet instant, toutes les particules étant au repos à l'instant $t=0$. A $t<0$ toutes les particules se dirigeaient vers le centre de symétrie, à l'instant $t=0$ elles s'immobilisent et puis

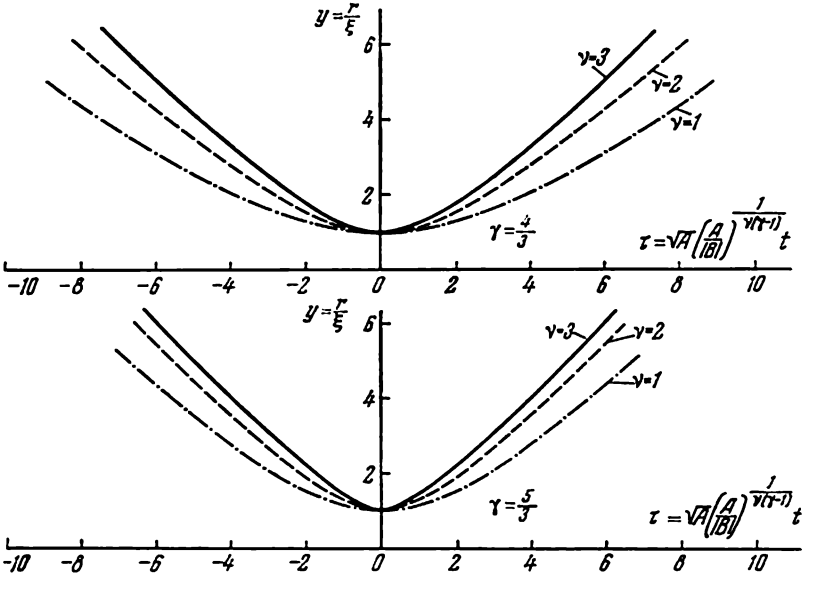


Fig. 111. Loi du mouvement des particules gazeuses au cas III, $A>0$ et $B<0$. Pour $t<0$ les particules se dirigent de l'infini vers le centre, à l'instant $t=0$ elles s'arrêtent à une distance finie du centre. Pour $t>0$ les particules s'éloignent vers l'infini

commencent à s'écarter. Dans les cas I et II on observe une divergence des particules qui se concentraient au centre de symétrie à $t=0$.

Dans le cas III on a une masse répartie de gaz au repos qui à l'instant $t=0$ se met à s'écarter du centre, car la pression, d'après (15.6), diminue à mesure que r croît.

Si sur une sphère quelconque pour $\nu=3$ (sur un cylindre pour $\nu=2$ et sur un plan pour $\nu=1$) l'accolade $\left\{C+\frac{(\gamma-1)\nu}{2}B\varphi(r\mu)\right\}$ s'annule, alors la pression sera toujours nulle sur cette sphère mobile composée des mêmes particules gazeuses. Une telle sphère doit être envisagée comme frontière extérieure avec le vide des particules de gaz contenues à l'intérieur de cette sphère et s'écartant du centre.

Ainsi donc, la solution établie permet de résoudre sous une forme analytique simple le problème de l'écart du gaz dans le vide lorsque les distributions initiales de la densité et de la pression sont liées par la formule (15.6)

Pour fixer les idées conférons à la fonction $\varphi(r\mu)$ la forme particulière suivante :

$$\varphi(r\mu)=\frac{\varrho_0}{\mu_0^\nu}\,\frac{(r\mu)^2}{2}.$$

Les distributions de la densité et de la pression s'expriment alors

$$\varrho=\varrho_0\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^\nu=\frac{\varrho_0}{y^\nu},$$

$$p=\left(C-A\varrho_0\mu_0^{-\nu\gamma}\frac{(\gamma-1)\nu}{4}(r\mu)^2\right)\mu^{\nu\gamma}.$$

La densité est donc indépendante de la coordonnée géométrique et diminue avec le temps. La pression est distribuée suivant une loi parabolique. Le rayon variable de la frontière sphérique avec le vide est défini par la formule

$$r^*=\sqrt{\frac{4C}{A\varrho_0\nu(\gamma-1)\mu_0^{-\nu\gamma}}}\,\frac{1}{\mu}.$$

Envisageons aussi les cas $A=0$ ou $B=0$. Si $A=0$ et $B>0$, alors

$$\mu=\left[\pm\sqrt{B}\,t\left(1+\frac{\nu(\gamma-1)}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{1+\frac{\nu(\gamma-1)}{2}}}=\mu_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}}. \qquad (15.10)$$

Par conséquent, $r\mu=\xi\mu_0$, $r=\xi(t/t_0)^{\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}}$, où μ_0 et t_0 sont des constantes. L'écoulement du gaz est automodèle et se rapporte au cas I. Pour $t_0>0$ les particules s'écartent, pour $t_0<0$ elles convergent vers le centre de symétrie. Si $B=0$ et $A>0$, alors

$$\mu=\mp\frac{1}{\sqrt{A}}\,\frac{1}{t}=\mu_0\frac{t_0}{t},\quad r\mu=\xi\mu_0,\quad r=\xi\frac{t}{t_0}. \qquad (15.11)$$

L'écoulement correspondant est également automodèle et appartient au type III, cependant dans ce cas pour $t=0$ toutes les particules gazeuses se tassent au centre de symétrie. Toutes les particules se déplacent à une vitesse constante égale à ξ/t_0.

Conformément aux formules (15.3) on a dans ce cas

$$p=c_{-1}\left(\frac{\mu_0 t_0}{t}\right)^{\gamma\nu}, \quad \varrho=\left(\frac{\mu_0 t_0}{t}\right)^{\nu}\Phi(\mu_0\xi). \tag{15.12}$$

La pression est uniforme dans tout l'espace et diminue avec le temps, la densité de chaque particule diminue en raison inverse de t^ν.

On peut établir des solutions exactes analogues à la solution (15.3)*) pour le problème de l'écoulement du gaz parfait compte tenu des forces d'attraction newtonienne entre les particules gazeuses. En posant $\gamma=\frac{4}{3}$ on obtient pour $\nu=3$ la solution suivante du système d'équations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) :

$$\left.\begin{aligned} &dt=\pm\frac{d\mu}{\mu^2(A+B\mu)^{1/2}},\\ &v=-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}r, \quad r=\frac{\xi}{\mu(t)},\\ &\varrho=\mu^3(t)\xi\Psi(\xi), \quad p=\mu^4(t)\Phi(\xi). \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

Pour $\gamma=\frac{4}{3}$ et $\nu=3$ les formules (15.13) et les formules (15.3) sont analogues, seule diffère la relation entre les fonctions $\Psi(\xi)$ et $\Phi(\xi)$ qui en présence de l'attraction a la forme

$$\frac{d\Phi}{d\xi}\xi+4\pi f\Psi(\xi)\int_0^\xi \eta^3\Psi(\eta)\,d\eta=\frac{B}{2}\xi^3\Psi(\xi), \tag{15.14}$$

où A et B sont des constantes arbitraires et $\Psi(\xi)$ une fonction arbitraire.

Naturellement, la solution (15.13) est une généralisation immédiate de la solution (15.3) analysée plus haut. La classification des solutions que nous avons donnée reste également valable dans ce cas. La présence de l'attraction n'altère pas le caractère qualitatif général de l'écoulement du gaz.

Avec γ quelconque il est facile d'indiquer pour les équations du mouvement tenant compte de la gravitation (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4), pour $\nu=3$, un écoulement automodèle dont la vitesse est une fonction linéaire du rayon**). C'est par exemple l'écoulement automodèle, qui ne dépend que de deux constantes dimensionnées indépendantes ayant la dimension de la constante gravitationnelle $[f]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$ entrant dans l'équation du

*) M. Lidov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 97, n° 3, 1954.

**) K. Stanukovitch, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 64, n° 4, 1949; voir également S. Rosseland, *The Pulsation Theory of Variable Stars*, Oxford, 1949.

mouvement et de la constante t_0, représentant un certain temps caractéristique. D'après les considérations générales, la solution doit avoir la forme

$$v=\frac{r}{t}V\left(\frac{t}{t_0}\right),\quad \varrho=\frac{1}{ft^2}\mathcal{R}\left(\frac{t}{t_0}\right),$$
$$p=\frac{r^2}{ft^4}P\left(\frac{t}{t_0}\right)\quad\text{et}\quad \mathcal{M}=\frac{r^3}{ft^2}M\left(\frac{t}{t_0}\right). \tag{15.15}$$

En substituant les formules (15.15) dans les équations du mouvement on a

$$\left.\begin{aligned} &v=-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\tau}\frac{r}{t_0},\quad \tau=\frac{t}{t_0},\\ &\varrho=\frac{1}{ft_0^2}\mu^3(\tau),\quad \mathcal{M}=\frac{4\pi r^3}{3ft_0^2}\mu^3(\tau),\\ &p=\varkappa\frac{r^2}{ft_0^4}\mu^{3\gamma+2}(\tau),\end{aligned}\right\} \tag{15.16}$$

où $\varkappa$ est une constante arbitraire et la fonction $\mu(\tau)$ est définie par la quadrature

$$\tau=\int\frac{d\mu}{\mu^2\sqrt{\chi+\frac{8\pi}{3}\mu+\frac{4\varkappa}{3(\gamma-1)}\mu^{3(\gamma-1)}}}; \tag{15.17}$$

ici χ est une constante arbitraire. La famille de solutions (15.16) dépend essentiellement de deux paramètres sans dimension, χ et $\varkappa$.

On voit sans peine que la famille de solutions (15.16) peut être élargie si l'on remplace dans les formules (15.16) la formule de la pression par une nouvelle formule

$$p=\varkappa\frac{r^2}{ft_0^4}\mu^{3\gamma+2}+\beta\frac{r_0^2}{ft_0^4}\mu^{3\gamma}, \tag{15.18}$$

où βr_0^2 est une nouvelle constante arbitraire ayant la dimension du carré de la distance. En effet, la pression entre dans l'équation des impulsions et dans l'équation d'adiabacité. Comme le terme supplémentaire dans (15.18) n'est fonction que du temps, il n'entre pas dans l'équation des impulsions; quant à la combinaison p/ϱ^γ dans l'équation d'adiabacité, elle ne reçoit qu'une constante additive lorsqu'on introduit un terme additif supplémentaire, donc l'équation d'adiabacité est également satisfaite.

Pour la famille de solutions obtenue les lois du mouvement de chaque particule sont traduites par la formule

$$r=\frac{\mu(\tau_0)}{\mu(\tau)}\xi, \tag{15.19}$$

où ξ est la coordonnée lagrangienne : $\xi=r$ pour $\tau=\tau_0$. Pour différentes particules la coordonnée r en fonction du temps s'exprime au moyen d'une même fonction $\mu(\tau)$. Le caractère de la fonction $\mu(\tau)$ varie selon les valeurs de χ et $\varkappa$; en particulier la fonction $\mu(\tau)$ peut être une fonction positive

périodique oscillant entre deux valeurs positives, μ_1 et μ_2, réduisant à zéro le radicande

$$f_1(\mu, \varkappa, \chi, \gamma)=\chi+\frac{8\pi}{3}\mu+\frac{4\varkappa}{3(\gamma-1)}\mu^{3(\gamma-1)}$$

dans l'intégrale (15.17).

Analysons la fonction $f_1(\mu, \varkappa, \chi, \gamma)$. Si $\gamma>\frac{4}{3}$ et $\varkappa>0$, $f_1(\mu, \varkappa, 0, \gamma)$ est une fonction monotone croissante lorsque μ varie de zéro à l'infini; il existe alors une seule racine positive pour $\chi<0$. Si $\varkappa<0$ et $\chi=0$, on a deux racines positives

$$\mu_1^*=0 \quad \text{et} \quad \mu_2^*=\left[-\frac{2\pi(\gamma-1)}{\varkappa}\right]^{\frac{1}{3\gamma-4}}.$$

Sur l'intervalle μ_1^*, μ_2^* pour $\varkappa<0$ la fonction f_1 atteint son maximum égal à

$$\chi+\frac{8\pi}{9}\,\frac{3\gamma-4}{\gamma-1}\left(-\frac{2\pi}{3\varkappa}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}.$$

Ainsi donc, si

$$\gamma>\frac{4}{3}, \quad \varkappa<0 \quad \text{et} \quad 0>\chi>-\frac{8\pi}{9}\left(\frac{3\gamma-4}{\gamma-1}\right)\left(-\frac{2\pi}{3\varkappa}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}},$$

la fonction $f(\chi, \varkappa, \mu)$ a deux racines positives μ_1 et μ_2, situées à l'intérieur de l'intervalle μ_1^*, μ_2^*; l'écoulement correspondant représente des pulsations périodiques.

Dans le cas où $\chi=\varkappa=0$ pour $\gamma\neq\frac{4}{3}$ ou $\chi=0$ et $\varkappa\neq-2\pi(\gamma-1)$ pour $\gamma=\frac{4}{3}$ la formule (15.17) donne

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi+\frac{\varkappa}{\gamma-1}}}\,\frac{1}{\mu^{3/2}}. \tag{15.20}$$

La constante additive et le signe de la racine ne sont pas essentiels, car ils définissent l'origine et le sens de variation du temps. Si $\gamma=\frac{4}{3}$, $\varkappa=-2\pi(\gamma-1)$ et $\chi>0$, on a au lieu de (15.20)

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{\chi}}\,\frac{1}{\mu}. \tag{15.21}$$

Pour $\gamma=\frac{4}{3}$ toutes les formules correspondantes sont des cas particuliers d'une solution plus générale définie par les formules (15.13) et (15.14).

Lorsque les relations (15.20) et (15.21) ont lieu, les formules (15.16) définissent une variation monotone de toutes les caractéristiques de l'écoulement gazeux d'après des lois de puissances.

La solution considérée est caractérisée par la constance de densité suivant le rayon.

Conformément à (15.19) on peut écrire comme suit la formule (15.18) en variables lagrangiennes pour $\varkappa=-\beta/\mu_0^2\,(\beta>0)$:

$$p=\frac{\beta}{ft_0^4}(r_0^2-\xi^2)\mu^{3\gamma}(\tau). \tag{15.22}$$

Imaginons une sphère gazeuse dont le rayon est r_0 à l'instant $\tau=\tau_0$; il découle de la formule (15.22) que pendant le mouvement la pression à la surface de cette sphère est constamment nulle et s'accroît vers le centre de la sphère suivant une loi parabolique.

Ainsi donc, la solution établie permet de construire les mouvements périodiques pulsatoires non linéaires d'une sphère gazeuse homogène sous l'action des forces gravitationnelles. Les valeurs maxima et minima de $\mu(\tau)$ se définissent comme les racines du radicande de (15.17). La valeur correspondante de la période d'oscillation τ^* est donnée par la formule

$$\tau^*=2\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{\chi+\dfrac{4\varkappa}{3(\gamma-1)}\mu^{3(\gamma-1)}+\dfrac{8\pi}{3}\mu}}=\Phi(\chi,\beta,\gamma).$$

Désignons par $\mathfrak{M}$ toute la masse de la sphère gazeuse et par ϱ_0 la densité du gaz à l'instant τ_0 et soit $\mu_0=\mu(\tau_0)$. Comme $\varrho_0=\mu_0^3/ft_0^2$ et $\mathfrak{M}=4\pi r_0^3\mu_0^3/3ft_0^2$, la formule de la période d'oscillations dimensionnée t^* peut s'écrire comme

$$t^*=\frac{\mu_0^{3/2}}{\sqrt{f\varrho_0}}\Phi=\frac{\mu_0^{3/2}}{\sqrt{f\dfrac{3\mathfrak{M}}{4\pi r_0^3}}}\Phi(\chi,\beta,\gamma). \tag{15.23}$$

Les paramètres χ, β, γ définissent l'amplitude et la forme des oscillations. La période d'oscillations en fonction de la constante gravitationnelle f, de la masse $\mathfrak{M}$ et du rayon r_0 s'obtient sous forme explicite. Si $r_0=r_{\min}$, alors $\mu_0=\mu_1$ est une fonction connue des χ, β et γ.

La solution envisagée donnant les oscillations des sphères gazeuses a été utilisée par différents auteurs dans l'étude de la pulsation des céphéides (voir ch. VI).

Si la formule (15.20) est valable, on a

$$\left.\begin{aligned}&v=\frac{2}{3}\frac{r}{t},\quad \varrho=\frac{\mathcal{R}_0}{ft^2},\quad \mathcal{M}=\frac{4\pi r^3}{3}\frac{\mathcal{R}_0}{ft^2},\\&p=\frac{1}{ft_0^4}\left[\varkappa r^2\left(\frac{\mathcal{R}_0}{\tau^2}\right)^{2/3}+\beta r_0^2\right]\left(\frac{\mathcal{R}_0}{\tau^2}\right)^{\gamma}.\end{aligned}\right\} \tag{15.24}$$

Ici on a introduit, pour abréger, la notation

$$\mathcal{R}_0=\frac{1}{3\left(2\tau+\dfrac{\varkappa}{\gamma-1}\right)}.$$

La solution (15.24) sera utilisée au chapitre VI pour construire les écoulements non stationnaires du type explosion avec ondes de choc des masses gazeuses gravifiques. Pour $\varkappa=0$ la pression n'est fonction que du temps. On parvient à établir les solutions du type considéré avec la loi du mouvement $r=\xi/\mu(t)$ pour les gaz — milieux compressibles ayant des propriétés physiques plus générales — et dans certains cas pour les équations de la gazodynamique magnétique.

§ 16. Sur la théorie des écoulements gazeux unidimensionnels*)

La résolution de problèmes aux limites pour le système d'équations non linéaires (1.3) en l'absence d'autosimilitude suscite de grandes difficultés. Pour obtenir les résultats désirés l'on doit le plus souvent avoir recours aux méthodes de calcul numérique et aux calculatrices modernes. Pour mettre au point ces procédés de calcul et pour élaborer les méthodes analytiques approchées il nous semble indiqué de faire appel aux diverses relations générales propres à certaines classes d'écoulements gazeux.

I. Comportement des solutions des équations des écoulements gazeux unidimensionnels non stationnaires au voisinage du centre de symétrie.

Considérons les écoulements unidimensionnels non stationnaires d'un gaz parfait en recourant aux équations obtenues par des transformations simples des équations (1.3)

$$\frac{\partial \varrho r^{\nu-1}}{\partial t}+\frac{\partial \varrho v r^{\nu-1}}{\partial r}=0, \tag{16.1}$$

$$\frac{\partial \varrho v}{\partial t}+\frac{\partial \varrho v^2}{\partial r}+(\nu-1)\frac{\varrho v^2}{r}+\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{16.2}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial r}+\gamma p\left[\frac{\partial v}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v}{r}\right]=0. \tag{16.3}$$

Les équations (16.1) et (16.2) permettent d'expliciter $v(r, t)$ et $p(r, t)$ au moyen de la densité $\varrho(r, t)$.

En effet, (16.1) entraîne immédiatement, à condition que $v=0$ pour $r=0$,

$$v=-\frac{1}{r^{\nu-1}\varrho}\int_0^r r^{\nu-1}\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dr. \tag{16.4}$$

De (16.2), compte tenu de (16.4), découle

$$p(r, t)=p(0, t)-\varrho v^2-(\nu-1)\int_0^r \frac{\varrho v^2}{r}\,dr+\int_0^r \frac{1}{\xi^{\nu-1}}\int_0^\xi \eta^{\nu-1}\frac{\partial^2 \varrho(\eta, t)}{\partial t^2}\,d\eta d\xi. \tag{16.5}$$

*) Voir L. Sédov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 85, n° 4, 1952 et t. 87, n° 1, 1952.

Considérons une classe d'écoulements gazeux lorsque la densité peut être développée, au voisinage du centre de symétrie, en une série de puissances de la forme

$$\varrho(r, t)=r^s[\omega_0(t)+\omega_1(t)r^m+\ldots+\omega_n(t)r^{nm}+\ldots], \tag{16.6}$$

où $\omega_0\neq 0$, s et m sont des nombres constants satisfaisant aux inégalités

$$s+\nu+nm\neq 0, \quad s+2+nm\neq 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{16.7}$$

Substituons la série (16.6) dans la formule (16.4) et intégrons, il vient

$$v=-r\frac{\dfrac{\omega_0'}{s+\nu}+\dfrac{\omega_1'}{s+\nu+m}r^m+\ldots+\dfrac{\omega_n'}{s+\nu+nm}r^{nm}+\ldots}{\omega_0+\omega_1 r^m+\ldots+\omega_n r^{nm}+\ldots}. \tag{16.8}$$

Grâce à la condition (16.7) le terme logarithmique n'apparaît pas après l'intégration.

Naturellement, la vitesse $v(r, t)$ peut être représentée au voisinage de $r=0$ par une série de puissances de la forme

$$v=r[\varphi_0(t)+\varphi_1(t)r^m+\ldots+\varphi_n(t)r^{nm}+\ldots]. \tag{16.9}$$

En comparant (16.8) et (16.9) on obtient par rapport aux coefficients φ_i le système d'équations suivant :

$$\sum_{i=0}^{n}\varphi_i\omega_{n-i}+\frac{\omega_n'}{s+\nu+nm}=0. \tag{16.10}$$

Le système d'équations (16.10) permet évidemment d'expliciter la fonction $\varphi_n(t)$ au moyen des fonctions $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$, ..., $\omega_n(t)$ et de leurs dérivées à l'aide du déterminant

$$\varphi_n=\frac{1}{\omega_0^{n+1}}\begin{vmatrix} -\dfrac{\omega_n'}{s+\nu+nm}, & \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & \omega_n \\ -\dfrac{\omega_{n-1}'}{s+\nu+(n-1)m}, & \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_{n-2} & \omega_{n-1} \\ & 0 & \omega_0 & \ldots & \omega_{n-3} & \omega_{n-2} \\ & \cdot & 0 & \ldots & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & & \omega_0 & \omega_1 \\ -\dfrac{\omega_0'}{s+\nu}, & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_0 \end{vmatrix}. \tag{16.11}$$

En substituant (16.6) et (16.9) dans la formule (16.5) et en intégrant (les termes logarithmiques n'apparaissent pas en vertu de la condition (16.7)) on exprime la pression $p(r, t)$ par une série de puissances de la forme

$$p(r, t)=\psi_{-1}(t)+r^{s+2}[\psi_0(t)+\psi_1(t)r^m+\ldots+\psi_n(t)r^{nm}+\ldots], \tag{16.12}$$

où les fonctions $\psi_i(t)$ vérifient les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_{-1}=p(0,t),\\
&\psi_0=\frac{\omega_0''}{(s+\nu)(s+2)}-\frac{(\nu+s+1)}{s+2}\varphi_0^2\omega_0,\\
&\psi_1=\frac{\omega_1''}{(s+\nu+m)(s+2+m)}-\frac{\nu+s+1+m}{s+2+m}(2\varphi_0\varphi_1\omega_0+\varphi_0^2\omega_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\psi_n=\frac{\omega_n''}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)}-\frac{\nu+s+1+nm}{s+2+nm}\sum_{j=0}^{n}\omega_j\sum_{i=0}^{n-j}\varphi_i\varphi_{n-j-i}.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}\qquad(16.13)$$

Dans la formule générale de ψ_n on peut changer l'ordre de sommation d'après l'égalité

$$\sum_{j=0}^{n}\omega_j\sum_{i=0}^{n-j}\varphi_i\varphi_{n-j-i}=\sum_{k=0}^{n}\varphi_{n-k}\sum_{i=0}^{i=k}\omega_i\varphi_{k-i}.$$

En tenant compte de ceci et de l'égalité (16.10) on obtient la formule générale de ψ_n sous la forme simplifiée suivante :

$$\psi_n=\frac{\omega_n''}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)}+\frac{\nu+s+1+nm}{s+2+nm}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi_{n-k}\omega_k'}{s+\nu+km}.\qquad(16.14)$$

Ainsi donc, si φ_n est défini par les formules (16.11) et ψ_n par la formule (16.14), les séries (16.6), (16.9) et (16.12) satisfont aux équations (16.1) et (16.2).

En substituant ces séries dans l'équation (16.3) on a

$$\left\{\psi_{-1}'+\gamma\psi_{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\nu+nm)r^{nm}\right\}+$$

$$+r^{s+2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[\psi_n'+\sum_{i=0}^{n}\varphi_i\psi_{n-i}(\gamma\nu+s+2+im(\gamma-1)+nm)]r^{nm}\right\}=0.\qquad(16.15)$$

Cette relation et les formules (16.11) et (16.14) pourraient servir de base à la formation des équations par rapport aux fonctions $p(0,t)$, $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ... En outre, il faut attirer la relation entre s et m.

L'équation (16.15) est satisfaite pour s quelconque à condition que les deux expressions incluses dans les accolades s'annulent. La réduction à zéro de la première accolade équivaut au système d'équations

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{-1}'+\nu\gamma\psi_{-1}\varphi_0&=0,\\
(m+\nu)\psi_{-1}\varphi_1&=0,\\
(2m+\nu)\psi_{-1}\varphi_2&=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
(nm+\nu)\psi_{-1}\varphi_n&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(16.16)$$

D'où, si $\psi_{-1}=p(0, t)\neq 0$, le système (16.16), compte tenu de (16.11) pour $km+\nu\neq 0$ ($k=1, 2, \ldots$), donne

$$\varphi_0=-\frac{\omega_0'}{(s+\nu)\omega_0}, \quad \varphi_1=\varphi_2=\ldots=\varphi_n=\ldots=0. \tag{16.17}$$

Donc, dans le cas considéré les vitesses dépendent linéairement de r :

$$v=\varphi_0 r.$$

En vertu de (16.17) et (16.10) on a

$$\frac{\omega_n'}{s+\nu+nm}=\omega_n\frac{\omega_0'}{(s+\nu)\omega_0},$$

de sorte que

$$\omega_0=c_0\omega(t), \quad \omega_n=c_n\omega^{\frac{nm}{s+\nu}+1} \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{16.18}$$

et donc, selon (16.6), on a

$$\varrho=r^s\omega\left[c_0+c_1\left(r\omega^{\frac{1}{s+\nu}}\right)^m+c_2\left(r\omega^{\frac{1}{s+\nu}}\right)^{2m}+\ldots\right]=r^s\omega P'\left[\left(r\omega^{\frac{1}{s+\nu}}\right)^{s+2}\right], \tag{16.19}$$

où

$$P(x)=c_0x+(s+2)\left[c_1\frac{x^{\frac{m+s+2}{s+2}}}{m+s+2}+c_2\frac{x^{\frac{2m+s+2}{s+2}}}{2m+s+2}+\ldots\right]. \tag{16.20}$$

Les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ et la constante m étant arbitraires, $P(x)$ est une fonction arbitraire de son argument. En outre, il suit de la première équation (16.16), compte tenu de l'égalité $\omega_0=c_0\omega$, que

$$\psi_{-1}=p(0, t)=c_{-1}\omega^{\frac{\nu}{s+\nu}}. \tag{16.21}$$

(16.14) donne pour ψ_n :

$$\psi_n=\frac{\omega_n''}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)}-\frac{\nu+s+1+nm}{(s+2+nm)}\frac{\omega'}{(s+\nu)\omega}\frac{\omega_n'}{s+\nu+nm},$$

d'où, en vertu de (16.18), on trouve

$$\psi_n=\frac{c_n\omega^{\frac{nm}{s+\nu}}}{(s+\nu)(s+2+nm)}\left[\omega''-\frac{\nu+s+1}{s+\nu}\frac{\omega'^2}{\omega}\right] \tag{16.22}$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots).$$

Ainsi donc, en égalant à zéro la première accolade de l'équation (16.15) on est amené à la solution qui explicite conformément à (16.17), (16.18), (16.21) et (16.22) toutes les fonctions $\omega_n(t)$, $\varphi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ au moyen d'une fonction $\omega(t)$ qui peut être arbitraire.

Montrons maintenant qu'avec un choix convenable de $\omega(t)$ la solution obtenue réduit à zéro la seconde accolade de (16.15).

En effet, en vertu de (16.17) le système d'équations indéfini correspondant a la forme

$$\psi_n' - \frac{\omega'}{(s+\nu)\omega}\psi_n(\gamma\nu+s+2+nm)=0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Il suit de la formule (16.22) que toutes ces équations seront satisfaites si la fonction $\omega(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\omega'' - \left(\frac{\nu+s+1}{\nu+s}\right)\frac{\omega'^2}{\omega} = \frac{(\gamma-1)\nu(s+\nu)}{2} B\omega^{\frac{s+2+\nu\gamma}{s+\nu}}, \tag{16.23}$$

où B est une constante arbitraire.

La solution générale de l'équation (16.23) peut se mettre sous la forme

$$t = \pm\frac{1}{s+\nu}\int \frac{d\omega}{\omega^{1+\frac{1}{\nu+s}}\sqrt{A+B\omega^{\frac{(\gamma-1)\nu}{s+\nu}}}} = \pm\int\frac{d\mu}{\mu^2\sqrt{A+B\mu^{\nu(\gamma-1)}}}, \tag{16.24}$$

où A est une constante arbitraire et $\mu=\omega^{\frac{1}{\nu+s}}$ une quantité qu'on peut supposer positive pour $c_0>0$ puisque $\omega_0>0$ par sa signification physique. La limite inférieure de l'intégrale de la formule (16.24) n'est pas essentielle car elle fixe seulement l'origine du temps.

En vertu des formules (16.21), (16.22) et (16.23) le développement (16.12) peut s'écrire sous la forme

$$p=\omega^{\frac{\gamma\nu}{s+2}}\left\{c_{-1}+\frac{(\gamma-1)\nu}{2}B\left[\frac{c_0\left(r\omega^{\frac{1}{s+\nu}}\right)^{s+2}}{s+2}+\frac{c_1\left(r^{s+2}\omega^{\frac{s+2}{s+\nu}}\right)^{\frac{s+2+m}{s+2}}}{s+2+m}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{c_2\left(r^{s+2}\omega^{\frac{s+2}{s+\nu}}\right)^{\frac{s+2+2m}{s+2}}}{s+2+2m}+\ldots\right]\right\}, \tag{16.25}$$

ce que l'on peut d'après (16.20) représenter ainsi:

$$p=\omega^{\frac{\gamma\nu}{s+\nu}}\left\{c_{-1}+\frac{(\gamma-1)\nu}{2(s+2)}BP\left[\left(r\omega^{\frac{1}{s+\nu}}\right)^{s+2}\right]\right\}. \tag{16.25'}$$

En substituant μ à ω on met la solution obtenue sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
&dt=\pm\frac{d\mu}{\mu^2(A+B\mu^{\nu(\gamma-1)})^{1/2}},\\
&\frac{dr}{dt}=v=-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}\cdot r=\mp\mu\sqrt{A+B\mu^{\nu(\gamma-1)}}\,r,\\
&\varrho=\mu^{\nu}(r\mu)^{s}P'[(r\mu)^{s+2}],\\
&p=\mu^{\gamma\nu}\left\{c_{-1}+\frac{(\gamma-1)\nu}{2(s+2)}BP[(r\mu)^{s+2}]\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{16.26}$$

La solution (16.26) coïncide avec la solution définie par les formules (15.3) du § 15*). Pour cela il suffit de poser

$$\varphi(r\mu)=\frac{1}{s+2}P[(r\mu)^{s+2}].$$

Revenons maintenant à l'équation (16.15). La solution envisagée ci-dessus est valable quels que soient m et s. Si les conditions (16.7) sont remplies, la solution (16.26) pour $s+2<0$ est évidemment la solution générale de l'équation (16.15). Ce résultat reste également valable au cas où $s+2>0$, mais $s+2\neq km$, k étant un entier positif.

Dans les cas où les conditions (16.7) ne sont pas remplies et, en particulier, où $s=-2$, on peut s'attendre à l'apparition de termes contenant Log r.

Si $s+2=km$ où $k\geq 1$ est un entier, on voit apparaître dans la première et la seconde accolade des termes correspondants de même ordre à partir du terme de l'ordre r^{km}. Les équations (16.16) étant valables pour $n=-1$, $0, \ldots, (k-1)$, les formules (16.17), (16.18), (16.21) et (16.22) le sont pour $n<k$.

Pour $n\geq k$ on obtient les équations

$$\left.\begin{array}{r} \psi_0'+(km+\gamma\nu)\varphi_0\psi_0+(km+\nu)\gamma\psi_{-1}\varphi_k=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_{n-k}'+\sum_{i=0}^{n-k}\varphi_i\psi_{n-k-i}(nm-im+i\gamma m+\gamma\nu)+(nm+\nu)\gamma\psi_{-1}\varphi_n=0. \end{array}\right\} \quad (16.27)$$

Ces équations et les relations (16.11), (16.14) peuvent être considérées comme les équations différentielles permettant de déterminer successivement les $\omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n, \ldots$ si la fonction $\omega_0(t)$ est donnée.

Ainsi donc il est possible d'exprimer tous les coefficients $\omega_n(t)$, $\varphi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ au moyen d'une fonction $\omega_0(t)$, des constantes γ, k, m et des constantes d'intégration. Les constantes indiquées et la fonction $\omega_0(t)$ peuvent être données de façon arbitraire.

Si $\psi_{-1}=p(0, t)$, la première accolade de l'équation (16.15) s'annule. La réduction à zéro de la seconde accolade équivaut au système d'équations

$$\psi_n'+\sum_{i=0}^{n}\varphi_i\psi_{n-i}(s+2+\gamma\nu+nm+im(\gamma-1))=0, \quad (16.28)$$

à partir duquel, compte tenu de (16.11) et (16.14), on peut déterminer par une intégration successive les fonctions $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$, $\ldots$, $\omega_n(t)$, $\ldots$; seules les constantes d'intégration et la valeur de l'exposant m constituent

*) Cette solution a été obtenue pour la première fois à l'aide des développements indiqués plus haut.

un élément arbitraire dans la solution. Les séries (16.6), (16.9) et (16.12) donnant respectivement la densité ϱ, la vitesse v et la pression p peuvent s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned} g&=\frac{\varrho}{\varrho_2}=\lambda^s(\alpha_0+\alpha_1\lambda^m+\alpha_2\lambda^{2m}+\ldots),\\ f&=\frac{v}{v_2}=\lambda(\beta_0+\beta_1\lambda^m+\beta_2\lambda^{2m}+\ldots),\\ h&=\frac{p}{p_2}=\gamma_{-1}+\lambda^{s+2}(\gamma_0+\gamma_1\lambda^m+\gamma_2\lambda^{2m}+\ldots),\end{aligned}\right\} \tag{16.29}$$

où $\lambda=r/r_2$ et r_2, ϱ_2, v_2, p_2 sont des quantités caractéristiques, généralement fonctions du temps, ayant pour dimensions respectivement la longueur, la densité, la vitesse et la pression. Les quantités adimensionnées α_i, β_i et γ_i peuvent être considérées au lieu de ω_i, φ_i et ψ_i, comme des fonctions adimensionnées d'un paramètre adimensionné τ qui peut remplacer le temps t.

Conformément à ce qui précède, pour $s+2=km(k>0)$, tous les coefficients des séries (16.29) peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions $r_2(\tau)$, $\varrho_2(\tau)$, $p_2(\tau)$, $v_2(\tau)$, $\alpha_0(\tau)$. En particulier, si une onde de choc est présente dans l'écoulement non stationnaire du gaz, on peut prendre comme r_2, ϱ_2, v_2 et p_2 les valeurs des caractéristiques correspondantes du mouvement sur l'onde de choc.

Si l'écoulement du gaz est automodèle et si toutes les caractéristiques de l'écoulement dans leur ensemble, y compris r_2, ϱ_2, v_2, p_2, sont définies comme des fonctions du temps t et des constantes dont deux seulement sont de dimensions indépendantes

$$[a]=\mathrm{ML}^{\chi}\mathrm{T}^{\zeta} \quad \text{et} \quad [b]=\mathrm{LT}^{\eta}$$

(où χ, ζ et η sont des constantes réelles), alors doivent se vérifier les formules de la forme

$$\left.\begin{aligned} r_2&=\delta_1\frac{b}{t^{\eta}}, & \varrho_2&=\delta_2 ab^{-\chi-3}t^{\eta(\chi+3)-\zeta},\\ v_2&=\delta_3\frac{b}{t^{\eta+1}}, & p_2&=\delta_4 ab^{-\chi-1}t^{\eta(\chi+1)-\zeta-2}.\end{aligned}\right\} \tag{16.30}$$

(Ici δ_1, δ_2, δ_3 et δ_4 sont des constantes abstraites.) Dans ce cas tous les coefficients α_i, β_i et γ_i sont indépendants du temps et sont par conséquent des nombres constants abstraits.

Pour les δ_1, δ_2, δ_3 et δ_4 donnés l'équation (16.15) conduit aux équations algébriques permettant de déterminer s, m et d'exprimer tous les coefficients α_i, β_i, γ_i au moyen des constantes α_0 et γ_{-1} (lorsque $\gamma_{-1}\neq 0$). En effet, sans restreindre la généralité, on peut poser les nombres abstraits δ_1, δ_2, δ_3 et δ_4 égaux à l'unité si l'on définit autrement les coefficients constants α_i,

β_i et γ_i *). On obtient de la sorte les équations (16.10) et les formules (16.14) pour l'écoulement automodèle sous la forme

$$\beta_n = -\frac{f_n}{s+\nu+nm}\,\frac{\alpha_n}{a_0} - \frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i}\beta_i \tag{16.31}$$

et

$$\gamma_n = \frac{f_n(f_n-1)\alpha_n}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)} + \frac{(\nu+s+1+nm)}{s+2+nm}\sum_{k=0}^{n}\frac{f_k\beta_{n-k}\alpha_k}{s+\nu+km}, \tag{16.32}$$

où

$$f_n = \eta(3+s+nm+\chi)-\zeta \quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots). \tag{16.33}$$

Dans ce cas l'équation fondamentale (16.15) prend la forme

$$\gamma_{-1}\left\{\eta(\chi+1)-\zeta-2+\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\nu+nm)\lambda^{nm}\right\}+\lambda^{s+2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(f_n-2)\gamma_n+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=0}^{n}\beta_i\gamma_{n-i}(\gamma\nu+s+2+im(\gamma-1)+nm)\right]\lambda^{nm}\right\}=0. \tag{16.34}$$

Soit $\gamma_{-1}\neq 0$ et $s+2=km$ $(km\geq 1)$. L'équation (16.34) équivaut au système d'équations

$$\left.\begin{aligned}
\eta(\chi+1)-\zeta-2+\gamma\nu\beta_0&=0,\\
\beta_1&=0,\\
\beta_2&=0,\\
&\ldots\ldots\\
\beta_{k-1}&=0,\\
\gamma\gamma_{-1}\beta_k(km+\nu)+(f_0-2)\gamma_0+\beta_0\gamma_0(km+\gamma\nu)&=0,\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
\gamma\gamma_{-1}(nm+\nu)+(f_{n-k}-2)\gamma_{n-k}+\sum_{i=0}^{n-k}\beta_i\gamma_{n-k-i}(nm-im+i\gamma m+\gamma\nu)&=0.\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{16.35}$$

Les équations (16.31) et la première équation (16.35) entraînent

$$\beta_0 = -\frac{f_0}{s+\nu} = -\frac{[\eta(3+s+\chi)-\zeta]}{s+\nu}, \tag{16.36}$$

$$\beta_0 = \frac{2+\zeta-\eta(\chi+1)}{\gamma\nu}. \tag{16.37}$$

*) Cela revient à modifier la signification des paramètres dimensionnés r_2, ϱ_2, v_2 et p_2 en gardant l'arbitraire dans le choix des constantes a et b.

Or, d'après (16.35) $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{k-1}=0$ si bien que les équations (16.31) pour $n=0, 1, 2, \ldots, k-1$ fournissent

$$\beta_0=-\left[\frac{\eta(3+s+nm+\chi)-\zeta}{s+\nu+nm}\right]. \tag{16.38}$$

D'où il découle que pour $k>1$ on doit avoir l'égalité

$$\zeta=(3-\nu+\chi)\eta \tag{16.39}$$

qui représente une condition supplémentaire imposée aux exposants des formules de dimension des constantes a et b. Dans ce cas l'exposant s demeure arbitraire.

Si la condition (16.39) n'est pas remplie, on doit avoir $k=1$ de sorte que

$$m=s+2=\frac{\eta[\nu(\gamma-1)+2](\chi+1)+(\nu-2)(\zeta+2)-\gamma\nu\zeta}{\eta(\chi+1-\gamma\nu)-\zeta-2}. \tag{16.40}$$

Il va sans dire que pour $k=1$, les constantes α_0 et γ_{-1} restent arbitraires, les autres coefficients constants des séries (16.29) se déduisent successivement sans peine à partir des équations (16.31), (16.32) et (16.35).

Si la condition (16.39) est satisfaite, alors $m=(s+2)/k$; $k, s, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ et γ_{-1} restent arbitraires, $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{k-1}=0$; les autres coefficients se déduisent des équations (16.31), (16.32) et (16.35).

Si $\gamma_{-1}\neq 0$ et $s+2\neq km$ où k est un entier, on tire de l'équation (16.34)

$$\beta_0=-\frac{f_0}{s+\nu}=\frac{\zeta-\eta(3+s+\chi)}{s+\nu}, \quad \beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_n=\ldots=0$$

et, en plus, on a

$$\gamma_n\left\{\frac{\zeta-\eta(3-\nu+\chi)}{s+\nu}\,nm-\frac{[-\zeta+\eta(3+s+\chi)][2+\nu(\gamma-1)]+2(s+\nu)}{s+\nu}\right\}=0. \tag{16.41}$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots).$$

Dans ce cas les formules (16.32) prennent la forme

$$\gamma_n=\frac{\alpha_n f_n}{(s+2+nm)(s+\nu+nm)}\left[f_n-1-\frac{(\nu+s+1+nm)f_0}{s+\nu}\right].$$

En général les équations (16.41) sont satisfaites pour s, m et $\alpha_n(n=0, 1, 2, \ldots)$ arbitraires pourvu que les exposants ζ, η vérifient les relations*)

$$\eta=-\frac{1}{1+\dfrac{\nu(\gamma-1)}{2}} \quad \text{et} \quad \zeta=\eta(3-\nu+\chi); \tag{16.42}$$

la constante γ_{-1} peut également être arbitraire. La solution correspondante représente le cas particulier d'écoulement automodèle inclus dans la solution exacte (16.26).

*) Evidemment, il y a des cas spéciaux où le système (16.41) peut être satisfait même lorsque les relations (16.42) n'ont pas lieu.

Si $\gamma_{-1}=0$ et la pression $p\not\equiv 0$, l'exposant s est défini par la formule

$$s=\frac{-2\nu-[\eta(3+\gamma)-\zeta][2+\nu(\gamma-1)]}{\eta[2+(\gamma-1)\nu]+2}.$$

Les coefficients α_0, α_1 et l'exposant m demeurent indéterminés, tous les autres coefficients étant définis par les formules (16.31), (16.32) et par l'équation (16.34).

II. Les dérivées par rapport à la coordonnée r de v, ϱ, p, T, S en des points mobiles caractéristiques d'un écoulement gazeux unidimensionnel non stationnaire.

Soit un point mobile M animé d'une vitesse c dans un espace immobile. On parvient sans peine à exprimer, à l'aide des équations (1.3), les dérivées premières par rapport à la coordonnée r de v, ϱ, p, de la température T et de l'entropie S au moyen de leurs valeurs et des valeurs de leurs dérivées par rapport au temps t au point mobile M.

Pour une fonction arbitraire $F(r, t)$ sont vraies les formules

$$\frac{dF}{dt}=\frac{d}{dt}F(r_M(t), t)=\frac{\partial F}{\partial t}+c\,\frac{\partial F}{\partial r},$$

où

$$c=\frac{dr_M}{dt}.$$

En s'appuyant sur cette relation on peut conférer aux équations (1.3) la forme

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial r}\varrho+\frac{\partial \varrho}{\partial r}(v-c)&=-\frac{(\nu-1)\varrho v}{r}-\frac{d\varrho}{dt},\\ \frac{\partial v}{\partial r}(v-c)+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}&=-\frac{dv}{dt},\\ \frac{\partial S}{\partial r}(v-c)&=-\frac{dS}{dt}.\end{aligned}\right\}\tag{16.43}$$

En outre on peut dégager de l'équation d'état sous la forme $p=p(\varrho, S)$ et sous la forme $T=T(\varrho, S)$ d'autres relations

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r}&=\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S\frac{\partial \varrho}{\partial r}+\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\varrho\frac{\partial S}{\partial r},\\ \frac{\partial T}{\partial r}&=\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right)_S\frac{\partial \varrho}{\partial r}+\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\varrho\frac{\partial S}{\partial r}.\end{aligned}\right\}\tag{16.44}$$

En explicitant le système d'équations linéaires (16.43) et (16.44) par rapport aux dérivées partielles en r on obtient des formules valables au point mobile M pour les écoulements adiabatiques de tout gaz

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\varrho v\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S}{r\Delta} - \frac{1}{\Delta}\left[(c-v)\varrho\frac{dv}{dt}+\frac{dp}{dt}\right],\\
\frac{\partial \varrho}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\varrho^2 v(c-v)}{r\Delta} - \frac{1}{\Delta}\left[(c-v)\varrho\frac{d\varrho}{dt}+\varrho^2\frac{dv}{dt}+\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\varrho\frac{\varrho}{c-v}\frac{dS}{dt}\right],\\
\frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\varrho^2 v(c-v)\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S}{r\Delta} - \frac{1}{\Delta}\left[(c-v)\varrho\frac{d\varrho}{dt}+\varrho^2\frac{dv}{dt}-\right.\\
&\qquad\left.-(c-v)\varrho\left(\frac{\partial \varrho}{\partial S}\right)_p\frac{dS}{dt}\right]\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S,\\
\frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\varrho^2 v(c-v)\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right)_S}{r\Delta} - \frac{1}{\Delta}\left[\varrho^2\left(\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right)_S\frac{dv}{dt}+(c-v)\varrho\frac{dT}{dt}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\varrho}{c-v}\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\varrho\frac{dS}{dt}\right],\\
\frac{\partial S}{\partial r} &= \frac{1}{(c-v)}\frac{dS}{dt}, \quad \text{où} \quad \Delta=\varrho\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S-(c-v)^2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{16.45}$$

La déduction des formules (16.45) s'appuie sur les identités connues pour les déterminants de Jacobi

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\varrho=\frac{D(\varrho,p)}{D(\varrho,S)}=\frac{D(\varrho,p)}{D(p,S)}\,\frac{D(p,S)}{D(\varrho,S)}=-\left(\frac{\partial \varrho}{\partial S}\right)_p\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S$$

et

$$\frac{D(T,\varrho)}{D(\varrho,S)}=\frac{D(T,p)}{D(T,\varrho)}\,\frac{D(T,\varrho)}{D(\varrho,S)}=\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\varrho.$$

Si la vitesse relative $u=c-v$ du point M par rapport aux particules est égale à la vitesse du son $\pm\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_S}$, alors $\Delta=0$ et la détermination des dérivées cherchées n'est possible que lorsque les numérateurs correspondants s'annulent. L'égalité $\Delta=0$ a lieu pour les caractéristiques du système d'équations (16.43) et (16.44).

Les formules (16.45) peuvent s'appliquer au cas où le point M se confond avec le front d'une forte discontinuité. En se fondant sur les conditions d'Hugoniot on peut exprimer toutes les grandeurs en arrière du saut au moyen des paramètres des états que traverse le saut et au moyen de la vitesse $c(r_2)=dr_2/dt$ définie par la loi du mouvement du saut (r_2 est la coordonnée du saut).

A titre d'exemple considérons le cas où l'onde de choc se propage du centre ($c>0$) à travers un gaz parfait au repos, de densité ϱ_1 et de pression p_1. Désignons comme auparavant

$$\frac{a_1^2}{c^2}=\frac{\gamma p_1}{\varrho_1 c^2}=q, \quad \frac{v}{v_2}=f, \quad \frac{\varrho}{\varrho_2}=g, \quad \frac{p}{p_2}=h.$$

Utilisant les conditions sur l'onde de choc (12.6) on peut transformer les formules (16.45) en les mettant sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
r_2\frac{\partial f}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1-q)\right]}{1-q}+\frac{3+q}{2q(1-q)^2}r_2\frac{dq}{dr_2},\\
r_2\frac{\partial g}{\partial r} &= -\frac{2(\nu-1)}{\gamma+1}-\\
&\quad -\frac{1}{\gamma+1-2(1-q)}\left[\frac{2\left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1-q)\right]}{1-\frac{2}{\gamma+1}(1-q)}-\frac{3(1+q)}{q}\right]\frac{r_2}{1-q}\frac{dq}{dr_2},\\
r_2\frac{\partial h}{\partial r} &= -\frac{2\gamma(\nu-1)}{\gamma+1}+\\
&\quad +\frac{\gamma}{q}\left[\frac{q+1}{\gamma+1-2(1-q)}+\frac{2}{\gamma+1+(\gamma-1)(1-q)}\right]\frac{r_2}{1-q}\frac{dq}{dr_2},\\
r_2\frac{\partial S}{\partial r} &= -\frac{2c_p(1-q)^2(\gamma^2-1)}{[\gamma+1-2(1-q)]^2[\gamma+1+(\gamma-1)(1-q)]\cdot q}r_2\frac{dq}{dr_2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(16.46)$$

De la même façon on obtient les formules des dérivées secondes, analogues aux formules (16.45) et (16.46).

Il s'ensuit de (16.46) que lorsque le saut se meut à une vitesse constante c à travers un milieu non perturbé ayant une température uniforme T_1, alors $q=\text{const}$ et

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \lambda} &= -(\nu-1)\frac{\left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1-q)\right]}{1-q}\leq 0,\\
\frac{\partial g}{\partial \lambda} &= -\frac{2(\nu-1)}{\gamma+1}\leq 0,\\
\frac{\partial h}{\partial \lambda} &= -\frac{2\gamma(\nu-1)}{\gamma+1}\leq 0,\\
\frac{\partial S}{\partial \lambda} &= 0,\\
\lambda &= \frac{r}{r_2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(16.47)$$

L'égalité à zéro des dérivées n'est réalisée que pour les ondes planes, $\nu=1$. Dans le cas d'une onde de choc plane se propageant à une vitesse constante les dérivées des caractéristiques de l'écoulement perturbé du gaz derrière le front sont nulles.

Dans le cas d'ondes sphériques et cylindriques pour $q=\text{const}$ c'est seulement $\partial S/\partial r=0$; les dérivées $\partial v/\partial r$, $\partial \varrho/\partial r$, $\partial p/\partial r$ diffèrent de zéro mais y tendent à mesure que r_2 augmente comme A/r_2 (A est une constante associée; cf. (16.47)).

Si la vitesse de l'onde de choc c diminue, la quantité $q=a_1^2/c^2$ augmente si bien que $dq/dr_2>0$. Dans ce cas le sens des tangentes aux courbes correspondantes sur la figure 112 indiqué pour la vitesse constante c tourne dans le sens antihoraire.

Pour q donné le taux d'amortissement du saut de compression augmente à mesure qu'augmentent les valeurs des dérivées $\partial f/\partial\lambda$, $\partial g/\partial\lambda$, $\partial h/\partial\lambda$. Lorsque l'onde de choc s'éloigne du centre de symétrie, au voisinage duquel une perturbation à énergie finie s'est formée au bout d'un intervalle de temps fini, on observe l'amortissement du saut, la vitesse de propagation c de ce dernier tendant vers la vitesse du son et, donc, $q\to 1$.

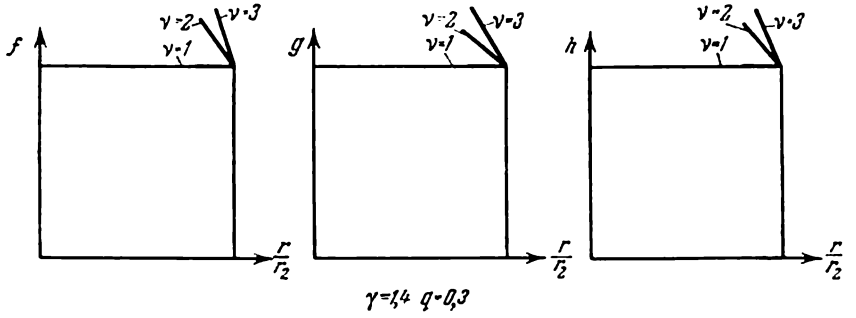


Fig. 112. Eléments des courbes de distribution de la vitesse du gaz derrière le front de l'onde de choc pour une vitesse constante du front dans les cas de symétrie plane, cylindrique et sphérique

On peut établir les lois asymptotiques d'amortissement d'une onde de choc à l'aide de la formule (16.46) à condition de connaître le comportement limite des premiers membres pour $q\to 1$.

Les solutions approchées*) des problèmes posés par les écoulements non stationnaires du gaz à l'intérieur d'une onde de choc ($0\leq r\leq r_2$) peuvent être élaborées, dans certains cas, à l'aide des formules d'interpolation de f, g, h ou de quelques autres fonctions de f, g, h.

Il est possible d'introduire dans les formules d'interpolation en qualité de fonctions paramétriques les fonctions cherchées $\omega_0(t)$ et q (t) décrivant le comportement de la solution au voisinage du centre de symétrie et au voisinage de l'onde de choc.

Pour déterminer ces fonctions on peut utiliser toutes sortes de relations intégrales comme il est d'usage dans les méthodes de Ritz et de Galerkine et dans les théories approchées de la couche limite.

Les conditions sur l'onde de choc (formules (16.46)) et leurs généralisations aux dérivées suivant le rayon d'ordre supérieur au premier permettent de calculer les caractéristiques de l'écoulement du gaz en arrière du front

*) Voir L. Sédov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 85, n° 4, 1952.

du saut si la loi du mouvement du saut est connue. (Le mouvement du saut — de l'onde de choc — peut être déterminé soit par des mesures expérimentales, soit à partir d'hypothèses supplémentaires.)

§ 17. Lois asymptotiques d'amortissement des ondes de choc

Dans le cas général d'un écoulement gazeux perturbé limité par l'onde de choc se propageant par le gaz au repos, les lois asymptotiques donnant la vitesse de l'onde de choc en fonction de sa coordonnée r_2 et, par suite, la variation de l'intensité de l'onde de choc peuvent être des plus variées, elles dépendent essentiellement des conditions définissant l'écoulement du gaz à l'intérieur de l'onde de choc.

Dès 1913, Crussard*) a établi les lois de dégénérescence des ondes de choc planes en supposant que l'écoulement perturbé du gaz en arrière du front du saut représente une onde riemannienne progressive contenant un point où la vitesse du gaz est nulle.

Riemann a montré**) (pour les écoulements gazeux unidimensionnels à ondes planes lorsque le gaz remplit tout l'espace) que si les perturbations initiales étaient continues et distribuées le long d'un segment fini de l'axe x, alors au bout d'un temps fini et si l'écoulement était continu les perturbations initiales se transforment en deux ondes progressives se propageant dans les sens opposés. Si dans l'onde progressive se déplaçant dans le sens des x positifs l'écoulement du gaz est continu à un certain moment et s'il y a des intervalles sur lesquels la pression décroît lorsque x augmente, alors dans cette onde progressive apparaissent les ondes de choc — sauts de compression — par suite du renversement de l'onde.

L'amortissement des ondes de choc sphériques et cylindriques a été établi pour la première fois par L. Landau***) en 1945 dans l'hypothèse que les perturbations du gaz en arrière du front de l'onde de choc s'atténuent et que l'écoulement qui s'établit tend vers une onde progressive dans laquelle à un moment fixe les perturbations occupent un intervalle de longueur finie, cette onde différant de l'onde sonore uniquement par la valeur de la vitesse du son.

Par la suite on a vu paraître de nombreux ouvrages concernant l'amortissement des ondes sphériques et cylindriques dans les mêmes hypothèses que celles de Landau ou dans des hypothèses analogues. Landau a également montré dans son ouvrage que les méthodes, les raisonnements et les résultats correspondants s'appliquent directement au cas de l'amortissement des

---

*) Voir L. Crussard, Compt. Rend. 156, 447, 611 (1913). Dans le livre de J. Zeldovitch, *Introduction à la théorie d'ondes de choc et à la gazodynamique* (en russe, 1948) on trouve une bibliographie des ouvrages consacrés à l'étude de l'amortissement des ondes de choc planes.

**) Voir B. Riemann, *Uber die Fortplanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingunsweite*, Gött. Abhandlungen, Bd. 8, 1860.

***) L. Landau, *Les ondes de choc à de grandes distances de leur origine*, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. IX, op. 4, 1945.

ondes de choc curvilignes, planes ou cylindriques, qui se forment au cours d'un écoulement supersonique autour d'obstacles dans une veine gazeuse supersonique de translation.

Ci-dessous on développe la théorie de l'amortissement des ondes de choc, en partant des formules (16.46) donnant les dérivées en arrière du front de l'onde de choc.

Le système (1.3) vérifie la relation différentielle

$$dr-(a+v)\,dt=0 \tag{17.1}$$

pour les caractéristiques le long desquelles les perturbations se propagent dans le sens des r croissants. L'équation de ces caractéristiques dans le plan r, t peut s'écrire sous la forme $\xi(r, t)=\text{const}$, la fonction $\xi(r, t)$ étant définie à partir de l'égalité

$$\mu\, d\xi=dr-(a+v)\,dt,$$

d'où

$$dt=\frac{dr-\mu\, d\xi}{a+v}, \tag{17.2}$$

où μ est un facteur multiplicatif intégrant.

Introduisons au lieu des variables indépendantes r, t les variables indépendantes r, ξ. Les formules de changement de dérivées partielles sont de la forme

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t}=-\frac{\partial f(\xi,r)}{\partial \xi}\,\frac{(a+v)}{\mu}, \qquad \frac{\partial f(r,t)}{\partial r}=\frac{\partial f(\xi,r)}{\partial r}+\frac{\partial f(\xi,r)}{\partial \xi}\,\frac{1}{\mu}.$$

Utilisant ceci on peut mettre les équations du mouvement (1.3) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &a\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial \xi}=\mu\left(v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial r}\right),\\ &a\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}-\varrho\,\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\mu}{r^{\nu-1}}\,\frac{\partial r^{\nu-1}\varrho v}{\partial r}, \qquad a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p}{\varrho^{\gamma}}\right)=\mu v\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\varrho}{\varrho^{\gamma}}. \end{aligned}\right\} \tag{17.3}$$

La condition d'intégrabilité (17.2) donne encore une équation

$$\frac{\partial(a+v)}{\partial \xi}=(a+v)\,\frac{\partial \mu}{\partial r}-\mu\,\frac{\partial(a+v)}{\partial r}. \tag{17.4}$$

On voit sans peine dans le cas d'ondes planes ($\nu=1$) que le système (17.3) et l'équation (17.4) admettent une solution telle que les v, ϱ, p ne dépendent que de ξ. Cette solution représente l'onde progressive de Riemann; elle peut s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &p=\frac{p_1}{\varrho_1^{\gamma}}\,\varrho^{\gamma}, \qquad a^2=\frac{\gamma p_1}{\varrho_1^{\gamma}}\,\varrho^{\gamma-1}, \qquad v=\frac{2}{\gamma-1}(a-a_1),\\ &\mu=\frac{d\,\mathrm{Log}\,(a+v)}{d\xi}\,r+\left[\frac{F(v)}{a+v}\right]'_{\xi}(a+v)=\frac{d\,\mathrm{Log}\,(a+v)}{d\xi}\,r+\left[\frac{\Omega(\xi)}{a+v}\right]'_{\xi}(a+v),\\ &r-(a+v)t=F(v)=\Omega(\xi) \quad \text{ou} \quad v=\mathcal{G}[r-(a+v)t]=\Phi(\xi), \end{aligned}\right\} \tag{17.5}$$

où $F(v)=\Omega(\xi)$ et donc

$$\mathcal{G}[r-(a+v)t]=\Phi(\xi)$$

sont des fonctions arbitraires de leurs arguments (p_1 et ϱ_1 sont des constantes).

En particulier, on peut poser sans restreindre la généralité

$$\Omega(\xi)=\xi=r-(a+v)t \tag{17.6}$$

en conservant arbitraires la fonction $F(v)$ et la fonction inverse $\Phi(\xi)$. Pour la dérivée $(\partial v/\partial r)_{t=\text{const}}$ en vertu de (17.5) et (17.6) on a

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\Phi'(\xi)\left[1-\frac{\partial(a+v)}{\partial r}\bigg|_{t=\text{const}} t\right]=\Phi'(\xi)\left[1-\frac{\gamma+1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}t\right].$$

D'où

$$r=\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\Phi'(\xi)r}{1+\dfrac{\gamma+1}{2}t\Phi'(\xi)}. \tag{17.7}$$

Si pour $r_2\to\infty$ l'onde de choc dégénère en une onde sonore et si l'écoulement gazeux en arrière du front du saut devient un écoulement de Riemann, alors $q\to 1$ et $a_1t/r_2\to 1$.

Désignons par ξ_0 la valeur limite de ξ sur l'onde de choc lorsque $r_2\to\infty$. Comme l'onde de choc dégénère en une onde sonore par hypothèse, il est évident que pour $\xi\to\xi_0$ on doit avoir $v\to 0$ et donc

$$\Phi(\xi_0)=0.$$

Ensuite on essayera d'établir la loi asymptotique d'amortissement de l'onde de choc en supposant que

$$\left.\begin{aligned}\lim r_2\Phi'(\xi)\to\infty,\\ r_2\to\infty.\end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

Si $\Phi'(\xi_0)\neq 0$, la relation limite (17.8) n'est pas une hypothèse.

Si

$$v=\Phi(\xi)=c(\xi-\xi_0)^n+\ldots,$$

où c et $n>1$ sont constants, alors $\Phi'(\xi)=c(v/c)^{\frac{n-1}{n}}+\ldots$, et l'hypothèse (17.8) équivaut à la condition

$$r_2v^{\frac{n-1}{n}}\to\infty$$

qui sera remplie si la vitesse v en arrière du front du saut diminue plus lentement que

$$\frac{k}{r_2^{1+1/(n-1)}}.$$

On montrera par la suite que l'hypothèse (17.8) entraîne une loi suivant laquelle la vitesse diminue plus lentement que $k/r^{1+1/(n-1)}$, ce qui fait que l'hypothèse (17.8) n'est pas non plus essentielle.

En vertu des formules (16.46) et (17.7) on obtient pour $\nu=1$ l'équation asymptotique

$$\frac{2a_1}{\gamma+1}=\frac{4a_1}{\gamma+1}\,\frac{r_2}{1-q}\,\frac{dq}{dr_2}.$$

Après l'intégration il vient

$$1-q=\sqrt{\frac{r_0}{r_2}} \quad \text{ou} \quad a_1^2\left(\frac{dt}{dr_2}\right)^2=1-\sqrt{\frac{r_0}{r_2}}, \tag{17.9}$$

où r_0 est une constante.

En s'appuyant sur (17.9) et les conditions au saut (12.6) on obtient les formules asymptotiques de la loi du mouvement du saut*) et les formules des caractéristiques de l'écoulement gazeux en arrière du saut

$$\left.\begin{aligned}
a_1(t-t_0)&=r_2\left(1-\sqrt{\frac{r_0}{r_2}}-\frac{1}{8}\,\frac{r_0\operatorname{Log}r_2/r_0}{r_2}+\ldots\right),\\
v_2&=\frac{2a_1}{\gamma+1}\sqrt{\frac{r_0}{r_2}}+\ldots,\\
\varrho_2&=\varrho_1+\frac{2\varrho_1}{\gamma+1}\sqrt{\frac{r_0}{r_2}}+\ldots,\\
p_2&=p_1+\frac{2p_1}{\gamma+1}\sqrt{\frac{r_0}{r_2}}+\ldots.
\end{aligned}\right\} \tag{17.10}$$

Les formules (17.10) sont en accord avec la solution (17.5) et expriment les lois asymptotiques recherchées pour les ondes planes. D'après (17.10) il est évident que la condition (17.8) est satisfaite quel que soit n.

Dans le cas des ondes sphériques ou cylindriques, avec $\mu=1$, les équations (17.3) linéarisées au voisinage de l'état de repos non perturbé, de pression p_1 et de densité ϱ_1, prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial\xi}=\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&a_1\frac{\partial\varrho}{\partial\xi}-\varrho_1\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{\varrho_1}{r^{\nu-1}}\frac{\partial r^{\nu-1}v}{\partial r},\\
&\frac{p}{p_1}=\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{\gamma} \quad \text{ou} \quad \frac{p-p_1}{p_1}=\gamma\frac{\varrho-\varrho_1}{\varrho_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{17.11}$$

A la différence du cas des ondes planes ($\nu=1$) les équations (17.11) n'ont pas de solutions qui dépendraient de la seule variable ξ.

Considérons les solutions des équations (17.11) des ondes progressives au cas où la vitesse v de l'écoulement perturbé est représentée par une série de la forme

$$v=a_1\left[\frac{\Phi_1(\xi)}{r^m}+\frac{\Phi_2(\xi)}{r^{2m}}+\ldots\right], \tag{17.12}$$

*) Ici et plus loin a_1t_0 désigne une constante d'intégration arbitraire.

$\Phi_1(\xi)$ étant une fonction arbitraire et $m>0$, un nombre constant à déterminer.

Posons

$$\varrho=\varrho_1\left[1+\frac{\Psi_1(\xi)}{r^m}+\frac{\Psi_2(\xi)}{r^{2m}}+\ldots\right]. \tag{17.13}$$

La dernière équation (17.11) donne

$$p=p_1\left[1+\frac{\gamma\Psi_1(\xi)}{r^m}+\frac{\gamma\Psi_2(\xi)}{r^{2m}}+\ldots\right]. \tag{17.14}$$

En portant ces séries dans les deux premières équations (17.11) on obtient les relations

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Phi_1'-\Psi_1'}{r^m}+\frac{\Phi_2'-\Psi_2'}{r^{2m}}+\ldots+\frac{m\Psi_1}{r^{m+1}}+\frac{2m\Psi_2}{r^{2m+1}}+\ldots=0,\\ &\frac{\Phi_1'-\Psi_1'}{r^m}+\frac{\Phi_2'-\Psi_2'}{r^{2m}}+\ldots+\frac{(m+1-\nu)\Phi_1}{r^{m+1}}-\frac{(2m+1-\nu)\Phi_2}{r^{2m+1}}-\ldots=0.\end{aligned}\right\} \tag{17.15}$$

D'où

$$\Phi_1=\Psi_1+C, \tag{17.16}$$

C étant une constante d'intégration.

La fonction Φ_1 étant arbitraire, il est nécessaire que dans les équations (17.15) les termes d'ordre $m+1$, $2m+1$, ... se simplifient avec un des termes d'ordre $2m$, $3m$, ... En d'autres termes on doit avoir

$$m+1=km,$$

où k est un entier.

En égalant à zéro les coefficients de r^{km} dans (17.15) on a

$$\Phi_k'-\Psi_k'+m\Psi_1'=0,\quad \Phi_k'-\Psi_k'-(m+1-\nu)\Phi_1=0.$$

Par suite, étant donné (17.16) on peut écrire

$$2m+1-\nu=0 \quad \text{et} \quad C=0.$$

Ainsi donc, dans le cas d'ondes cylindriques ($\nu=2$) lorsque $m=0{,}5$ et $k=3$, sont vérifiées les formules

$$\Psi_n=\frac{2-n}{n}\Phi_n,\quad \Phi_{n+2}'=\frac{n^2-4}{4(n+1)}\Phi_n,\quad \Phi_2'=0, \tag{17.17}$$

la fonction $\Phi_1(\xi)$ demeurant toujours arbitraire; les fonctions $\Phi_{2n+1}(\xi)$ d'indices impairs ($n=1, 2, 3, \ldots$) s'expriment à l'aide de la fonction $\Phi_1(\xi)$ par l'intermédiaire de l'intégrale n-tuple indéfinie

$$\int^{\xi}\int^{\xi_1}\int^{\xi_2}\ldots\int^{\xi_{n-1}}\Phi_1\,d\xi_{n-1}\ldots d\xi_1\,d\xi,$$

les fonctions $\Phi_{2n}(\xi)$ sont des polynômes en ξ de degré $n-2$; chaque polynôme suivant se déduit du précédent par l'intégration d'après la formule de récurrence (17.17).

Pour les ondes sphériques ($\nu=3$) sont vraies les formules

$$\left.\begin{aligned} &m=1, && k=2, \\ &\Psi_n=\frac{2-n}{n}\Phi_n && (n=1, 2, 3, \ldots), \\ &\Phi'_n=\frac{n(n-3)}{2(n-1)}\Phi_{n-1} && (n=2, 3, 4, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{17.18}$$

La fonction $\Phi_1(\xi)$ demeure arbitraire; il découle des formules (17.18) que

$$\Phi_2(\xi)=-\int\Phi_1(\xi)\,d\xi$$

et que les fonctions $\Phi_n(\xi)$, $n>2$, sont des polynômes en ξ de degré $n-3$; chaque polynôme suivant se déduit du précédent par l'intégration d'après la formule de récurrence (17.18).

Ainsi donc, pour les équations linéarisées on définit une classe de solutions représentée par les séries (17.12), (17.13) et (17.14) contenant la fonction arbitraire $\Phi_1(\xi)$ et les constantes arbitraires qui apparaissent lorsqu'on détermine les coefficients des puissances supérieures de $1/r$.

Il découle de (17.12), (17.13) et (17.14) que la quantité $a+v$ admet le développement suivant:

$$a+v=\sqrt{\frac{\gamma p}{\varrho}}+v=a_1\left[1+\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{\Phi_1(\xi)}{r^{\frac{\nu-1}{2}}}+\ldots\right]. \tag{17.19}$$

Dans une approximation sonore, les équations (17.11) peuvent être considérées indépendamment de l'équation (17.4) si on admet que $\mu=1$ et $\xi=r-a_1t$, ce qui équivaut à remplacer dans l'équation (17.4) et dans (17.2) la quantité $a+v$ par a_1. En vertu de (17.19) on peut dégager de (17.4) et (17.2) les expressions précisées de $t(\xi, r)$ et $\mu(\xi, r)$ associées aux premiers termes des séries des fonctions v, ϱ, p dans (17.12), (17.13) et (17.14).

Lorsque les équations (17.3) sont non linéaires, les séries (17.12), (17.13) et (17.14) se trouvent quelque peu modifiées, toutefois les premiers termes conservent leur forme mais la relation entre t, r et ξ ainsi que la fonction $\mu(\xi, r)$ sont à préciser. Pour les ondes cylindriques ($\nu=2$) ces relations sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\mu=1+\sqrt{r}\left[(\gamma+1)\Phi'_1(\xi)+O\left(\frac{\operatorname{Log} r/r^*}{\sqrt{r}}\right)\right], \\ &a_1t+\text{const}=r-\sqrt{r}\left[(\gamma+1)\Phi_1(\xi)-\frac{(\gamma+1)^2}{4}\Phi_1^2(\xi)\frac{\operatorname{Log} r/r^*}{\sqrt{r}}+\ldots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17.20}$$

Ici et plus loin on désignera par $O(f(r))$ les valeurs tendant vers zéro avec l'accroissement de r; l'ordre d'évanouissement est $f(r)$; r^* désigne une constante.

De (17.2) et (17.20) on tire quels que soient $\Phi_1'(\xi)\neq 0$:

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial r}\right|_{t=\text{const}}=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{(\gamma+1)\Phi_1'(\xi)\sqrt{r}}\left[1+O\left(\frac{\operatorname{Log} r/r^*}{\sqrt{r}}\right)\right]. \tag{17.21}$$

Pour les ondes sphériques ($\nu=3$) les formules analogues sont de la forme

$$\left.\begin{aligned}\mu&=1+\frac{\gamma+1}{2}\Phi_1'(\xi)\operatorname{Log} r/r^*+O\left(\frac{\operatorname{Log} r/r^*}{\sqrt{r}}\right),\\ a_1t+\text{const}&=r-\frac{\gamma+1}{2}\Phi_1(\xi)\operatorname{Log} r/r^*+O\left(\frac{\operatorname{Log} r/r^*}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{17.22}$$

et pour $\Phi'(\xi)\neq 0$

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial r}\right|_{t=\text{const}}=\frac{1}{\mu}=\frac{2}{(\gamma+1)\Phi_1'(\xi)\operatorname{Log} r/r^*}\left[1+O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} r/r^*}\right)\right]. \tag{17.23}$$

Il découle de la formule (17.12)*) :

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{t=\text{const}}&=a_1\frac{\Phi_1'(\xi)}{\sqrt{r}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{t=\text{const}}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right]\\ &\qquad\qquad\text{pour}\quad \nu=2,\\ \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{t=\text{const}}&=a_1\frac{\Phi_1'(\xi)}{r}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{t=\text{const}}\left[1+O\left(\frac{\operatorname{Log} r/r^*}{r}\right)\right]\\ &\qquad\qquad\text{pour}\ \nu=3.\end{aligned}\right\} \tag{17.24}$$

Pour les ondes cylindriques ($\nu=2$) on obtient à partir de (16.46), (17.21) et (17.24) pour les lois asymptotiques l'équation asymptotique

$$\frac{a_1}{\gamma+1}=-\frac{2a_1}{\gamma+1}+\frac{4a_1}{\gamma+1}\,\frac{r_2}{1-q}\,\frac{dq}{dr_2}.$$

Après l'intégration on aura donc

$$1-q=\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4}+\ldots\quad\text{ou}\quad a_1^2\left(\frac{dt}{dr_2}\right)^2=1-\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4}+\ldots, \tag{17.25}$$

où r_0 est une constante.

(17.25) et les conditions au saut (12.6) permettent de dégager, pour les ondes cylindriques, les lois asymptotiques du mouvement du saut et les valeurs des caractéristiques de l'écoulement du gaz en arrière du saut :

$$\left.\begin{aligned}a_1(t-t_0)&=r_2-2r_0^{3/4}r_2^{1/4}+\ldots,\qquad v_2=\frac{2a_1}{\gamma+1}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4}+\ldots,\\ \varrho_2&=\varrho_1+\frac{2\varrho_1}{\gamma+1}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4}+\ldots,\qquad p_2=p_1+\frac{2\gamma p_1}{\gamma+1}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4}+\ldots.\end{aligned}\right\} \tag{17.26}$$

*) Dans les formules (17.24) l'ordre des termes évanouissants est donné compte tenu de l'apparition des termes supplémentaires qui suivent le premier terme dans la série (17.12) pour une onde divergente lorsqu'on résout les équations non linéaires (17.3).

Les formules (17.26) concordent avec les formules (17.12), (17.13) et (17.14) décrivant l'écoulement gazeux en arrière du front du saut.

Pour les ondes sphériques ($\nu=3$) on tire de (16.46), (17.23) et (17.24) l'équation asymptotique

$$\frac{2a_1}{\gamma+1}\,\frac{1}{\operatorname{Log} r_2/r^*}=-\frac{4a_1}{\gamma+1}+\frac{4a_1}{\gamma+1}\,\frac{r_2}{1-q}\,\frac{dq}{dr_2}.$$

Après l'intégration on aura

$$1-q=\frac{k}{r_2\sqrt{\operatorname{Log} r_2/r^*}}+\ldots;\quad a_1^2\left(\frac{dt}{dr_2}\right)^2=1-\frac{k}{r_2\sqrt{\operatorname{Log} r_2/r^*}}\ldots, \tag{17.27}$$

où k est une constante ayant la dimension de la longueur. En vertu des formules (17.27) et des conditions au saut (12.6) les lois asymptotiques correspondantes prennent la forme, en cas de symétrie sphérique,

$$\left.\begin{aligned}
-(t_0)&=r_2-k\sqrt{\operatorname{Log} r_2/r^*}+\ldots,\\
v_2&=\frac{2a_1}{\gamma+1}\,\frac{k}{r_2\sqrt{\operatorname{Log} r_2/r^*}}+\ldots,\\
\varrho_2&=\varrho_1+\frac{2\varrho_1}{\gamma+1}\,\frac{k}{r_2\sqrt{\operatorname{Log} r_2/r^*}}+\ldots,\\
p_2&=p_1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}p_1\,\frac{k}{r_2\sqrt{\operatorname{Log} r_2/r^*}}+\ldots\,.
\end{aligned}\right\} \tag{17.28}$$

Les formules (17.28) se trouvent en accord avec les formules (17.12), (17.13) et (17.14) décrivant l'écoulement du gaz en arrière du saut.

Dans les deux cas considérés ($\nu=2$ et $\nu=3$) la vitesse v_2 décroît plus rapidement que ne le prévoient les lois sonores de sorte que, lorsque $r_2\to\infty$, on a $\xi\to\xi_0$ et on a en outre obligatoirement $\Phi_1(\xi_0)=0$. Il découle des équations (17.20) et (17.22) que les caractéristiques limites correspondantes dans le plan r, t tendent vers des lignes droites. L'onde de choc et les caractéristiques distinctes des caractéristiques limites s'écartent de toute ligne droite fixe à une distance infinie lorsque $r\to+\infty$*).

La méthode exposée ci-dessus peut également servir à établir les lois asymptotiques ou à préciser les lois établies auparavant au cas où l'écoulement du gaz en arrière du front du saut est régi par d'autres lois connues qui diffèrent des lois envisagées ci-dessus ou qui les précisent.

*) Les formules asymptotiques tenant compte des petits d'ordre plus élevé ont été obtenues pour $\nu=2$ par G. Shephter, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 116, n° 4, 1954; pour $\nu=3$ par J. Yakimov, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. 19, op. 6, 1955.

CHAPITRE V

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES MACHINES À GAZ*

§ 1. La mise en moyenne des flux de gaz irréguliers dans les conduites**)

1. Comme le calcul exact des écoulements spatiaux du gaz dans les conduites des différents réacteurs est impossible, l'on se voit obligé de procéder à un calcul hydraulique, autrement dit à un calcul faisant appel aux paramètres du gaz dont on prend la moyenne sur les sections appropriées de la conduite. Par ailleurs, même dans les cas où les éléments d'un réacteur (diffuseur, compresseur, chambre de combustion, turbine, tuyère d'éjection) sont calculés en tenant compte du caractère spatial du flux, la liaison entre ces éléments est établie de façon hydraulique, c'est-à-dire à partir des valeurs moyennes des paramètres du gaz.

A l'heure actuelle lorsqu'on perfectionne un groupe de réacteurs, le compresseur ou la turbine par exemple, aucun pour cent de rendement, de degré d'accroissement de pression, etc. ne serait être négligé. Les caractéristiques d'un même régime d'écoulement peuvent différer de quelques pour cent selon les procédés employés pour la mise en moyenne. On comprend donc l'importance que revêt le choix des méthodes appropriées et unifiées de mise en moyenne des paramètres d'état et du mouvement des gaz obtenus à partir des données expérimentales ou théoriques.

Les développements ultérieurs concernant l'application correcte du calcul hydraulique aux écoulements et la mise en moyenne adéquate des flux, ont un caractère général et sont valables non seulement pour l'étude des machines à gaz mais également pour tous les problèmes de l'écoulement des fluides.

G. Lubimov adopta un point de vue analogue pour analyser les questions de la mise en moyenne et de la validité de l'approximation hydraulique pour un certain nombre de problèmes de l'hydrodynamique magnétique***).

2. Une mise en moyenne correcte implique une description d'un flux de gaz irrégulier au moyen d'un nombre minimal de paramètres en conser-

---

*) Les résultats exposés dans ce chapitre ont été publiés par L. Sédov. Recueil d'articles « Teoretitcheskaïa hydromekhanika », n° 13, op. 5, sous la rédaction de L. Sédov, 1954.

**) Le problème de la mise en moyenne a été traité dans l'article de L. Sédov et G. Tcherny. Recueil d'articles « Teoretitcheskaïa hydromekhanika », n° 12, op. 4, sous la rédaction de L. Sédov, 1953.

***) G. Lubimov, « Mekhanika jidkostei i gazow », n° 3, 1966.

vant toutes les propriétés du flux essentielles dans l'évaluation des processus qui se sont déroulés antérieurement ou fondamentales pour l'utilisation ultérieure du flux dans le problème technique envisagé. En procédant à la mise en moyenne on considère au lieu du flux de gaz irrégulier dans une section le flux canonique correspondant (de nouveau irrégulier en général), caractérisé par un nombre minimal de paramètres permettant cependant de conserver toutes les propriétés du flux irrégulier qui sont essentielles dans les problèmes étudiés. Les règles établissant cette correspondance constituent la méthode de la mise en moyenne.

Il va sans dire que toute mise en moyenne, i.e. toute réduction du nombre des paramètres caractérisant le flux ne saurait rendre compte de toutes les propriétés d'un flux essentiellement irrégulier; une partie de ces propriétés échappe à la mise en moyenne; il y a des cas où la mise en moyenne s'avère impossible, dans d'autres cas le nombre de paramètres décrivant un flux irrégulier peut être différent.

3. Il y a des grandeurs physiques qui décrivent en gros un écoulement gazeux dans une section donnée de la conduite et possèdent la propriété d'être additives (les caractéristiques de tout le flux représentent la somme des mêmes caractéristiques des éléments de flux). En voici les plus importantes.

Le flux massique (débit massique)

$$Q=\int_{\Sigma} \varrho v_n \, d\Sigma=\int_{Q} dQ,$$

où Σ est l'aire de la section de la conduite, $d\Sigma$ un élément sur cette aire; ϱ la densité; v_n la composante de la vitesse du gaz normale à Σ.

Le flux d'impulsion (vectoriel)

$$J=\int_{\Sigma} (p\bar{n}+\varrho v_n \bar{v}) \, d\Sigma,$$

où $\bar{n}$ est le vecteur unité de la normale à Σ, $\bar{v}$ le vecteur vitesse du gaz, p la pression.

Le flux du moment cinétique (vectoriel)

$$\bar{M}=\int_{\Sigma} [\bar{r}, \varrho v_n \bar{v}] \, d\Sigma=\int_{Q} [\bar{r}, \bar{v}] \, dQ,$$

où $\bar{r}$ est le rayon vecteur des points de la surface Σ par rapport au centre des moments.

Le flux de l'enthalpie totale

$$I_0=\int_{\Sigma} \left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\varrho}\right) \varrho v_n \, d\Sigma=\int_{Q} i_0 \, dQ,$$

ε étant l'énergie interne d'une unité de masse de gaz.

Le flux de l'entropie

$$S=\int_{\Sigma} s\varrho v_n\, d\Sigma=\int_{Q} s\, dQ,$$

où s est l'entropie par unité de masse de gaz, etc.

Ces caractéristiques sont essentielles pour le calcul du moteur et l'analyse du fonctionnement de celui-ci dans son ensemble, car elles donnent le débit de gaz, l'amenée de l'énergie au gaz, les pertes dans le moteur, les forces et les moments extérieurs qui lui sont appliqués, etc. En outre, il importe de souligner que certaines de ces caractéristiques se conservent dans divers écoulements stationnaires du gaz dans les conduites. Pour expliquer ces propriétés utilisons les relations intégrales valables pour l'écoulement d'un gaz dans une conduite.

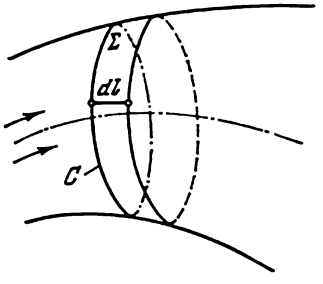


Fig. 113. Ecoulement dans une conduite (tube de courant)

4. Soit (fig. 113) une conduite (tube de courant) traversée par un écoulement de gaz. Désignons par l la distance le long de la médiatrice de la conduite mesurée à partir d'un point arbitraire. Isolons un élément de volume limité par la surface de la conduite et par ses deux sections voisines normales à sa médiatrice et séparées l'une de l'autre par une distance constante suivant la normale à Σ. Désignons par C la ligne d'intersection de la surface Σ avec la surface du tube de courant (C peut se composer de plusieurs contours fermés).

Un écoulement spatial non stationnaire de gaz dans une conduite (tube de courant) donne lieu aux relations intégrales exactes suivantes.

L'équation du débit (de continuité)

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, d\Sigma+\frac{\partial Q}{\partial l}=0,$$

où t est le temps.

L'équation des impulsions projetée sur la direction de la médiatrice de la conduite (les équations des impulsions et des moments cinétiques sont données pour le cas où la médiatrice est une ligne droite) :

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varrho v_l}{\partial t}\, d\Sigma+\frac{\partial J_l}{\partial t}=P+f_l^{(e)}\Sigma.$$

Ici P est la pression résultante par unité de longueur sur la surface du tube de courant et s'exerçant sur le gaz dans la direction de la médiatrice. S'il s'agit d'un écoulement à symétrie axiale et si C est une circonférence de centre sur l'axe de symétrie, alors $P=p2\pi r_C \operatorname{tg}\theta$, où p est la pression le long de C et θ l'angle entre la section méridienne du tube de courant aux points de la ligne C et la direction de l'axe de symétrie; $f_l^{(e)}\Sigma\, dl$ la com-

posante suivant la direction l de la force résultante extérieure (à l'exception de la force des pressions surfaciques), appliquée au volume $\Sigma\, dl$ (l'indice l désigne la projection sur la direction de la tangente à la médiatrice).

L'équation des moments cinétiques par rapport à la direction de la médiatrice de la conduite

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varrho(\bar{r}, \bar{v})_l}{\partial t} d\Sigma + \frac{\partial M_l}{\partial l} = M_p + m_l^{(c)}\Sigma.$$

Ici M_p est le moment résultant par rapport à la médiatrice de la conduite des forces de pression; en cas d'écoulement à symétrie axiale, lorsque la médiatrice se confond avec l'axe de symétrie, $M_p = 0$; $m_l^{(c)}\Sigma\, dl$ est le moment résultant par rapport au même axe de toutes les autres forces extérieures s'exerçant sur le volume $\Sigma\, dl$.

L'équation de l'énergie

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} \varrho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) d\Sigma + \frac{\partial I_0}{\partial l} = a^{(c)}\Sigma + q^{(c)}\Sigma,$$

où $a^{(c)}\Sigma\, dl$ est le travail total en unité de temps des forces extérieures (excepté les forces de pression) appliquées au volume $\Sigma\, dl$; $q^{(c)}\Sigma\, dl$ la chaleur extérieure fournie au volume $\Sigma\, dl$ en unité de temps.

5. Il découle de l'équation de continuité que pour tout écoulement stationnaire de gaz

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 0,$$

c'est-à-dire que la quantité Q se conserve le long d'un tube de courant.

Pour les écoulements stationnaires d'un gaz parfait, en l'absence de forces massiques extérieures, les équations de l'impulsion et des moments cinétiques prennent la forme

$$\frac{\partial J_l}{\partial l} = P \quad \text{et} \quad \frac{\partial M_l}{\partial l} = M_p.$$

On voit donc qu'en général les grandeurs J_l et M_l ne se conservent pas le long d'un tube de courant. Par la suite on considérera dans la plupart des cas les écoulements à symétrie axiale. Pour ces écoulements

$$\frac{\partial M_l}{\partial l} = 0 \quad \text{et} \quad M_l = \text{const}.$$

La quantité J_l ne se conserve pas non plus pour ces écoulements; la différence entre ses valeurs permet de calculer la force de réaction du flux de gaz appliquée aux parois de la conduite.

Pour les écoulements stationnaires sans forces extérieures ni apport de chaleur extérieure l'équation de l'énergie fournit

$$\frac{\partial I_0}{\partial l} = 0,$$

c'est-à-dire que l'enthalpie totale du flux se conserve le long du tube de courant.

Si l'on a un écoulement stationnaire dans une conduite courbe, le flux d'entropie S ne peut varier qu'aux dépens de l'apport de chaleur de l'extérieur et par suite des pertes par viscosité, par conduction, par sauts de compression, etc.

S'il y a évolution adiabatique réversible, le flux d'entropie S se conserve dans l'écoulement du gaz le long du tube de courant dans toutes les conduites courbes :

$$\frac{\partial S}{\partial l}=0, \qquad S=\text{const.}$$

6. Les flux canoniques hypothétiques introduits au cours de la mise en moyenne doivent conserver la correspondance avec les flux réels le long de la conduite (par les paramètres importants pour les applications techniques).

Dans la plupart des cas les paramètres du flux moyen doivent caractériser correctement le débit du gaz à travers la conduite, le flux d'enthalpie totale (pour le calcul de l'apport de l'énergie) et le flux d'entropie (pour le calcul des pertes). C'est pourquoi dans ces cas il faut conserver l'égalité des caractéristiques intégrales Q, I_0 et S dans les flux original et moyen. Parfois, il importe également de savoir calculer correctement, d'après les paramètres moyens, le flux de l'impulsion et le flux des moments cinétiques (pour déterminer les forces et leurs moments), d'évaluer correctement la pression statique et la température (pour l'estimation de la résistance et de la thermostabilité) ainsi que d'évaluer la grandeur et la direction de la vitesse (pour profiler les éléments de la conduite et pour définir des pertes qui s'ensuivent), etc.

Ainsi donc, les flux canoniques introduits au cours de la mise en moyenne peuvent être caractérisés par des paramètres différents. Leur nombre doit être suffisant pour garantir l'égalité des grandeurs essentielles dans le flux irrégulier donné et dans le flux canonique associé.

7. Le procédé le plus simple de la mise en moyenne des flux irréguliers consiste à établir l'état de repos (freinage) associé à la configuration donnée de l'écoulement. Un gaz homogène ayant des caractéristiques physiques et chimiques fixes n'étant caractérisé à l'état de repos que par deux paramètres (par exemple, l'entropie et l'enthalpie par unité de masse), pour assurer l'égalité des moyennes dans le flux donné et à l'état de repos qui lui correspond il suffit d'avoir deux caractéristiques intégrales. Si l'on ne tient pas compte des pertes ni de l'échange énergétique lors du freinage, alors à un flux irrégulier doit correspondre un gaz au repos de mêmes valeurs de l'entropie et de l'enthalpie

$$s=\frac{S}{Q} \quad \text{et} \quad i_0=\frac{I_0}{Q}$$

que celles de l'écoulement*). Comme on sait, il est possible de déterminer

*) Les formules permettant de calculer les grandeurs Q, I_0, S ainsi que J_l d'après les distributions des paramètres du flux dans une section de la conduite sont données pages 341-342.

les autres caractéristiques physiques du gaz au repos d'après les paramètres s et i_0 et l'équation d'état. Si l'équation d'état est $p=R\varrho T$ (R est la constante des gaz parfaits, T la température absolue), les formules donnant la température, la densité et la pression au repos (l'état freiné) sont de la forme

$$T_0=\frac{i_0}{c_p},$$

$$\varrho_0=\frac{1}{R}\left(\frac{i_0}{c_p}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{-\frac{s}{R}},$$

$$p_0=R\varrho_0\frac{i_0}{c_p}.$$

En décrivant un flux irrégulier de gaz par deux paramètres s et i_0 (ou p_0 et T_0) seulement on n'arrive à déterminer correctement d'après les paramètres moyens que la valeur de l'énergie communiquée à l'unité de masse de gaz et la valeur des pertes entre deux sections de la conduite.

La méthode de description de la configuration de l'écoulement à l'aide des paramètres du gaz réversiblement arrêté sans amenée de l'énergie est bien connue et d'usage courant; il est largement démontré que cette méthode est commode, fructueuse et pleinement fondée d'un point de vue thermodynamique.

8. Une autre méthode courante de mise en moyenne consiste à remplacer le flux irrégulier donné par un flux moyen en mouvement de translation ayant la même section Σ. Un tel flux se caractérise par trois paramètres physiques, par exemple par l'entropie et par l'enthalpie de l'unité de masse de gaz, les mêmes dans le flux étudié et dans le flux réversiblement arrêté sans amenée de l'énergie, et par la valeur de la vitesse ou du débit. C'est pourquoi on peut exiger l'égalité des trois caractéristiques d'écoulement dans le flux donné et dans le flux moyen. Ces trois caractéristiques doivent être choisies en fonction du problème considéré.

Comme il a été déjà dit, dans l'étude des écoulements dans des conduites intérieures des réacteurs, les paramètres les plus intéressants sont le débit, l'amenée de l'énergie et les pertes sur diverses portions du trajet de réacteur.

Dans la méthode de mise en moyenne consistant à utiliser un flux en mouvement de translation, méthode qui représente un développement et une généralisation de la méthode d'arrêt réversible, il convient de poser égaux le flux de l'entropie S, le flux de l'enthalpie totale I_0 et le débit Q dans le flux étudié et dans le flux moyen.

La description d'un flux irrégulier à l'aide de trois paramètres Q, $s=S/Q$ et $i_0=I_0/Q$ (ou à l'aide des valeurs Q, T_0, p_0 calculées à partir de ces paramètres) permet de déterminer correctement d'après les paramètres moyens la valeur de l'énergie communiquée à l'unité de masse de gaz, la valeur des pertes irréversibles entre deux sections de la conduite et le débit de gaz à travers la conduite.

Connaissant les paramètres de l'état de repos p_0, ϱ_0, T_0 on peut introduire les valeurs de la vitesse, de la pression statique, de la densité et de la température dans le flux moyen. D'après la formule

$$\lambda\left(\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=q(\lambda)=\frac{Q}{\varrho_{cr}v_{cr}}$$

on détermine le paramètre λ; la vitesse v est déterminée à l'aide de l'égalité

$$v=\lambda v_{cr},$$

où

$$v_{cr}=\sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}i_0}, \quad \varrho_{cr}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\varrho_0,$$

$$\varrho_0=\frac{1}{R}\left(\frac{i_0}{c_p}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}e^{-\frac{s}{R}}.$$

Ensuite, on a

$$p=p_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\varrho=\varrho_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad T=T_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right).$$

Ainsi donc, tous les paramètres d'un flux moyen en mouvement de translation de vitesse v, de section Σ, peuvent être considérés comme les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz à travers un ajutage de section Σ et de débit Q, qui se déverse d'un grand réservoir, écoulement auquel on aura ramené le flux irrégulier initial par l'évolution réversible sans apport d'énergie extérieure. On peut indiquer le processus où le flux irrégulier initial est converti directement de manière réversible, sans apport d'énergie extérieure, dans un flux de translation de section Σ et de débit Q identique.

Notons que dans certains cas où la pression vraie dans une section est quasi uniforme, elle peut sensiblement différer de la pression calculée d'après les formules indiquées à partir des valeurs moyennes p_0, T_0. Il en va de même pour d'autres paramètres : la vitesse, la température, etc.

Des erreurs pareilles peuvent apparaître quelle que soit la méthode de mise en moyenne.

Dans la pratique on adopte parfois, pour la mise en moyenne, l'égalité dans le flux étudié et dans le flux moyen des caractéristiques Q, I_0 et J_l, afin de pouvoir utiliser ensuite les paramètres moyens pour calculer les pertes. Une telle mise en moyenne équivaut au passage du flux irrégulier donné à un flux uniforme dans la chambre de mélange cylindrique (éjecteur) et elle suppose donc une augmentation de l'entropie dans le flux moyen. Les pertes calculées de cette manière peuvent différer sensiblement des pertes qui ont effectivement lieu dans le flux.

A titre d'exemple donnons les résultats du calcul des valeurs moyennes de la pression totale pour un flux de gaz dans un tube cylindrique circulaire dont les profils des vitesses et les différences de températures sont régis par la loi de la figure 114

$$\frac{u}{u_0}=\frac{T-T_{st}}{T_0-T_{st}}=\left(1-\frac{r}{\mathcal{R}}\right)^{\frac{1}{7}}$$

et dont la pression statique est constante, $p=\text{const}=p_{st}$, suivant la section (l'indice « 0 » désigne les grandeurs sur l'axe du tube, l'indice « st » les grandeurs au voisinage de la paroi du tube, $\mathcal{R}$ est le rayon du tube).

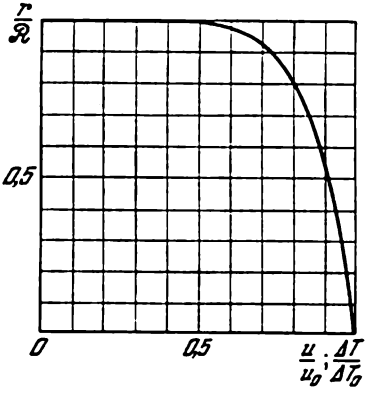


Fig. 114. Profils des vitesses et des différences de températures variant selon la loi

$$\frac{u}{u_0}=\frac{T-T_{st}}{T_0-T_{st}}=\frac{\Delta T}{\Delta T_0}=\left(1-\frac{r}{\mathcal{R}}\right)^{1/7}$$

La figure 115 (*a*, *b*) donne pour deux valeurs de $k=(T_0-T_{st})/T_{st}$ la pression totale p_0/p_{st} en fonction du nombre M_0 (M_0 est le nombre M sur l'axe de la conduite); les lignes continues correspondent aux valeurs de la pression totale obtenues par une mise en moyenne conservant Q, I_0 et S; ces valeurs sont indiquées en pointillé pour une mise en moyenne conservant Q, I_0 et J_l.

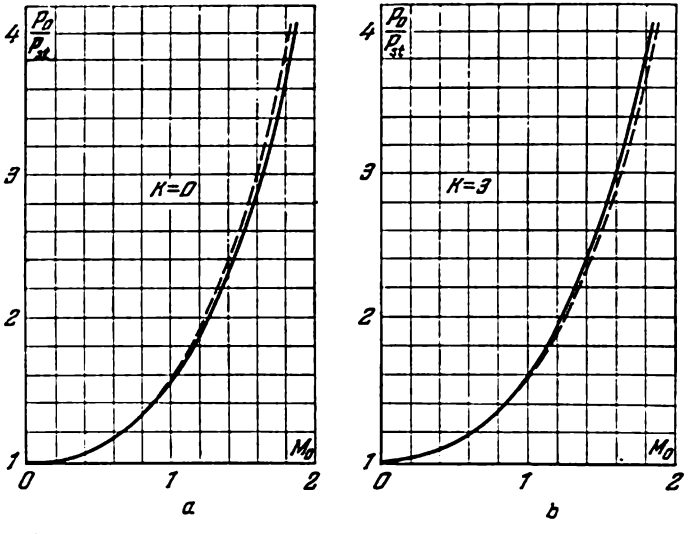


Fig. 115. Valeurs moyennes de la pression totale obtenues en conservant le débit, le flux d'enthalpie totale et le flux d'entropie (courbe en trait continu) et en conservant le débit, le flux d'enthalpie et le flux d'impulsion (courbe en pointillé)

Procéder à une mise en moyenne conservant l'impulsion revient à caractériser de façon standard non seulement les pertes survenues dans le flux avant la section donnée mais aussi celles que peut entraîner le nivellement de l'irrégularité du flux au cours de l'évolution ultérieure de l'écoulement.

Ce procédé peut être indiqué dans certains cas (par exemple, si l'on veut comparer les appareils à la sortie desquels les irrégularités du flux ont un même caractère). Toutefois, les résultats obtenus et les implications qui en découlent doivent être considérés avec circonspection.

Comme on l'a vu précédemment, par cette méthode de mise en moyenne on aboutit à des pertes qui peuvent sensiblement différer des pertes réelles dans la section donnée. Elles peuvent également différer des pertes qui surviendront par la suite.

L'augmentation de l'entropie, qui n'a pas lieu en réalité, est liée à la « dévalorisation » de l'énergie du flux et à la disparition dans ce flux de certaines propriétés qui peuvent être essentielles. Par exemple, soit un flux à l'entrée du premier étage d'un compresseur dont la vitesse axiale est irrégulièrement distribuée. En effectuant la mise en moyenne il faut se garder de supposer que les pertes dues au mélange ont déjà eu lieu ou qu'elles se produiront obligatoirement dans les instants ultérieurs, étant donné que le flux entre dans l'aubage qui est profilé de façon appropriée.

Au cours du mélange, en même temps que croît l'entropie augmente l'aire de la section critique, de sorte que le flux moyen finit par ne plus être en mesure de passer par la section donnée. Plus précisément, il peut s'avérer qu'il n'existe pas d'écoulement de translation qui ait la section, le débit Q, le flux d'enthalpie I_0 et l'impulsion J_l identiques à ceux du flux irrégulier donné. La condition d'existence de l'écoulement de translation correspondant est envisagée plus bas.

Ainsi donc, dans certains cas la mise en moyenne des flux avec conservation de l'impulsion n'est pas possible. En revanche, il est toujours possible de conserver l'entropie.

Si l'on a à évaluer les pertes par suite du mélange, on se souviendra que celles-ci dépendent également de la forme de la conduite; dans diverses canalisations courbes, dans les canalisations dotées de nervures les pertes seront différentes des pertes calculées dans l'hypothèse que l'impulsion se conserve, c'est-à-dire des pertes ayant lieu dans une conduite cylindrique.

Lorsqu'on effectue la mise en moyenne du flux à la sortie de l'aubage d'un compresseur centrifuge en conservant l'impulsion, la valeur de la composante radiale de l'impulsion dépend de la dimension de la portion choisie pour la mise en moyenne; ceci introduit un élément d'indétermination dans le résultat des calculs.

Si l'écoulement dans une conduite s'accompagne d'une forte variation de l'entropie (de manière que le flux d'entropie S et, partant, les paramètres du flux de gaz régularisé dans l'hypothèse que les grandeurs Q, I_0 et S restent constantes, varient brusquement en fonction de la section choisie), on procédera à une mise en moyenne avec conservation de l'entropie dans la section où les pertes par mélange ont eu le temps de se réaliser. Ainsi donc

les pertes éventuelles et les pertes inévitables peuvent être évaluées, dans le cas considéré, non par le procédé de la mise en moyenne mais par un choix adéquat des sections dans lesquelles sont mesurés les paramètres du flux. Une mise en moyenne conservant l'entropie permet d'évaluer correctement les pertes survenues dans le flux en amont de la section considérée.

9. Dans nombre d'applications c'est la composante de la vitesse tangente à la section Σ qui a une importance particulière. Par exemple, dans la section annulaire à l'entrée et à la sortie de la roue à aubes d'un compresseur ou d'une turbine (du type centrifuge ou axial) la rotation du flux (vitesses circonférencielles) joue un rôle considérable. Celles-ci influent sur le flux du moment cinétique du gaz M_l; la différence des flux de moments cinétiques par deux sections successives est égale au moment résultant des forces extérieures exercé sur le gaz par les parois de la canalisation et de la roue à aubes entre les sections choisies.

Pour le profilage des éléments d'un compresseur ou d'une turbine, bien des caractéristiques de la distribution irrégulière des vitesses sont essentielles si bien que dans un problème du profilage on ne peut pas en général remplacer la distribution réelle des caractéristiques par les valeurs moyennes sensiblement nivelées.

Toutefois bien souvent ce sont les valeurs moyennes qui s'avèrent essentielles. Celles-ci jouent un certain rôle dans le calcul de la puissance absorbée par le gaz ou communiquée au gaz par exemple, dans la détermination des moments extérieurs s'exerçant sur les parties immobiles d'une installation ainsi que dans certains cas liés à la dissipation de l'énergie mécanique dans les distributeurs ou dans la tuyère en aval de la turbine.

Pour établir les moyennes qui tiennent compte de la rotation du flux et qui permettent d'évaluer correctement les moments extérieurs résultants on peut procéder à la mise en moyenne en introduisant les flux de gaz canoniques ayant une vitesse circonférencielle constante dans toute la section annulaire (au cas d'un compresseur centrifuge ou axial) ou des vitesses circonférencielles distribuées le long du rayon suivant la loi du tourbillon libre (en cas d'un moteur axial)

$$v_\tau r = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{const},$$

où Γ est la circulation du tourbillon.

Le champ des vitesses défini par les égalités

$$v_\tau = c_u = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad v_r = c_r = 0 \quad (\Gamma = \text{const}),$$

en présence de l'équilibre radial, représente la solution exacte des équations de la gazodynamique pour l'écoulement stationnaire d'un gaz parfait dans la couronne entre deux cylindres circulaires coaxiaux.

En outre deux des trois valeurs suivantes : l'entropie s, l'enthalpie totale par unité de masse i_0 et la vitesse axiale c_a, peuvent être prises uniformes dans le flux.

Les distributions de la température, de la densité et de la pression suivant le rayon sont données dans ce cas par les formules

$$\frac{i}{c_p}=T=T_0-\frac{c_a^2}{2c_p}-\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 c_p r^2}=T_0\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\lambda_a^2+\lambda_u^2)\right],$$

$$\varrho=\frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{R}e^{-\frac{s}{R}}=\varrho_0\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\lambda_a^2+\lambda_u^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\varrho_0=\frac{1}{R}\left(\frac{i_0}{c_p}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}e^{-\frac{s}{R}},$$

$$p=R\varrho T=p_0\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\lambda_a^2+\lambda_u^2)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$p_0=R\varrho_0\frac{i_0}{c_p}.$$

Soulignons que dans cet écoulement la pression, la température et la densité sont variables suivant le rayon.

Le flux du moment cinétique vérifie la formule

$$M_l=\int_Q rv_\tau\,dQ.$$

Le flux rotationnel irrégulier du gaz peut être remplacé par un flux rotationnel moyen défini plus haut ayant les grandeurs

$$Q;\ i_0=\frac{I_0}{Q};\quad s=\frac{S}{Q}\quad\text{et}\quad M_l$$

identiques à celles du flux irrégulier donné.

10. Donnons maintenant les formules générales de calcul des caractéristiques intégrales du flux. Il faut connaître pour cela la distribution suivant la section de la conduite des cinq paramètres d'état et de mouvement indépendants du gaz, par exemple, de la pression p, de la densité ϱ et des trois composantes du vecteur vitesse $\bar{v}$. D'un point de vue pratique, il est plus commode d'adopter les paramètres qu'on peut mesurer directement, notamment T_0, p_0, p et deux angles directeurs de la vitesse. La température d'arrêt T_0 est mesurée au thermocouple, la pression totale p_0, la pression statique p et la direction de la vitesse sont déterminées à l'aide des ajutages et des tubes spéciaux.

Le débit du gaz à travers la conduite est souvent mesuré directement avec un débitmètre ou il est déterminé par la formule

$$Q=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\int_\Sigma\frac{p_0}{\sqrt{c_pT_0}}q\left(\frac{p}{p_0}\right)\cos(\bar{v},\bar{n})\,d\Sigma,$$

où

$$q\left(\frac{p}{p_0}\right)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$\cos(\bar{v}, \bar{n})$ est le cosinus de l'angle entre la direction de la vitesse et la normale à la section Σ.

Le flux de l'enthalpie totale est donné par la formule

$$I_0=i_{0\,\mathrm{moy}}Q=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\int_{\Sigma} p_0\sqrt{c_pT_0}\,q\left(\frac{p}{p_0}\right)\cos(\bar{v}, \bar{n})\,d\Sigma.$$

L'impulsion projetée sur la médiatrice de la conduite a pour expression

$$J_l=\int_{\Sigma} p\cos(n, l)\,d\Sigma+\gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\int_{\Sigma} p_0q\left(\frac{p}{p_0}\right)\lambda\left(\frac{p}{p_0}\right)\cos(\bar{n}, \bar{l})\cos(\bar{v}, \bar{n})\,d\Sigma,$$

où

$$\lambda\left(\frac{p}{p_0}\right)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]},$$

$\cos(\bar{n}, \bar{l})$ est le cosinus de l'angle entre la direction de la normale à la section et celle de la médiatrice de la conduite.

Définissons l'entropie par la formule

$$s=R\,\mathrm{Log}\,\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p}=R\,\mathrm{Log}\,\frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_0}.$$

Le flux de l'entropie s'exprimera alors par l'intégrale

$$S=s_{\mathrm{moy}}Q=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\gamma}{\gamma-1}\sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\times$$
$$\times\int_{\Sigma}\frac{p_0}{\sqrt{c_pT_0}}q\left(\frac{p}{p_0}\right)R\,\mathrm{Log}\,\frac{T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_0}\cos(\bar{v}, \bar{n})\,d\Sigma.$$

11. Il est facile maintenant d'indiquer les formules de calcul des paramètres moyens d'un flux de translation d'après les valeurs des caractéristiques intégrales du flux réel qu'on a calculées.

a) En conservant Q, I_0, S :

$$T_{0\,\mathrm{moy}}=\frac{i_{0\,\mathrm{moy}}}{c_p},\quad p_{0\,\mathrm{moy}}=e^{-\frac{s_{\mathrm{moy}}}{R}}\left(\frac{i_{0\,\mathrm{moy}}}{c_p}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$q(\lambda_{\mathrm{moy}})=\frac{Q}{\varrho_{\mathrm{cr}}v_{\mathrm{cr}}\Sigma}.$$

Au cas où la température d'arrêt reste constante dans le flux, on a

$$\operatorname{Log} p_{0\,\mathrm{moy}} = \frac{1}{Q}\int_Q \operatorname{Log} p_0\, dQ,$$

en d'autres termes, pour calculer les pertes il convient de mettre en moyenne, sur la masse (sur le débit), le logarithme de la pression totale (et non pas la pression totale comme on le fait parfois dans la pratique).

b) En conservant Q, I_0, J_l :

$$T_{0\,\mathrm{moy}} = \frac{i_{0\,\mathrm{moy}}}{c_p}, \quad \lambda_{\mathrm{moy}} + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{moy}}} = \frac{J_l}{Q}\sqrt{\frac{28}{(\gamma+1)RT_{0\,\mathrm{moy}}}} = J_l\sqrt{\frac{2\gamma^2}{(\gamma^2-1)I_0 Q}},$$

$$p_{0\,\mathrm{moy}} = \frac{J_l}{(1+\lambda_{\mathrm{moy}}^2)\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_{\mathrm{moy}}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\Sigma}.$$

Il a été déjà noté que pour une section de flux donnée il n'est pas toujours possible de trouver un flux de translation uniforme ayant Q, I_0 et J_l identiques à celles du flux irrégulier donné. On montre qu'il existe une large classe d'écoulements irréguliers pour lesquels la quantité

$$J_l\sqrt{\frac{2\gamma^2}{(\gamma^2-1)I_0 Q}} = \lambda_{\mathrm{moy}} + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{moy}}},$$

calculée d'après les données expérimentales, s'obtient inférieure à deux; de sorte qu'on ne peut pas déterminer les valeurs réelles de λ_{moy} et d'autres paramètres du flux de translation correspondant (ces écoulements impliquent des régimes de mélange irréalisables dans un éjecteur cylindrique).

L'inégalité $J_l\sqrt{2\gamma^2/(\gamma^2-1)I_0 Q} < 2$ indique qu'une mise en moyenne avec J_l, Q, I_0 constants est impossible. La mise en moyenne avec S, Q, I_0 constants est toujours possible.

12. A titre de conclusion soulignons encore une fois que la mise en moyenne entraîne automatiquement la disparition de certaines propriétés du flux gazeux. Par suite, lorsqu'on a affaire à des écoulements dans lesquels les détails de la distribution des paramètres du flux sont essentiels, une mise en moyenne conduisant à un nivellement sensible des paramètres est en principe impossible.

Comme tout procédé de mise en moyenne entraîne la disparition de certaines propriétés du flux, on ne saurait nommer un procédé dont l'application ne susciterait pas d'objections. Toutefois, une unification des méthodes de la mise en moyenne pour une vaste classe d'écoulements irréguliers est indispensable. Les procédés courants tels que le calcul de la moyenne arithmétique, de la moyenne sur la surface, de la moyenne des pressions totales sur la masse et plusieurs autres procédés utilisés pour calculer l'amenée d'énergie, les pertes et autres grandeurs, ne sont pas souvent justifiés. Il est vrai que ces méthodes sont commodes mais on ne peut les appliquer que si les résultats numériques obtenus ne s'écartent pas

des moyennes calculées à partir de la condition de conservation de Q, I_0 et S (en utilisant les valeurs moyennes pour le calcul des pertes effectives dans la section donnée).

Ainsi, dans la pratique, lorsqu'on entreprend de déterminer les pertes dans un flux gazeux évoluant sans échange énergétique (par exemple, dans les diffuseurs d'entrée d'un réacteur), on procède comme suit : on détermine le débit du gaz Q à travers la conduite en effectuant des mesures spéciales, puis, en utilisant les drainages tubulaires dans la paroi de la conduite à l'endroit où le flux est suffisamment nivelé, on calcule la pression statique moyenne p sur le périmètre de la section.

La température d'arrêt T_0 est posée constante dans le flux et on la mesure dans la chaudière où l'écoulement prend naissance. Ensuite en appliquant la relation

$$Q=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\,\frac{\lambda}{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2}\,\frac{p\Sigma}{\sqrt{RT_0}},$$

valable pour un flux de translation homogène, on détermine la quantité λ et d'après la formule

$$p_0=\frac{p}{\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

on calcule p_0, en d'autres termes, on établit la valeur des pertes. Cette méthode revient à effectuer une mise en moyenne en adoptant comme flux

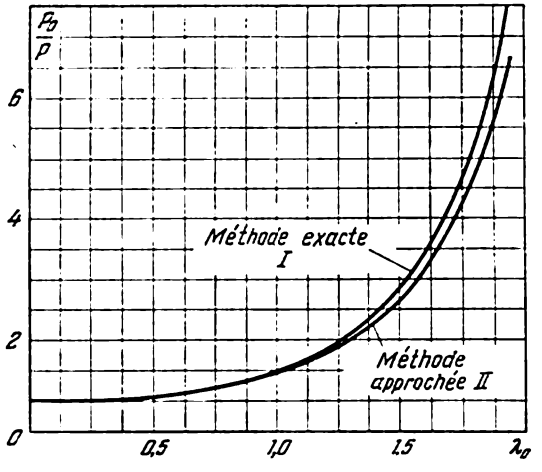


Fig. 116. Valeurs moyennes de la pression totale obtenues en conservant le débit, le flux d'enthalpie totale et le flux d'entropie (I) et en conservant le débit, le flux d'enthalpie totale et la pression statique moyenne sur le périmètre de section (II)

canonique un écoulement de translation homogène dont le débit, le flux d'enthalpie totale et la pression statique moyenne sur le périmètre de la section sont identiques à ceux du flux réel. Un calcul des pertes effectué à partir des paramètres moyens ainsi obtenus n'a guère de sens. Toutefois, les exemples de calcul montrent que les écarts entre les valeurs de la pression totale calculée d'après cette méthode et les valeurs exactes ne sont pas importants si le flux est faiblement irrégulier et si sont petites les vitesses de mouvement.

La figure 116 donne, en fonction de la vitesse réduite λ_0 sur l'axe de la conduite, les valeurs moyennes exactes de la pression totale p_0 et la pression totale p_0 calculée d'après la méthode simplifiée considérée, pour le cas où $p=\text{const}$, $T_0=\text{const}$ et la vitesse varie comme $u=u_0(1-r/\mathcal{R})^{1/7}$. L'erreur de calcul des pertes pour $\lambda_0<1$ ne dépasse pas 2 %.

On voit donc qu'en prenant certaines précautions on peut utiliser la méthode approchée simple de mise en moyenne décrite ci-dessus au lieu de la méthode exacte (mise en moyenne avec conservation de S, I_0, Q), en vue de déterminer les pertes lorsque les irrégularités sont faibles dans le flux.

§ 2. Les critères de similitude et les paramètres abstraits définissant les caractéristiques des compresseurs*)

Le problème de la similitude et du système de paramètres indépendants qui sous une forme commode et adaptée à la pratique décrivent les compresseurs des réacteurs en tenant compte de l'altitude, de la vitesse du vol et des propriétés de l'agent thermique, et qui sont valables aussi bien pour les compresseurs réels que pour leurs modèles, ne pose guère de difficultés. Néanmoins, la pratique montre qu'il n'est pas superflu de systématiser et d'éclaircir la question.

Les caractéristiques des bancs d'essai des turbopropulseurs et des compresseurs ainsi que la technique de la recherche expérimentale répondent à la nécessité de maintenir les critères de similitude.

Pour trouver les critères nécessaires et suffisants de la similitude mécanique établissant la correspondance entre les écoulements gazeux à l'entrée du compresseur et à l'intérieur de celui-ci l'on doit au préalable dégager le système de paramètres décrivant le phénomène. En d'autres termes, établissons le système de paramètres que l'on peut, dans les conditions de l'expérience, donner de façon arbitraire et dont on tirera toutes les caractéristiques du processus.

1. Relevons tout d'abord les paramètres qui caractérisent les propriétés mécaniques et thermiques de l'air — gaz exerçant une influence sur son écoulement dans le compresseur. Supposons que le gaz est parfait, c'est-à-

*) On trouvera la théorie des principaux groupes de moteurs hydrodynamiques et de moteurs à gaz dans le livre de L. Sédov, *Mécanique des milieux continus*, t. 2, Moscou, Ed. Mir, 1975.

dire que la pression p, la densité ϱ et la température T sont liées entre elles par l'équation de Clapeyron

$$p=\frac{R}{m}\varrho T, \tag{2.1}$$

où R est la constante des gaz parfaits, la même pour tous les gaz, et m le poids moléculaire, grandeur caractérisant la nature phisico-chimique du gaz.

Puis nous supposons que l'énergie interne du gaz se présente sous la forme*)

$$\varepsilon=c_v T+\text{const}, \tag{2.2}$$

où c_v est la capacité calorifique du gaz à volume constant.

On admet que c_v est la même dans tout le flux pour chaque écoulement concret.

L'équation d'état (2.1) et la formule (2.2) contenant les deux constantes physiques essentielles, c_v et R/m définissent complètement les propriétés thermiques et mécaniques internes du gaz dans des évolutions réversibles.

Au lieu des paramètres c_v et R/m on peut introduire les paramètres c_p et c_v (c_p est la capacité calorifique à pression constante) ou R/m et $\gamma=c_p/c_v$.

Comme on sait, pour les gaz parfaits ces grandeurs sont liées par la formule

$$c_p-c_v=\frac{R}{m}, \tag{2.3}$$

d'où

$$c_p=\frac{R}{m}\frac{\gamma}{\gamma-1} \quad \text{et} \quad c_v=\frac{R}{m}\frac{1}{\gamma-1},$$

donc les paramètres γ et R/m caractérisent complètement le gaz lors des évolutions réversibles.

La viscosité et la conductibilité thermique du gaz sont définies par les coefficients de viscosité μ et de conductibilité thermique $\varkappa$ respectivement.

Supposons ensuite que μ et $\varkappa$ sont uniformes dans un flux mais ils peuvent prendre des valeurs différentes pour des flux différents.

En schématisant le problème on peut s'appuyer sur des considérations physiques générales et supposer que les phénomènes tels que la condensation, la sublimation des vapeurs dans le flux, l'inertie de la capacité thermique, la dissociation, les interactions chimiques ainsi que la pondérabilité du gaz ne sont pas essentiels pour le fonctionnement normal du compresseur si bien que le système de paramètres R/m, γ, μ et $\varkappa$ caractérise exhaustivement la nature mécanique et thermique de l'air (gaz) dans les flux gazeux considérés.

2. L'écoulement de translation du gaz par rapport au compresseur à de grandes distances de celui-ci et l'état thermodynamique de gaz sont complètement définis par la pression d'arrêt p^*, la température absolue d'arrêt T^* et la vitesse du flux v_∞. Toutes les caractéristiques du flux de translation (densité, pression statique, etc.) peuvent être exprimées au moyen de p^*,

*) La constante additive de la formule (2.2) est non essentielle.

T^*, v_∞ à l'aide des formules élémentaires usuelles de la gazodynamique. Ces grandeurs doivent être mesurées ou elles sont définies par les conditions de l'expérience chaque fois qu'on fait l'essai d'un compresseur. Lors des calculs ces quantités doivent être données ou déterminées par des conditions supplémentaires.

3. Considérons les paramètres qui caractérisent le compresseur et les régimes de son fonctionnement*). Nous poserons le problème en supposant que les propriétés élastiques du compresseur n'influent pas sur ses caractéristiques**).

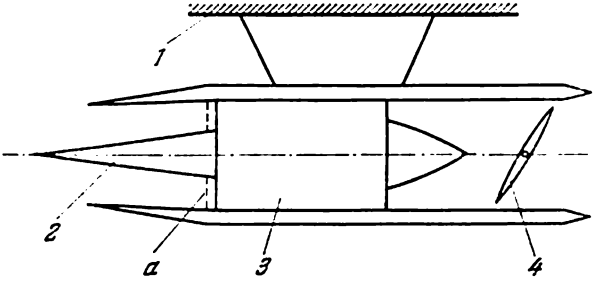


Fig. 117. Schéma d'un compresseur : *a* — section devant le compresseur; *1* — suspension, aile, fuselage; *2* — entrée et diffuseur d'entrée; *3* — roues tournantes et aubages directeurs; *4* — papillon

Pour des vols à grandes vitesses et pour différents régimes de fonctionnement du compresseur la distribution des vitesses à son entrée dépend sensiblement de la forme des appareils d'entrée et de la disposition du compresseur sur l'avion. Pour pouvoir établir les critères de similitude fixons la configuration de tous les éléments du compresseur et supposons qu'il se situe dans la suspension. Supposons que toutes les dimensions linéaires définies par la valeur de la dimension caractéristique D peuvent varier avec D (variation de l'échelle dans la simulation).

Pour les compresseurs axiaux adoptons en tant que dimension caractéristique le diamètre d'entrée et pour une centrifugeuse, le paramètre linéaire définissant la dimension transversale.

Le schéma d'un compresseur est donné sur la figure 117. La figure schématise aussi bien un compresseur axial qu'un compresseur centrifuge.

Le régime de fonctionnement peut être donné par le nombre de tours n des roues à aubage et par la position du volet, celui-ci schématisant les propriétés des dispositifs utilisant le gaz comprimé. Dans certains cas il s'avère plus commode de définir un régime de fonctionnement en donnant

*) Pour simplifier on se bornera dans ce qui suit à envisager des compresseurs à un étage.

**) Cette hypothèse est toujours admise dans la pratique, bien que dans certains cas les aubes du compresseur se déforment de façon différente selon les régimes; cela peut modifier les caractéristiques du compresseur. Les propriétés élastiques du matériau des aubes ont également une influence sur les paramètres du compresseur.

le débit massique G ou le débit volumique V^* du gaz à travers le compresseur au lieu de la position du régulateur ou de la résistance du circuit.

Le débit massique du gaz peut aisément être mesuré au cours de l'expérience; cette quantité constitue une caractéristique intégrale qui, pour le consommateur et dans toutes les applications des compresseurs, sert de grandeur fondamentale définissant le régime de fonctionnement et l'effet mécanique du compresseur.

Le débit volumique V^* s'exprime facilement par le débit massique si l'on convient de définir les volumes du gaz d'après l'état correspondant aux paramètres d'arrêt. On a

$$G=g\varrho^*V^*=g\frac{m}{R}\frac{p^*}{T^*}V^* \tag{2.4}$$

(g est l'accélération de la pesanteur).

Dans les essais au sol le débit V^* est égal au volume de gaz aspiré par le compresseur de l'atmosphère par seconde.

Parfois, on définit le volume d'après les paramètres d'entrée, en amont de la roue, dans la section a. Remarquons à cet égard qu'en amont de la roue la distribution des vitesses axiales peut être sensiblement irrégulière, ce qui cause des pertes à l'entrée de sorte que pour connaître le débit volumique il faut effectuer des mesures scrupuleuses de la distribution des caractéristiques du flux gazeux, ce qui n'est parfois ni réalisable ni nécessaire; de plus le débit volumique à l'entrée ne constitue pas parmi les caractéristiques de l'ensemble du compresseur un paramètre réellement indispensable à son emploi.

Toutefois, les spécialistes attribuent à la vitesse axiale à l'entrée c_a une grande importance lorsqu'il s'agit du profilage de la roue et de l'appareil distributeur d'un compresseur. Donc le débit volumique à l'entrée ainsi que la valeur moyenne de la vitesse axiale correspondante c_a sont en quelque sorte une caractéristique d'usage spécifique, nécessaire uniquement pour construire un compresseur et non pour en faire usage.

C'est la valeur c_a juste devant la roue qui présente un intérêt de premier plan. Lorsqu'on a un appareil distributeur, la valeur c_a devant la roue dépend surtout des propriétés de cet appareil.

Si l'on connaît les pertes à l'entrée du compresseur et si la température d'arrêt peut être supposée constante dans le flux, il est alors facile d'exprimer la valeur de la vitesse axiale moyenne correspondante au moyen des paramètres d'arrêt et du débit massique total. Pour calculer c_a on a les relations gazodynamiques

$$\varrho_a c_a S=\frac{G}{g}=\varrho^*V^*;$$

d'où

$$c_a\left(1-\frac{c_a^2}{2c_pT^*}\right)=\frac{V^*}{\sigma S}, \tag{2.5}$$

où S est la section de passage à l'entrée du compresseur et

$$\sigma=\frac{p_a^*}{p^*}=\frac{\varrho_a^*}{\varrho^*}.$$

S'il n'y a pas de refroidissement spécial du compresseur et si l'on assure une isolation thermique convenable, l'on est en droit de négliger l'échange de la chaleur entre le gaz et les éléments structuraux du compresseur; ceci nous dispense d'introduire des paramètres supplémentaires définissant le régime de fonctionnement du compresseur.

Ainsi donc, le système complet de paramètres de définition peut, en vertu des développements précédents, se présenter sous la forme

$$\frac{R}{m}=c_p\frac{\gamma-1}{\gamma};\quad \gamma=\frac{c_p}{c_v};\quad \mu,\varkappa,p^*,T^*,v_\infty,D,n,V^*. \tag{2.6}$$

Le système de paramètres (2.6) définit exhaustivement toutes les caractéristiques du régime de fonctionnement d'un compresseur telles que, par exemple, le rendement qui peut être introduit par d'autres moyens*), le taux de compression π, la vitesse axiale d'entrée c_a, la chute H, etc.

En même temps les grandeurs (2.6) doivent obligatoirement être mesurées ou connues dans toute expérience si simple soit-elle; de plus dans la plupart des expériences on doit mesurer ces grandeurs avec la plus grande précision possible. Dans les applications concrètes les valeurs de tous les paramètres (2.6) sont données.

En s'appuyant sur la théorie générale de la similitude**) on peut conclure que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les flux gazeux soient semblables consistent à maintenir constants les six paramètres abstraits suivants :

$$\gamma=\frac{c_p}{c_v},\quad \mathbf{P}=\frac{c_p\mu}{\varkappa}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{R}=\frac{\varrho^*V^*}{\mu D}=\frac{mp^*V^*}{\mu RDT^*}=\frac{G}{g\mu D}, \tag{2.8}$$

$$\lambda_\infty=\frac{v_\infty}{v_{cr}}=\frac{v_\infty}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{R}{m}T^*}}=\mathbf{M}_\infty\sqrt{\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)\mathbf{M}_\infty^2}}, \tag{2.9}$$

$$q=\frac{G}{G_{cr}}=\frac{4g\varrho^*V^*}{g\varrho_{cr}v_{cr}\pi D^2}=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{4V^*}{\pi D^2\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{R}{m}T^*}}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{n}=\frac{u}{v_{cr}}=\frac{\pi nD}{60\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{R}{m}T^*}}, \tag{2.11}$$

où u est la vitesse circonférencielle de la roue.

---

*) Le rendement peut être défini différemment. Comme le rendement doit caractériser la propriété d'après laquelle l'usager juge des qualités du compresseur, on choisit le plus souvent le rendement adiabatique défini par la formule $\eta_{ad}=L_{ad}/L$ où L est le travail réellement recueilli sur l'arbre du compresseur et L_{ad} est le travail qu'il faut fournir dans les transformations adiabatiques réversibles pour passer des états et des mouvements du gaz à l'entrée du compresseur à un état caractérisé par le même taux de compression à la sortie du compresseur (rendement défini d'après les paramètres du flux retardé).

**) Voir page 29.

Comme lors des essais les paramètres physiques γ et **P** ont les mêmes valeurs pour un même gaz, par exemple, pour l'air, ces valeurs restent en pratique automatiquement constantes.

Pour un compresseur donné le nombre de Reynolds dépend surtout du débit massique. Etant donné qu'avec la montée à vitesse constante le débit massique diminue, le nombre de Reynolds diminue également avec l'altitude. La diminution de l'échelle entraîne également la diminution du nombre de Reynolds, puisque le débit massique est approximativement proportionnel au carré des dimensions linéaires.

Le nombre de Reynolds exerce une influence négligeable lorsqu'il est élevé et la similitude a pratiquement lieu si le nombre de Reynolds n'est pas constant.

Toutefois il faut prendre en considération la variation du nombre de Reynolds dans la pratique. Si sa valeur diffère de la valeur réelle, il faut vérifier, en se basant sur les données expérimentales, si l'on peut négliger son effet.

L'influence de la viscosité sur les caractéristiques non dimensionnées du compresseur ne se manifeste que par l'intermédiaire du nombre de Reynolds (pour **P** constant). En particulier, les pertes sont en grande partie dues à la viscosité. Toutefois dans nombre de cas les pertes peuvent être calculées à l'aide de la théorie du gaz parfait comme on le fait pour les sauts de compression ou pour le mélange des gaz dans l'éjecteur. C'est pourquoi la variation du nombre de Reynolds peut s'avérer non essentielle.

Pour un débit volumique donné le nombre $\mathbf{M}_-$ ou le coefficient λ_- agit sur les caractéristiques des compresseurs dans la mesure où la compressibilité du gaz influe sur les lois de distribution des caractéristiques du flux gazeux à l'entrée de l'appareil directeur ou, s'il n'y a pas d'appareil directeur, à l'entrée de la roue du compresseur (section *a*, fig. 117).

Les paramètres du fluide moteur (gaz) à l'entrée du compresseur se définissent toujours complètement dans le cas d'un fluide parfait incompressible, et dans le cas d'un gaz quelconque à condition de tenir compte des pertes à l'entrée dans une description hydraulique, par les grandeurs p^*, T^* et V^*, indépendamment de la valeur de la vitesse v_- si bien que pour un fluide incompressible ou dans une description hydraulique le paramètre v_- et par conséquent $\mathbf{M}_-$ sont sans importance pour l'écoulement gazeux.

Cela explique pourquoi l'on fait couramment appel à la méthode de simulation des compresseurs selon laquelle la vitesse de vol n'est simulée qu'en faisant varier de façon appropriée la pression d'arrêt p^* et la température d'arrêt T^*. Cette technique s'avère pleinement valable et efficace à petites vitesses de vol.

Cependant, ce procédé devient inapplicable aux cas de longues entrées, d'entrées de configuration asymétrique, d'entrées obstruées par toutes sortes d'obstacles ou d'entrées courtes à sections brusquement variables ainsi que chaque fois où l'on a de grandes vitesses de vol, lorsqu'à l'entrée du compresseur la distribution des vitesses est irrégulière. Cette remarque concerne surtout les vitesses soniques et supersoniques lorsqu'au voisinage de l'entrée

au compresseur se forment des sauts de compression qui provoquent des pertes et des irrégularités dans le flux entrant dans le compresseur. Il est difficile d'évaluer au préalable ces pertes et ces irrégularités et de les simuler selon une méthode sans soufflage. Pour cette raison les essais des compresseurs qu'on pense à utiliser à grandes vitesses de vol doivent se faire dans un flux gazeux où l'on assure la valeur donnée du nombre M_∞ à l'aide d'une tuyère spéciale. Le flux incident doit imiter exactement l'écoulement autour des appareils d'entrée, car cela joue un rôle dans la formation du flux interne.

Les critères de similitude géométrique exigent également de simuler l'angle d'attaque ce qu'on réalise en orientant convenablement la tuyère par rapport à l'entrée du compresseur.

Les paramètres q et $\bar{n}$ sont fondamentaux; dans la pratique ces paramètres, les paramètres qui les remplacent (T_0^* — température caractéristique)

$$V^* \sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}} \quad \text{et} \quad n \sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}}$$

ou tout simplement V^* et n (etc.), constituent les principales variables indépendantes des diagrammes donnant les caractéristiques des compresseurs.

Du point de vue de l'aérodynamique les paramètres sans dimension q et $\bar{n}$ sont plus commodes et plus avantageux que les variables analogues indiquées plus haut pour les raisons suivantes.

La grandeur $q < 1$ est le rapport du débit effectif à travers le compresseur au débit maximal. La valeur de q est essentielle car il est très important d'obtenir un débit d'air aussi grand que possible pour un encombrement des turbopropulseurs aussi réduit que possible. Aussi doit-on considérer les valeurs maximales de q comme des caractéristiques essentielles qui permettent de comparer les différents compresseurs.

De plus, la valeur du paramètre q peut caractériser l'influence de la compressibilité dans le flux axial à l'entrée du compresseur.

Le paramètre $\bar{n}$ désignant les tours réduits ou le coefficient de la vitesse circonférencielle de la roue montre combien la vitesse circonférencielle est proche de la vitesse sonique.

Les paramètres q et $\bar{n}$ permettent d'appliquer directement les résultats des essais au sol aux conditions de vol à haute altitude et à grande vitesse ainsi que d'utiliser immédiatement les résultats des essais des compresseurs avec les différents gaz employés comme fluides moteurs (en respectant les critères de similitude). En utilisant les paramètres

$$V^* \sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}}, \quad n \sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}}$$

ou simplement V^* et n on ne tient compte, dans le premier cas, que de la variation de la température d'arrêt; ces paramètres ont l'avantage d'être simples, représentatifs et de faciliter les calculs concrets. Remarquons pourtant que la clarté d'une représentation est une affaire d'habitude et de traditions.

Il va sans dire que lorsqu'on compare les caractéristiques des compresseurs de dimensions diverses et essayés dans différentes conditions, il est plus avantageux de se servir, dans les diagrammes, des paramètres sans dimensions q et $\bar{n}$.

On a souvent avantage, dans la pratique, à utiliser des systèmes de paramètres indépendants tels que l'influence de certains de leurs paramètres aux régimes de fonctionnement présentant quelque intérêt devient insignifiante. Le nombre de paramètres indépendants essentiels se réduit ainsi dans bien des cas, ce qui permet de tirer des conclusions pratiques importantes et de réduire le nombre des essais.

Pour un compresseur, $\mathbf{M}_{\infty}$ et $\mathbf{R}$ constituent fréquemment dans le système $\mathbf{M}_{\infty}$, $\mathbf{R}$, q et $\bar{n}$ les paramètres dont l'influence est faible; on comprendra dès lors à quel point le choix des paramètres $\mathbf{M}_{\infty}$ et $\mathbf{R}$ est avantageux, surtout aux petites vitesses de vol.

Lorsque les débits relatifs sont faibles, c'est-à-dire avec q faibles, il est plus avantageux de choisir au lieu des paramètres q et $\bar{n}$ les paramètres c_a/u et $\bar{n}$, car dans ce système l'influence du paramètre n devient secondaire. Les principales caractéristiques sans dimension telles que $\frac{H}{u^2/g}$ et η_{ad} ne dépendent essentiellement que de c_a/u et elles dépendent faiblement de $\bar{n}$. Toutefois cette circonstance ne peut justifier suffisamment le choix des variables c_a/u et $\bar{n}$ au lieu de q et $\bar{n}$, ces deux paramètres étant essentiels pour des régimes de grandes vitesses qui sont les plus importants, de plus les paramètres q et $\bar{n}$ sont indispensables aux calculs.

En gardant les hypothèses appuyant les formules (2.5) on peut établir la relation entre les paramètres c_a/u, $\bar{n}$ et q, $\bar{n}$ sous la forme suivante :

$$\frac{c_a}{u}\left(1-\frac{c_a^2}{u^2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\bar{n}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\frac{\pi D^2}{4\sigma S}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{q}{\bar{n}}. \tag{2.12}$$

Avec le système de paramètres sans dimension (2.7) à (2.11) on obtient pour le compresseur les caractéristiques indépendantes des conditions d'essais. Dans ce cas on n'a pas à distinguer les caractéristiques de vol et les caractéristiques au sol, les débits de vol et les débits au sol, etc.

Les paramètres (2.7) à (2.11) permettent de choisir les conditions les plus avantageuses des essais pour obtenir les caractéristiques dont on a besoin au cours de l'élaboration et de la conception de nouveaux types de compresseurs. Pour cela on doit avant tout établir les dimensions des modèles sans perdre de vue les critères de commodité d'exécution des essais : sur de petits modèles il est difficile de mesurer les champs dans les flux de gaz et les nombres de Reynolds y sont faibles, tandis que les grands modèles exigent les bancs d'essai puissants ce qui rend également difficile l'exécution des essais.

La puissance requise peut être diminuée artificiellement par la réduction de la pression d'arrêt p^* et de la vitesse circonférencielle u. La pression d'arrêt influe sur le nombre de Reynolds. L'on parvient à abaisser la vitesse

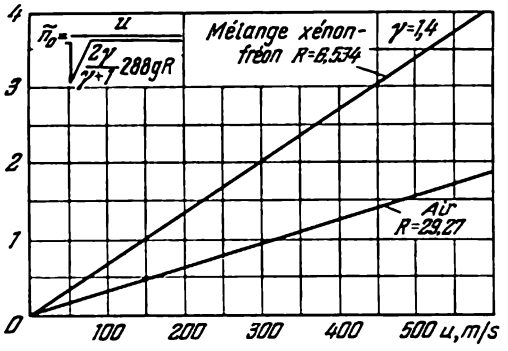


Fig. 118. Influence du poids moléculaire de gaz sur la valeur du nombre de tours réduit

circonférencielle en utilisant un gaz de poids moléculaire élevé ou en diminuant la température d'arrêt (fig. 118). (Sur la figure 118 les valeurs numériques de la constante des gaz sont données pour un kilogramme de gaz.)

La valeur de la vitesse circonférencielle est nettement limitée par la résistance des aubes des roues tournantes du compresseur soumises à l'action des forces centrifuges.

Avec l'altitude la température s'abaisse et nombre de tours réduit augmente pour une vitesse circonférencielle donnée. L'intervalle possible de variation des nombres de tours réduits en fonction de l'altitude et de la vitesse peut être établi aisément à l'aide des formules et des graphiques de la figure 119 (*a* et *b*). Pour une vitesse circonférencielle donnée, la valeur n_0 est constante et l'on peut la considérer comme la valeur n pour $v_\infty = 0$ et à la température

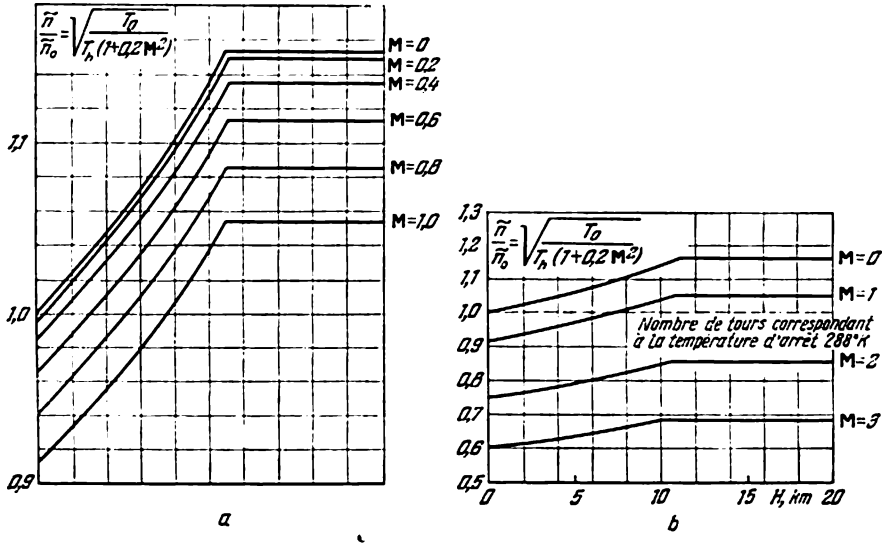


Fig. 119. Variation des tours réduits pour une vitesse de rotation constante du turbomoteur en fonction de l'altitude et de la vitesse du vol (les échelles d'altitude des graphiques *a* et *b* sont les mêmes)

normale de 15 °C; il est possible d'augmenter fortement la valeur $\bar{n}_0$ en utilisant des gaz de grand poids moléculaire.

Désignons par q_0 la valeur q répondant aux essais au sol au point fixe ($v_\infty = 0$) à une température et une pression normales.

Aux régimes de fonctionnement semblables on a

$$q = \frac{G_h}{G_{cr}} = q_0 = \frac{G_{sol}}{G_{cr.\,sol}},$$

d'où (aux régimes semblables)

$$\delta = \frac{G_h}{G_{sol}} = \frac{G_{cr}}{G_{cr.\,sol}} = \frac{\varrho_{crh} v_{crh}}{\varrho_{cr} v_{cr.\,sol}} = \frac{\varrho_h^*}{\varrho_{sol}} \sqrt{\frac{T^*}{288}},$$

étant donné que

$$\varrho_{sol} = \frac{1}{8} \frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}^4}, \quad \varrho_h^* = \varrho_h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{M}_\infty^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

et que

$$T^* = T_h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{M}_\infty^2\right),$$

alors

$$\delta = \frac{G_h}{G_{sol}} = 8\varrho_h \sqrt{\frac{T_h}{288}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{M}_\infty^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{p_h}{p_{at}} \sqrt{\frac{288}{T_h}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathbf{M}_\infty^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}.$$

Les figures 120 et 121 donnent les graphiques de δ en fonction de l'altitude H et du nombre $\mathbf{M}_\infty$.

Soient $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_0$ les valeurs du nombre de Reynolds pour deux régimes de fonctionnement d'un même compresseur.

Il est manifeste dans ce cas que

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_0} = \frac{G}{G_0} \frac{\mu_0}{\mu}.$$

Si les paramètres $\mathbf{R}_0$, G_0 et μ_0 correspondent aux essais au sol à des conditions normales et $\mathbf{R}$, G et μ à des essais en vol pour q égal, alors

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_0} = \delta \left(\frac{T_h}{288}\right)^{-n},$$

où n est l'exposant de la loi de puissance donnant la viscosité de l'air en fonction de la température.

Il est évident qu'à l'aide des graphiques 120 et 121 il est facile de dégager le nombre de Reynolds en fonction des conditions du vol pour des régimes de fonctionnement du compresseur où la valeur q se conserve.

A partir des conditions d'utilisation d'un turbopropulseur et des critères de résistance on peut déterminer l'intervalle de variation des paramètres (2.7)-(2.11) pour le modèle grandeur nature. Les essais de maquette et les essais au sol doivent être effectués de façon qu'on puisse déterminer expérimentalement l'influence des paramètres (2.7)-(2.11) dans le domaine voulu sur les appareils semblables en ce qui concerne les éléments essentiels.

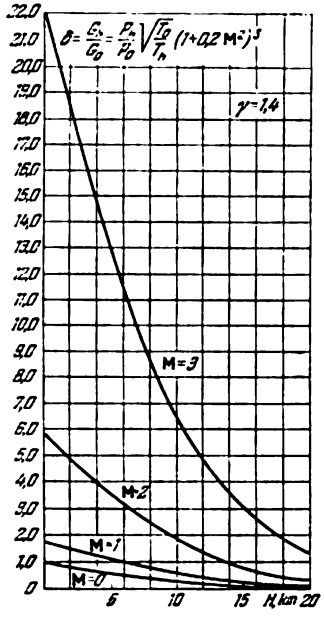


Fig. 120. Variation du débit massique de l'air à travers le moteur pour des régimes semblables du turbomoteur en fonction de l'altitude et de la vitesse du vol

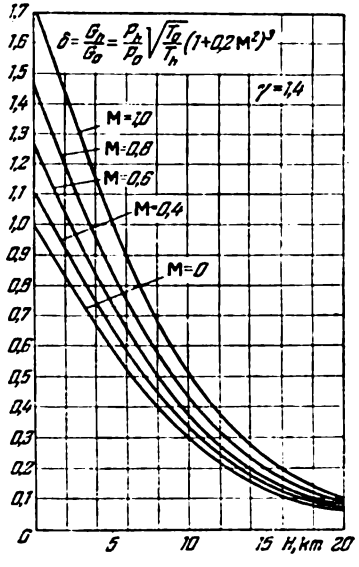


Fig. 121. Variation du débit massique de l'air à travers le moteur pour des régimes semblables du turbomoteur en fonction de l'altitude et de la vitesse du vol

Au cours des essais de maquette on peut réduire la puissance requise et la vitesse circonférencielle en passant aux gaz de grand poids moléculaire. Dans cette perspective l'utilisation du fréon ayant un poids moléculaire six fois plus grand que celui de l'air pourrait s'avérer très avantageuse.

Les données actuelles montrent qu'il est nécessaire de tenir compte dans les calculs pratiques de la variation du paramètre $\gamma = c_p/c_v$.

En mélangeant du fréon avec d'autres gaz on parvient à obtenir de grands poids moléculaires tout en conservant la valeur $\gamma = 1{,}4$, celle de l'air. Le problème de l'emploi de gaz lourds dans l'aérodynamique expérimentale nécessite une analyse plus détaillée.

§ 3. Le rendement de propulsion d'une hélice parfaite et d'un réacteur parfait*)

Le rendement de propulsion d'un moteur se définit par la formule**)

$$\eta = \frac{Pv}{W} = \frac{\text{travail utile}}{\text{travail dépensé}}, \tag{3.1}$$

où P est la poussée du moteur, v la vitesse du vol, W la puissance énergétique amenée au flux.

En introduisant le rendement parfait on cherche à établir un critère qui permettrait d'estimer quelles sont les limites possibles d'utilisation de l'énergie amenée, à quel point on peut s'approcher de cette limite dans une conception concrète d'un moteur.

On sait par la thermodynamique que le rendement parfait est inférieur à l'unité. Le rendement parfait est atteint dans une transformation parfaite réversible. Le rendement réel est toujours inférieur au rendement parfait à cause de l'irréversibilité inévitable du phénomène. Il est toutefois souvent possible de concevoir des machines qui permettent d'approcher de très près les conditions parfaites. La différence entre le rendement réel et le rendement parfait constitue la caractéristique la plus importante de la perfection technique d'un moteur.

Les conditions optimales d'exploitation d'un moteur parfait peuvent servir de base permettant de choisir les paramètres essentiels et le régime de fonctionnement du moteur. Les valeurs du rendement parfait peuvent également s'avérer utiles dans l'analyse des possibilités qui s'offrent.

Définissons un réacteur comme un moteur à gaz créant une propulsion grâce à l'interaction des éléments du moteur avec l'air en écoulement auquel est communiquée une énergie***) (thermique, dégagée lors de la combustion du propergol, mécanique, fournie par le travail de l'hélice ou du compresseur, etc.).

Ainsi donc, il semble possible d'envisager simultanément la théorie de l'hélice parfaite et celle des turbomoteurs, turbopropulseurs, statoréacteurs parfaits, ainsi que d'autres versions du réacteur.

La figure 122 schématise l'écoulement stationnaire relatif de l'air dans un moteur parfait. En pointillé sont figurées les lignes de courant des particules d'air participant à l'interaction avec les éléments du moteur. Les traits continus sont les lignes de courant décrites par des particules qui ne prennent pas part à l'interaction énergétique. Appelons flux interne toutes les lignes de première espèce et flux externe les lignes de seconde

*) Ce paragraphe est extrait du cours spécial *Ecoulements unidimensionnels de gaz* donné par l'auteur à l'Université de Moscou en 1951/52.

**) On considère ici le rendement total qui est égal, pour les moteurs thermiques, au produit du rendement thermique par le rendement mécanique exprimant le rapport du travail utile au travail mécanique dépensé par le moteur.

***) Pour simplifier, on négligera dans ce qui suit la masse supplémentaire de propergol introduite dans le flux aérien.

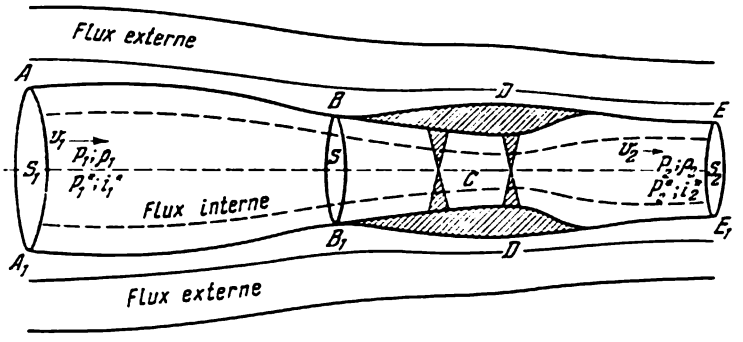


Fig. 122. Schéma du flux d'air relatif pour un réacteur parfait

espèce. Les éléments constructifs du moteur (corps internes, diffuseurs, tuyères, aile, fuselage, etc.) sont hachurés.

On sait de l'aérodynamique qu'à de grandes vitesses de vol les forces d'action sur l'aéronef par de flux externe et interne sont liées entre elles et sont physiquement inséparables. De plus, la mécanique des fluides démontre que dans des conditions idéales, lorsqu'on a un écoulement gazeux stationnaire réversible continu autour des corps et lorsque le gaz ne reçoit pas d'énergie extérieure, la poussée et la résistance sont nulles*). Pour cette raison, lorsqu'il y a interaction énergétique, on doit entendre par poussée d'un moteur parfait la force résultante qu'exerce le flux gazeux sur les surfaces extérieures et intérieures de tous les éléments du moteur.

Au cas parfait on supposera que l'écoulement de gaz dans tous les éléments est réversible et, en particulier, sans sauts de compression. Pour les vitesses subsoniques du flux incident de gaz parfait on peut sans nul doute conférer au corps du moteur des formes spéciales qui rendent possible un écoulement externe continu autour du corps et du jet.

Aux vitesses supersoniques, les régions de la surface du corps et du jet léchées par le flux externe peuvent dans le cas parfait être considérées comme cylindriques, leurs génératrices étant parallèles à la vitesse du flux incident. Dans ce cas le flux extérieur est un flux de translation de sorte que la résistance extérieure est évidemment nulle.

On peut indiquer sans peine les formes des corps non cylindriques de dimensions finies pour lesquelles la résistance extérieure sera inférieure à un nombre aussi petit que l'on veut donné au préalable.

Du point de vue de la mécanique générale et de la thermodynamique, utiliser les schémas d'écoulement avec les sauts de compression autour d'une hélice parfaite ou d'un moteur quelconque parfait, pour établir des rendements parfaits, est incorrect.

Les problèmes où l'on envisage ce genre d'écoulement présentent un certain intérêt théorique et pratique, mais les rendements calculés pour les

*) Ce phénomène est le fameux paradoxe de D'Alembert-Euler (voir la déduction qui suit).

écoulements comportant des sauts de compression ne permettent de tirer aucune conclusion sur les possibilités optimales limites. Dans la pratique les rendements des moteurs bien conçus peuvent dépasser les rendements calculés pour les écoulements avec sauts.

Pour appliquer les équations générales de la mécanique et le premier principe de la thermodynamique isolons à l'aide d'une surface de contrôle $AA_1BB_1CEE_1$ (fig. 122) une « veine » d'air traversant le moteur et constituant le flux interne. La lettre C symbolise toutes les surfaces internes, la lettre D toutes les surfaces externes du moteur.

Il est facile de montrer que la force définie comme

$$F=\int (p-p_-)\, d\sigma, \tag{3.2}$$

exercée par le flux externe de gaz sur la surface de la veine $AA_1BB_1DEE_1$, est nulle ($d\sigma$ est la projection de l'élément de surface sur le plan normal au flux incident; p_-, la pression à l'infini).

En effet, soit tout d'abord un écoulement sur la surface $AA_1BB_1DEE_1$ dans un tube cylindrique parallèle à la vitesse du flux incident. En appliquant à ce flux le théorème de la quantité de mouvement et la loi de conservation de la masse on peut écrire :

$$F=(p_2-p_1)(\Sigma-S_2)+\varrho_1 v_1(\Sigma-S_1)(v_2-v_1), \tag{3.3}$$

$$\varrho_1 v_1(\Sigma-S_1)=\varrho_2 v_2(\Sigma-S_2), \tag{3.4}$$

où Σ est l'aire de la section du tube et les indices 1 et 2 se rapportent respectivement aux sections du flux à l'infini en amont et en aval du corps.

On a de (3.4) :

$$\Sigma-S_2=\frac{\varrho_1 v_1(S_2-S_1)}{\varrho_2 v_2-\varrho_1 v_1},$$

$$\Sigma-S_1=\frac{\varrho_2 v_2(S_2-S_1)}{\varrho_2 v_2-\varrho_1 v_1};$$

cela étant, il vient de (3.3) :

$$F=\frac{p_2-p_1+\varrho_2 v_2(v_2-v_1)}{\varrho_2 v_2-\varrho_1 v_1}\,\varrho_1 v_1(S_2-S_1)=\varrho_1 v_1(S_2-S_1)\int_{v_1}^{v_2}\frac{\varrho_2 v_2-\varrho v}{\varrho_2 v_2-\varrho_1 v_1}\,dv,$$

puisque

$$\varrho v\, dv=-dp.$$

Si les aires S_1 et S_2 sont finies et si Σ tend vers l'infini, alors $p_2\to p_1=p_-$ et $v_2\to v_1$; il s'ensuit que $F\to 0$.

Notons que ce résultat est également valable dans les cas où le flux interne est irréversible et le flux externe est réversible.

Désignons par Q le débit massique de gaz dans le flux interne :

$$Q=\varrho_1 v_1 S_1=\varrho_2 v_2 S_2. \tag{3.5}$$

La force résultante P s'exerçant sur les surfaces extérieure et intérieure du moteur et la puissance fournie W s'expriment au moyen des paramètres du flux à l'infini dans la veine en amont et en aval du moteur d'après les formules*)

$$P=Q(v_2-v_1), \tag{3.6}$$

$$W=Q(i_2^*-i_1^*), \tag{3.7}$$

où i^* est l'enthalpie exprimée dans les paramètres du flux arrêté.

Les formules (3.5), (3.6) et (3.7) sont valables pour le cas des flux externes adiabatiques réversibles et pour tout flux interne irréversible.

Les quantités v_1, p_1^*, T_1^*, ϱ_1, i_1 sont données par les conditions du vol. Le coefficient du débit

$$\varphi=\frac{S_1}{S},$$

où S est l'aire de l'entrée au moteur, S_1 l'aire de la veine aérienne à l'infini amont; les paramètres de l'état et du mouvement du gaz en aval du moteur sont définis par sa construction et son régime de fonctionnement; de plus les pressions statiques à l'infini amont et à l'infini aval sont les mêmes.

Dans le cas le plus général l'équation (3.5) donne le rapport des aires de la veine du flux interne qui suit :

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\varrho_1 v_1}{\varrho_2 v_2}=\frac{q(\mathrm{M}_1)}{q(\mathrm{M}_2)}\,\frac{p_1^*\sqrt{T_2^*}}{p_2^*\sqrt{T_1^*}}, \tag{3.8}$$

où $q(\mathrm{M})$ est une fonction connue de la densité relative du flux.

Il vient de l'équation d'état

$$\pi=\frac{p_2^*}{p_1^*}=\left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\varkappa,$$

où $\varkappa=e^{\frac{s_1-s_2}{c_p-c_v}}$; s_1 et s_2 sont les entropies par unité de masse (tout comme c_p et c_v) dans les sections S_1 et S_2.

Ordinairement $\varkappa<1$, l'entropie augmentant à cause des pertes**) ou par suite du préchauffage.

L'égalité des pressions statiques entraîne

$$\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_1^2};$$

*) Ici on suppose uniformes les caractéristiques du flux à l'infini dans la veine en amont et en aval du moteur.

**) Pour une hélice, un compresseur ou une turbine la valeur $\varkappa$ est égale au rapport des pressions d'arrêt, $\frac{p_{2\,\mathrm{rel}}^*}{p_{1\,\mathrm{rel}}^*}$, dans un flux stationnaire par rapport aux parties tournantes.

d'où

$$M_2=\sqrt{\left(\frac{2}{\gamma-1}+M_1^2\right)\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-\frac{2}{\gamma-1}}, \tag{3.9}$$

$$M_2>M_1 \quad \text{pour} \quad \pi>1.$$

En se servant de cette relation on trouve

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{q(M_1)}{q(M_2)\pi^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\varkappa^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}. \tag{3.10}$$

Sur la figure 123 le rapport S_2/S_1 est donné en fonction de M_1 et π pour $\varkappa=1$. Il est évident que les pertes et le préchauffage font augmenter le rapport S_2/S_1 mais cette augmentation est faible, étant donné que l'exposant de $\varkappa$ est petit $\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\ll 1\right)$.

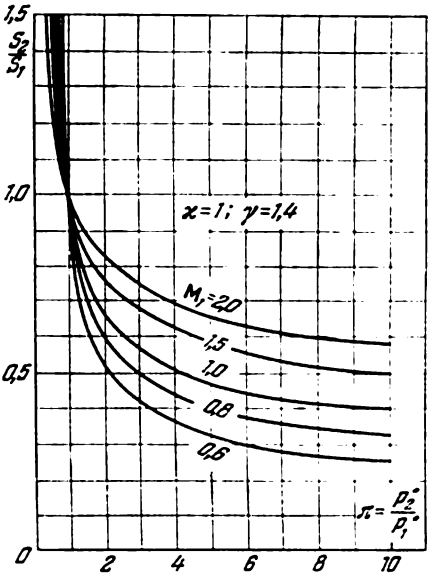


Fig. 123. Variation du rapport de la section S_2 de la veine à l'infini amont à la section S_1 de la veine à l'infini aval en fonction du taux de compression et du nombre M_1 du vol

Pour établir les relations nécessaires suivantes il faut s'appuyer sur le mécanisme d'apport de l'énergie au flux interne.

On connaît déjà la théorie du statoréacteur parfait pour les vitesses subsoniques aussi bien que pour les vitesses supersoniques*).

Considérons à titre d'exemple la théorie d'un ventilateur parfait ou d'une hélice parfaite, ou en général, d'un dispositif quelconque dans lequel l'énergie mécanique est amenée au gaz au moyen d'une transformation adiabatique réversible.

Dans ce cas les conditions de la constance de l'entropie et de l'égalité des pressions statiques entraînent l'égalité des densités et des températures dans les sections S_1 et S_2. Pour cette raison

$$W=Q\left(\frac{v_2^2-v_1^2}{2}\right),$$

en outre on obtient la formule connue

$$\eta=\frac{2}{1+\frac{v_2}{v_1}} \tag{3.11}$$

généralisée à des vitesses supersoniques.

*) G. Abramovitch, *Gazodynamique appliquée* (en russe), Gostechizdat, 1963.

Pour l'air le rapport des vitesses v_2/v_1 est aisément exprimé au moyen du taux de pression $\pi=p_2^*/p_1^*$ et du nombre M_1 du vol.

On a $p_1=p_2$, $\varrho_1=\varrho_2$ et donc $c_1=c_2$, où c est la vitesse du son; la formule (3.9) donne

$$\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\left(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right)\frac{2}{(\gamma-1)M_1^2}+\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}},$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{q(M_1)}{q(M_2)\pi^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\varkappa^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}$$

et donc

$$\eta=\frac{2}{1+\sqrt{\left(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right)\frac{2}{(\gamma-1)M_1^2}+\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}. \tag{3.12}$$

Le graphique de cette fonction est donné à la figure 124.

Pour dégager le rôle de l'aire S, section d'entrée du moteur, on aura intérêt à analyser la relation entre le rendement de propulsion η et le coefficient de charge

$$B=\frac{2P}{\varrho_1 v_1^2 S}=\frac{2P}{\varrho_1 v_1^2 S_1}\varphi=2\varphi\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right). \tag{3.13}$$

On en tire

$$\eta=\frac{1}{1+\frac{B}{4\varphi}}. \tag{3.14}$$

Il découle avec évidence de la formule (3.14) que le rendement η augmente à mesure qu'augmente le coefficient du débit φ. En d'autres termes, pour la section d'entrée donnée, le cas optimal est celui où une quantité maximale d'air passe à travers le moteur.

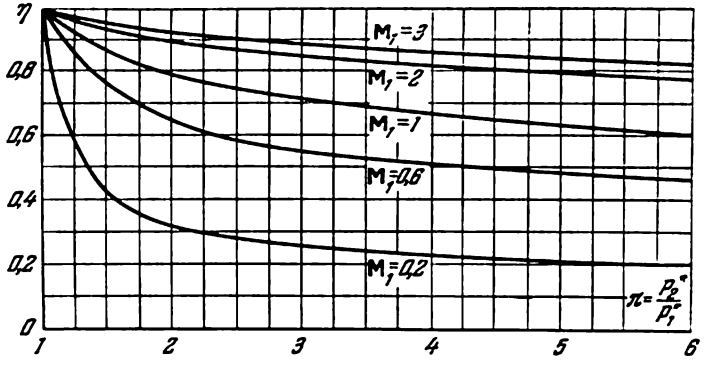


Fig. 124. Rendement de propulsion en fonction du taux de pression et du nombre M_1 du vol

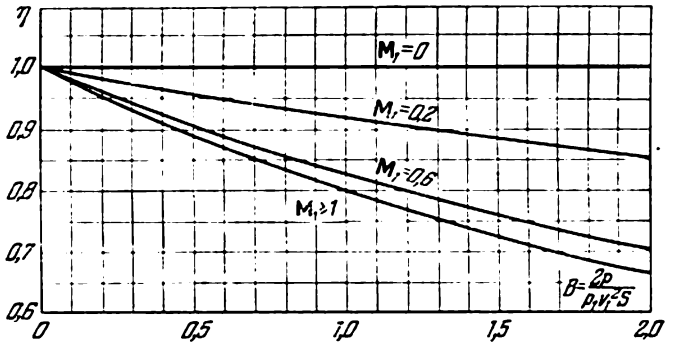


Fig. 125. Rendement de propulsion d'un mouvement mécanique parfait (hélice) pour des vitesses de vol sub- et supersoniques en fonction du coefficient de charge

Ceci sert à déterminer la valeur optimale du coefficient φ. Pour des flux supersoniques ($\mathbf{M} \geq 1$) il faut poser $\varphi = 1$.

Quant aux vitesses subsoniques, φ atteint son maximum au cas où la vitesse du gaz à l'entrée du moteur (dans la section S) est égale à la vitesse du son. Les compresseurs d'avion modernes ont nettement tendance à s'approcher de la réalisation de cette condition.

Dans ce cas on a

$$\varphi = \frac{S_1}{S} = \frac{\varrho_{cr} v_{cr}}{\varrho_1 v_1} = \frac{1}{q(\mathbf{M}_1)} . \tag{3.15}$$

Ainsi donc on trouve que

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{B}{4}} \tag{3.16}$$

pour les vitesses supersoniques et

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{Bq(\mathbf{M}_1)}{4}} \tag{3.17}$$

pour les vitesses subsoniques.

Pour les petites valeurs de $\mathbf{M}_1$ la formule (3.17) ne coïncide pas avec la formule usuelle du rendement parfait d'une hélice que fournit la théorie du cercle de l'hélice. C'est que le problème formulé de la sorte a un sens plus large, car il comprend le cas du fonctionnement de l'hélice dans des ajutages (buses, ajutages de Corte, hélice dans un tunnel, etc.) lorsqu'une partie notable de la poussée est due à l'action des ajutages. Les relations (3.16) et (3.17) sont représentées à la figure 125.

La théorie de l'hélice parfaite exposée ci-dessus permet également de conclure qu'un moteur de poids minimal doit être conçu de manière que les dispositifs d'entrée et la veine du moteur garantissent à l'entrée au compresseur une vitesse du flux voisine de la vitesse du son.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DE L'ASTROPHYSIQUE

§ 1. Quelques données empiriques

L'astrophysique moderne a montré l'insuffisance de la dynamique des systèmes de points matériels discrets ou de l'hydrostatique des masses fluides, théories qui représentaient jusqu'à ces derniers temps la source principale de toutes sortes de modèles et de conceptions dans l'astronomie classique, pour l'analyse et la compréhension des mouvements internes dans les étoiles, de l'évolution des étoiles et des diverses nébuleuses. Actuellement, l'étude des mouvements des objets célestes en tant que corps gazeux doit nous permettre de résoudre les principaux problèmes de la cosmogonie et c'est dans cette voie qu'il faut chercher l'explication et l'interprétation de nombreux effets observés. Aujourd'hui c'est devenu évident : une théorie des mouvements célestes doit inclure les formulations et les solutions des divers problèmes dynamiques de l'écoulement gazeux que l'on peut considérer comme des modèles théoriques embrassant les particularités essentielles du mouvement et de l'évolution des étoiles et des nébuleuses. Pour concevoir et analyser ces modèles il faut utiliser les méthodes, les techniques et les représentations de la dynamique théorique moderne des gaz, de l'aérodynamique, et formuler et résoudre les problèmes mécaniques correspondants en termes de l'astrophysique.

Cette nécessité explique l'organisation à Paris en 1949 d'un congrès international qui a réuni les astrophysiciens et les spécialistes éminents de l'aérodynamique qui jusque-là s'étaient spécialisés dans les problèmes de l'aviation et dans les théories de la propagation d'ondes d'explosion.

Au terme de ce congrès on a publié un recueil de rapports avec discussions d'où il ressort que la recherche sur les principaux phénomènes célestes doit comprendre la position de problèmes du mouvement, dans le champ de gravitation et avec ondes de choc, des masses gazeuses animées de grandes vitesses relatives, de problèmes des écoulements gazeux turbulents où l'on tient compte des champs électromagnétiques, etc.

L'analyse préalable a montré que les écoulements gazeux déjà connus ne suffisent pas pour expliquer les phénomènes célestes; il faut construire de nouveaux modèles et résoudre de nouveaux problèmes de la dynamique des gaz.

En nous fondant sur les méthodes de la théorie dimensionnelle développées dans le chapitre IV et appliquées à la théorie des écoulements

gazeux unidimensionnels à symétrie sphérique nous avons procédé à l'analyse de certains écoulements gazeux qui sont susceptibles à notre avis de répondre aux traits essentiels relevés dans les observations astronomiques.

On considérera plus loin certaines applications à la théorie de l'éclat et de la brillance et de la structure interne des étoiles, à la théorie de la variation de l'éclat des céphéides et à la théorie des explosions des novae et des supernovae. Donnons maintenant un aperçu de certaines données essentielles concernant ces phénomènes que nous fournit l'astrophysique.

Les caractéristiques principales d'une étoile sont son éclat et sa brillance perçus à l'œil. L'éclat peut être mesuré à l'aide d'appareils spéciaux dits photomètres. Il y a longtemps que l'intensité de l'éclat d'une étoile sert de base à la notion de magnitude.

Dès l'Antiquité, à l'époque où les observations se faisaient à l'œil nu, les étoiles furent classées dans six classes par leur éclat apparent décroissant. Les étoiles les plus brillantes furent rapportées à la première classe et appelées étoiles de première magnitude. Puis suivaient les étoiles de seconde magnitude, etc. On comprend qu'un certain nombre d'étoiles se situaient dans les intervalles entre les classes et de ce fait on leur attribuait les grandeurs (magnitudes) apparentes s'exprimant en nombres non entiers. D'après la définition présentée, l'éclat apparent d'une étoile diminue quand la magnitude augmente. Actuellement, les photographies à longue exposition des étoiles, obtenues à l'aide de puissants télescopes modernes, nous permettent d'étudier les étoiles faibles auxquelles on peut attribuer la 22e ou même la 23e magnitude.

La classification des étoiles décrite ci-dessus dépend de la méthode de définition de la brillance. Selon qu'on détermine la magnitude à l'œil nu ou à l'aide d'une photographie on peut arriver à des conclusions différentes, l'œil humain étant plus sensible aux radiations rouges et jaunes tandis que la plaque photographique réagit plus aux radiations bleues et violettes. Pour cette raison on distingue les magnitudes visuelle, photographique, photoélectrique, radiométrique, etc.

Les magnitudes déterminées à l'aide d'un instrument sensible indistinctement à toutes les longueurs d'onde et corrigées de l'absorption par l'atmosphère terrestre et dans l'instrument sont dites bolométriques. Les magnitudes bolométriques caractérisent le rayonnement intégral d'une étoile qui atteint les couches supérieures de l'atmosphère terrestre. Dans l'exposé qui suit on entendra par magnitude une magnitude bolométrique.

Evidemment, la magnitude m de l'étoile étudiée est définie par la quantité de l'énergie rayonnante E_m parvenue à la Terre par unité de temps. Cette énergie est proportionnelle à l'énergie totale émise par l'étoile en unité de temps, i.e. à la luminosité de l'étoile $\mathfrak{L}^*$ et inversement proportionnelle au carré de la distance l de la Terre à l'étoile.

Par ailleurs, les propriétés de l'œil humain décrites par la loi célèbre de Weber-Fechner sont telles que lorsque la magnitude m, établie sur la base de l'intensité sensorielle, varie suivant les termes d'une progression

arithmétique, les intensités correspondantes E_m de l'excitateur varient suivant les termes d'une progression géométrique.

Ce fait a permis d'établir la relation

$$m = -2{,}5 \log E_m + \text{const} \tag{1.1}$$

pouvant être mise sous la forme

$$\frac{E_{m_2}}{E_{m_1}} = 10^{\frac{m_1 - m_2}{2{,}5}} = (2{,}512)^{m_1 - m_2}. \tag{1.2}$$

La magnitude apparente du Soleil $m_2 = -26{,}7$, celle de l'étoile Sirius, la plus brillante des étoiles visibles, $m_1 = -1{,}6$; d'où il vient que $m_1 - m_2 = 25{,}1$ et $E_{\text{Soleil}}/E_{\text{Sirius}} \approx 10^{10}$; c'est-à-dire que l'éclat apparent du Soleil est de dix milliards de fois supérieur à celui de Sirius.

La magnitude apparente étant essentiellement fonction de la distance séparant l'étoile de la Terre, on introduit, dans le but d'avoir une caractéristique comparative des étoiles, la notion de magnitude visuelle absolue M qui est égale à la magnitude apparente définie précédemment à condition de placer l'étoile considérée à la distance de 10 parsecs de la Terre*).

A partir des formules

$$m = -2{,}5 \log \frac{\mathfrak{L}^*}{l^2} + \text{const}$$

et

$$M = -2{,}5 \log \frac{\mathfrak{L}^*}{10^2} + \text{const},$$

il vient

$$M = m + 5 - 5 \log l; \tag{1.3}$$

dans la formule (1.3) la distance l de l'étoile à la Terre est exprimée en parsecs.

La magnitude absolue du Soleil est 4,8; cela signifie qu'à la distance de 10 parsecs le Soleil nous semblerait une faible étoile de cinquième magnitude à peine visible à l'œil nu. La magnitude de Sirius est 1,3. D'où il vient que

$$\frac{\mathfrak{L}^*_{\text{Sirius}}}{\mathfrak{L}^*_{\text{Soleil}}} = 10^{\frac{4{,}8 - 1{,}3}{2{,}5}} \simeq 25.$$

On voit donc que la luminosité de Sirius est 25 fois supérieure à celle du Soleil. On peut directement mesurer la magnitude m d'une étoile; si l'on parvient à déterminer, à partir de quelques données supplémentaires, la magnitude absolue M, alors en s'appuyant sur la formule (1.3) on peut facilement calculer la distance l de l'étoile.

Au nombre des caractéristiques les plus importantes on compte, outre la luminosité de l'étoile $\mathfrak{L}^*$, la masse de l'étoile $\mathfrak{M}$ et son rayon $\mathfrak{R}$. Grâce

*) Un parsec vaut 3,26 années-lumière, soit $3{,}08 \cdot 10^{13}$ kilomètres, et correspond à la distance à la Terre d'une étoile dont la parallaxe annuelle serait de une seconde.

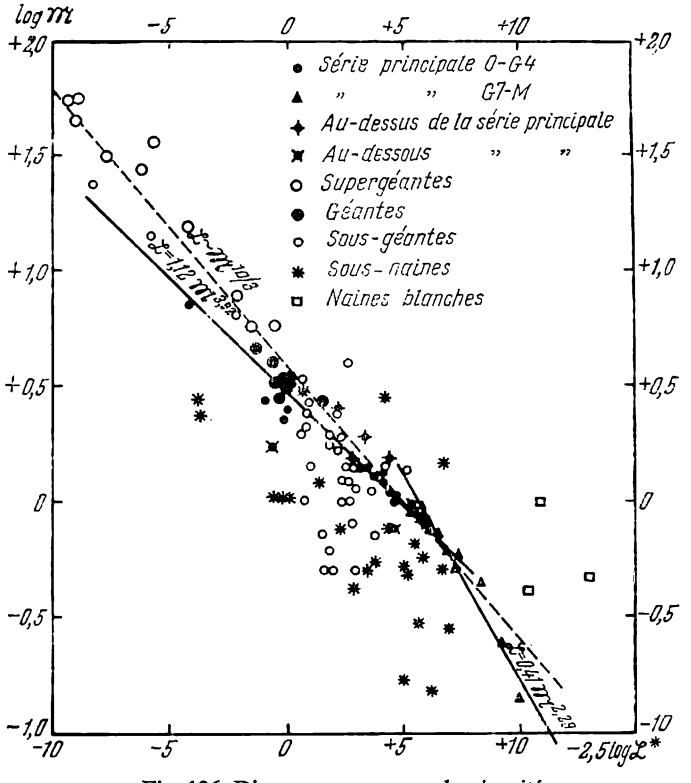


Fig. 126. Diagramme masse — luminosité

à diverses observations et à une analyse appropriée les astronomes possèdent actuellement des données sur les grandeurs $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{R}$. L'étude de ces données montre qu'il existe, pour différents groupes d'étoiles, des relations du type*)

$$\mathfrak{L}^* = f_1(\mathfrak{M}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{R} = f_2(\mathfrak{M}). \tag{1.4}$$

Les figures 126 et 127 reproduisent les diagrammes extraits des ouvrages de P. Parénago et A. Massévitch qui mettent en évidence les relations de ce genre. On reviendra aux relations (1.4) au § 3.

Considérons maintenant certaines données sur les étoiles dites variables. En 1784 l'astronome Goudrike publia pour la première fois ses observations**) faisant état de la découverte que l'éclat de l'étoile désignée par δ

*) Voir P. Parénago et A. Massévitch, *Etude de la relation masse—rayon—luminosité* (en russe). Publications de l'Institut astronomique Sternberg, t. XX. Ed. de l'Université de Moscou, 1951.

**) Phil. Trans., t. 76 (1786), 48-61.

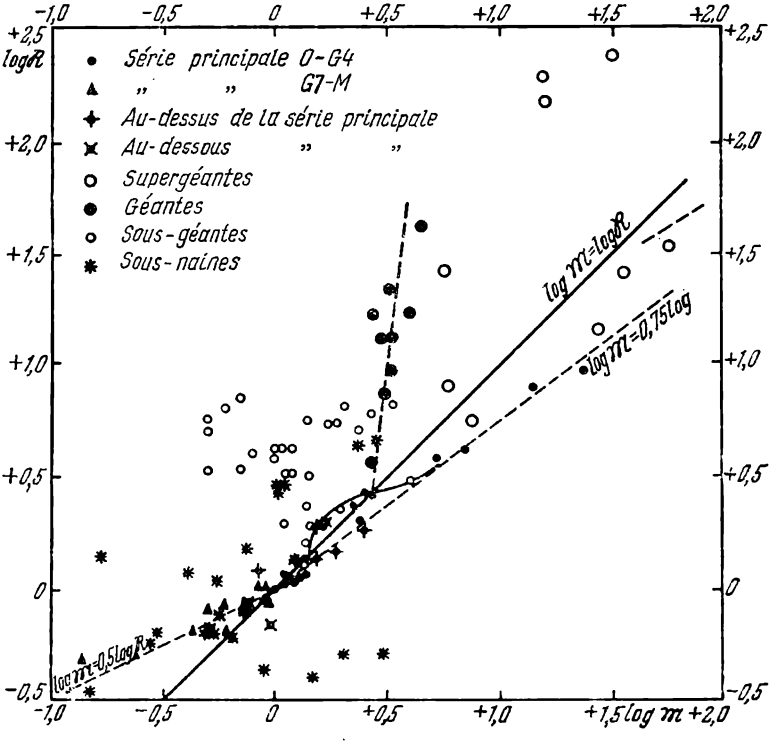


Fig. 127. Diagramme masse — rayon

et située près de la tête de Céphée varie périodiquement. Actuellement on connaît un grand nombre d'étoiles variables qui ont reçu le nom de céphéides; on les a découvertes en divers endroits de notre Galaxie ainsi qu'en autres galaxies.

Les lois empiriques établissant la relation entre les périodes de pulsations et les magnitudes absolues visuelles des céphéides ont aidé les astronomes à déterminer à l'aide de la formule (1.3) les distances des autres galaxies*), à obtenir un matériel de grande valeur pour l'étude de l'évolution des étoiles et de bien d'autres questions.

La figure 128 groupe les données photométriques sur la variation de l'éclat m de l'étoile δ Cephei en fonction du temps. Les courbes correspondantes des autres céphéides se présentent en gros de la même manière. Les observations récentes montrent que la période de δ Cephei constitue 5 jours 8 heures 53 minutes et 27, 46 s, cette valeur étant approximativement constante. Des études astronomiques ont montré que les variations de la

*) C'est actuellement la méthode principale de détermination des distances de l'ordre de centaines de millions d'années-lumière.

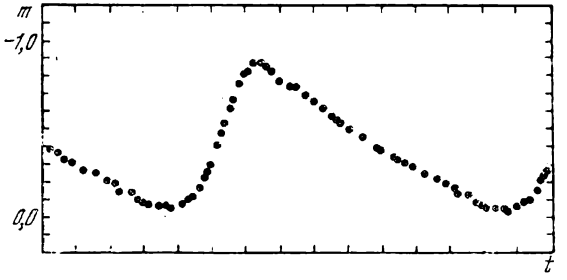


Fig. 128. Courbe d'éclat photovisuelle de l'étoile δ Cephei

période sont possibles quoiqu'elles soient petites; ainsi, pour δ Cephei la période a diminué de une seconde en 20 années. Les périodes des céphéides typiques se trouvent dans l'intervalle d'une demi-journée à 80 jours.

Les mesures spectroscopiques s'appuyant sur l'effet Doppler montrent que la variation de l'éclat des céphéides s'accompagne d'une variation, de même période, des vitesses radiales des particules gazeuses rayonnantes, ce qui témoigne de la présence d'un écoulement radial dans la photosphère des céphéides. L'amplitude d'oscillations de la vitesse radiale est de l'ordre de quelques kilomètres par seconde; pour δ Cephei cette amplitude est de 39 km/s. Les courbes d'éclat et celles des vitesses radiales se ressemblent fort.

On en conclut donc à la présence indubitable d'écoulements gazeux considérables dans la photosphère des céphéides. De plus, les observations ont établi que la variation de l'éclat s'accompagne de la variation du spectre et de la température efficace. Les variations de la température et du rayon de la photosphère conditionnent la variation de l'éclat. Le rapport des luminosités d'une céphéide (l'énergie lumineuse totale émise par l'étoile) varie considérablement au cours d'une pulsation; pour δ Cephei cette variation est égale à 2.

Le tableau 1 regroupe certaines données pour les céphéides types.

Dans ce tableau, $\mathfrak{M}$ est la masse de l'étoile, $\mathfrak{M}_\odot$ la masse du Soleil; $\mathfrak{R}$ le rayon de l'étoile (le rayon du Soleil $\mathfrak{R}_\odot = 6{,}96 \cdot 10^5$ km); $\delta\mathfrak{R}$ la demi-différence entre les valeurs maximale et minimale du rayon de l'étoile, M la magnitude moyenne absolue visuelle. La colonne « Asymétrie de la courbe d'éclat » fournit le rapport de la durée de l'affaiblissement de l'éclat, du maximum au minimum, à la durée de sa croissance.

La colonne « Type spectral » se rapporte à la caractéristique de température de l'étoile. Les céphéides, comme toutes les étoiles variables, sont des étoiles d'une très grande luminosité et sont en règle générales des supergéantes. Leur masse et leurs dimensions dépassent de beaucoup celles de notre Soleil.

Les rayons sont calculés dans l'hypothèse que la photosphère (qui se dilate ou se contracte avec l'étoile) se compose des mêmes particules gazeuses. On voit que les variations du rayon $\delta\mathfrak{R}$ sont de l'ordre de quelques millions

Tableau 1

Données sur les céphéides types*)

Etoile	Type spectral	Période, jours	M, magnitude	Amplitude de M, magnitudes	$\delta\mathfrak{R}$, 10^6 km	$\mathfrak{R}$, 10^6 km	$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}$	Asymétrie de la courbe d'éclat
l Car	F8-K0	35,52	−5,52	1,2	8,59	145	50	1,7
Y Oph	F8-G7	17,12	−4,00	0,61	1,79	59	23	1,4
X Cyg	F8-K0	16,39	−3,92	0,69	6,12	41	19	1,7
ζ Gem	cG1V	10,15	−3,16	0,42	1,82	43	15	1,0
S Sge	F8-G7	8,38	−2,87	0,50	1,47	33	13	2,0
W Sgr	F2-G5	7,59	−2,72	0,85	1,93	24	11	2,5
η Aql	F2-G9	7,18	−2,62	0,51	1,77	25	11	2,0
X Sgr	F5-G9	7,01	−2,60	0,67	1,33	28	11	2,0
Y Sgr	F5-G8	5,77	−2,30	0,74	1,35	27	10	1,4
δ Cep	F4-G6	5,37	−2,19	0,61	1,27	23	9	2,5
T Vul	F3-G5	4,44	−1,95	0,71	0,97	17	8	1,7
α UMi	cFV	3,97	−1,81	0,08	0,17	20	8	1,7
SU Cyg	F0-G1	3,85	−1,78	0,74	0,71	12	7	2,5
RT Aur	F1-G5	3,73	−1,74	0,80	0,86	14	7	3,3
SZ Tau	F4-G2	3,15	−1,58	—	0,46	14	7	1,0
SU Cas	F2-F9	1,95	−1,15	0,33	0,30	9,2	5	1,0
RR Lyr	B9-F2	0,567	−0,35	0,85	0,17	4,3	4	2,0

*) Cette table est extraite du livre de S. Rosseland, *The Pulsation theory of variable Stars*, Oxford, 1949.

de kilomètres. Si la frontière de la photosphère en dilatation coïncide avec le front de l'onde de choc, la variation du rayon de la photosphère sera plus grande, car la vitesse du saut est plus grande que la vitesse enregistrée des particules gazeuses derrière le saut. Il est évident que la variation de la luminosité de l'étoile par suite de la variation des dimensions de la photosphère peut être considérable dans le cas des céphéides. Cet effet s'accentue encore lorsque le front de l'onde de choc, frontière de la photosphère, est précédé d'une couche de gaz relativement froid qui absorbe l'énergie rayonnante, surtout aux moments où le rayon de la photosphère est minimal.

On appelle nova une étoile dont l'éclat croît brusquement de 10 à 12 magnitudes et parfois même de 15 magnitudes; cela signifie que l'éclat visuel de telles étoiles augmente de 10^4 à 10^6 fois. Les explosions des novae sont brusques; leur éclat augmente pendant un ou deux jours, tandis que la libération de l'énergie provoquant l'éclat se produit semble-t-il en quelques heures tout au plus.

Une fois le maximum atteint, l'éclat se met à décroître jusqu'à la magnitude initiale.

La figure 129 donne la variation de l'éclat de la nova Aquilae explosée en 1918.

La variation de l'éclat s'accompagne de brusques variations des spectres. On note un déplacement caractéristique de toutes les raies vers le violet qui

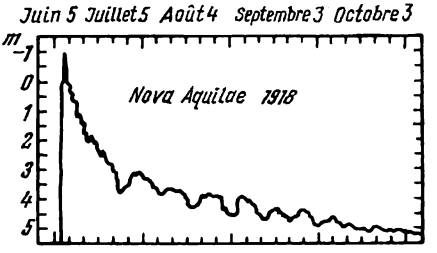


Fig. 129. Courbe de variation d'éclat de la nova Aquilae

s'explique par les grandes vitesses radiales du gaz rayonnant. Ces vitesses sont de l'ordre de quelques centaines à quatre mille km/s. Quelque temps après l'explosion on voit apparaître dans le spectre d'une nova les raies brillantes interdites caractéristiques de l'émission d'un gaz très raréfié et des spectres des nébulosités gazeuses. Les spectres des novae avant l'explosion et beaucoup d'années après l'explosion appartiennent au type O des étoiles les plus chaudes. Pour la nova Aquilae on a établi, par la méthode Zanster d'après les raies He-II, que trois mois après l'explosion la température de l'étoile était de 65 000° (la température du Soleil est de 6000°).

Le diamètre d'une nova à son maximum est comparable au diamètre de l'orbite de la Terre. D'après les divers calculs les astronomes estiment l'énergie dégagée lors de l'explosion d'une nova à 10^{45}-10^{46} ergs. Cette énergie est égale à l'énergie qu'émettrait le Soleil en 10 000-100 000 ans. Dans notre Galaxie on compte environ 30 explosions de novae par an.

Entre les novae et les céphéides se place un type intermédiaire d'étoiles variables, novae récurrentes qui s'explosent plusieurs fois, parfois en l'espace de quelques années. C'est par exemple le cas de l'étoile Mira Ceti qui explose tous les 320-370 jours ; pendant l'explosion son éclat varie de 1500 fois.

On peut mentionner les étoiles dites novae naines du type U Gémeaux qui explosent faiblement — éternuement stellaire — toutes les une ou deux semaines. La figure 130 représente la courbe d'éclat de ces étoiles.

Mentionnons enfin l'étoile R Coronae Borealis dont la courbe d'éclat est donnée à la figure 131. Les brusques évanouissements de l'éclat s'expliquent par l'absorption de la lumière par les masses de carbone éjecté par l'étoile.

Les explosions des novae sont des phénomènes étonnants, des explosions cosmiques colossales, mais les explosions des étoiles dites supernovae représentent des catastrophes monstrueuses, encore plus gigantesques et à

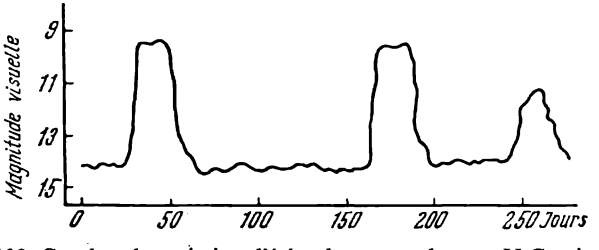


Fig. 130. Courbes de variation d'éclat des novae du type U Geminorum

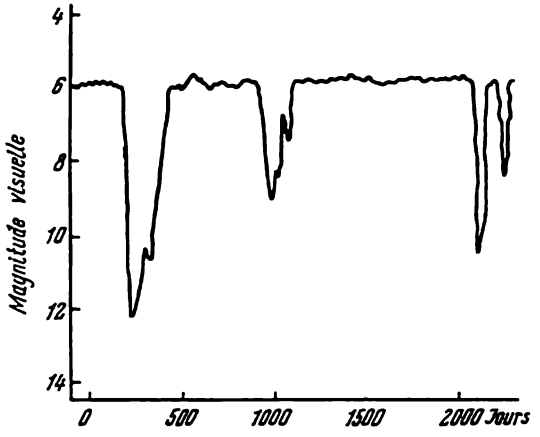


Fig. 131. Courbe de variation d'éclat de R Coronae Borealis

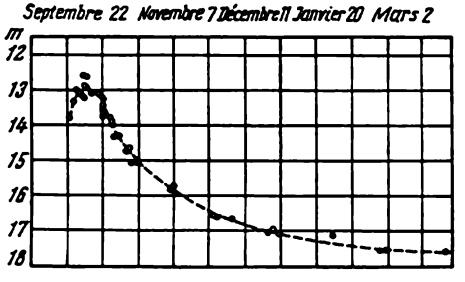


Fig. 132. Courbe de variation d'éclat d'une supernova dans la nébuleuse spirale NGC 1003

peine imaginables. Pendant l'explosion la luminosité d'une supernova croît d'un milliard de fois et devient comparable à la luminosité totale de toutes les étoiles de la Galaxie.

La supernova la plus brillante qu'on ait observé a explosé dans NGC 5253 (sa magnitude absolue a atteint $-18{,}4$). Son éclat maximal était de 15 milliards de fois plus fort que celui du Soleil.

La figure 132 reproduit la courbe d'éclat type d'une supernova. L'éclat des supernovae décroît suivant une courbe monotone ; l'affaiblissement de l'éclat des novae s'accompagne d'oscillations. Les explosions des supernovae sont un phénomène rare. Pendant les 1000 dernières années on n'aurait observé dans notre Galaxie que trois supernovae : la première explosa, d'après les chroniques chinoises, en 1054 non loin de ζ Tauri (constellation du Taureau). Aujourd'hui en cet endroit se situe une nébulosité, il

s'agit de la Nébuleuse du Crabe. Cette nébulosité est actuellement en expansion rapide. Au centre de la Nébuleuse du Crabe se place une étoile faible mais très chaude d'une température dépassant 100 000 °C. La seconde supernova paraît-il fut l'étoile observée par Tycho Brahé ; elle explosa en 1572 dans la constellation de Cassiopée et brilla dans le ciel pendant environ un an (elle fut visible en plein jour). La troisième a éclaté en 1604 dans *Ophiuchus*. Une nébulosité s'observe actuellement à sa place.

Dans d'autres galaxies les astronomes ont déjà observé plus de 100 supernovae. Etant donné la distance, les instruments dont on dispose ne permettent l'observation des supernovae dans les galaxies extérieures qu'au moment du maximum de leur éclat.

D'après les estimations des astronomes, les diamètres des supernovae au moment du maximum peuvent dépasser de 250 fois les diamètres correspondants des novae ordinaires et de 5-6 fois le diamètre de notre système solaire, diamètre de l'orbite de Pluton. En un laps de temps de l'ordre de quelques jours l'explosion d'une supernova met en jeu une énergie estimée à 10^{48} ergs; c'est l'énergie qu'aurait émise le Soleil en 10^7 d'années. Les données spectroscopiques témoignent que les particules gazeuses de la photosphère émissive sont animées d'une très grande vitesse, de l'ordre de 6000 km/s, lors de l'explosion d'une supernova.

Les observations décrites ci-dessus sur les supernovae, les novae et les variations de la luminosité des céphéides montrent que ces phénomènes sont intimement liés à l'écoulement des masses gazeuses colossales qui constituent ces étoiles variables.

Aux paragraphes qui suivent on posera les problèmes des écoulements gazeux non stationnaires que l'on peut approximativement assimiler aux modèles des oscillations des céphéides et des explosions des novae et des supernovae et on en donnera dans certains cas des solutions.

§ 2. Les équations d'équilibre et de mouvement d'une masse de gaz simulant une étoile

Pour établir un schéma décrivant qualitativement l'équilibre et l'écoulement des masses gazeuses constituant une étoile il faut poser les équations d'équilibre et de mouvement. On donne ci-dessous ces équations pour les masses de gaz gravitant selon la loi de Newton. Pour les masses en mouvement on ne considérera que le cas du mouvement radial en présence de la symétrie sphérique.

Pour un mouvement à symétrie sphérique l'équation de continuité traduisant la loi de conservation de la masse a la forme

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \varrho v}{\partial r}+\frac{2\varrho v}{r}=0, \tag{2.1}$$

où ϱ est la densité, v la vitesse radiale des particules gazeuses, r la distance du centre de symétrie et t le temps. En équilibre (au repos) cette équation est identiquement satisfaite.

Etant donné les gigantesques échelles linéaires et les vitesses d'écoulement énormes des masses gazeuses, il est tout à fait légitime de négliger la viscosité du gaz; on écrira donc l'équation des impulsions en tenant compte des forces de gravitation et en supposant que le gaz n'est pas visqueux, qu'il est parfait :

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{f\mathcal{M}}{r^2}=0, \tag{2.2}$$

où $f=6{,}670\cdot 10^{-8}$ cm^3/g s^2 est la constante gravitationnelle, p la pression totale, somme des pressions moléculaire et lumineuse, $\mathcal{M}(r, t)$ la masse du gaz à l'intérieur de la sphère de rayon r. Comme on sait, s'il y a symétrie sphérique, l'action de toutes les masses sur une masse ponctuelle distante de r du centre de symétrie est égale à la force d'attraction d'un point matériel placé au centre et pourvu de masse $\mathcal{M}(r, t)$. Pour déterminer $\mathcal{M}(r, t)$ on a l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r}=4\pi r^2\varrho \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}=4\pi\int_0^r r^2\varrho\, dr. \tag{2.3}$$

Comme la température de la substance à l'intérieur de l'étoile est très élevée — de l'ordre de millions de degrés — et comme au voisinage de la surface extérieure elle est de l'ordre de quelques milliers de degrés, on peut assimiler la substance stellaire au gaz parfait même si la pression et la densité sont extrêmement grandes. Aussi en admettant encore qu'il y a équilibre thermodynamique local, écrit-on l'équation d'état sous la forme

$$p=p_{\text{mol}}+p_{\text{lum}}=\frac{R\varrho T}{\mu}+\frac{a}{3}T^4, \tag{2.4}$$

où T est la température absolue, $R=8{,}3144\cdot 10^4$ ergs/degré·mole la constante des gaz parfaits, μ la masse moléculaire (masse d'une mole de gaz $[\mu]=$ $=$g/mole) définie par la composition chimique du gaz*) et $a=7{,}569\cdot 10^{-15}$ ergs/cm^3·degré^4 la constante de densité de rayonnement (constante de Stefan).

La pression de la lumière devient comparable à la pression moléculaire à de très hautes températures seulement ou sous des pressions extrêmement faibles. Pour cette raison en analysant la structure et les écoulements internes du gaz dans les étoiles on peut habituellement négliger la pression de la lumière devant la pression moléculaire ce qui revient à remplacer l'équation (2.4) par l'équation de Clapeyron

$$p=\frac{R\varrho T}{\mu}. \tag{2.4'}$$

*) Les températures élevées à l'intérieur de l'étoile occasionnent une ionisation complète des éléments légers. Lorsque l'ionisation est complète, μ pour tous les éléments est voisin de deux excepté pour l'hydrogène ($\mu=0{,}5$) et pour l'hélium ($\mu=1{,}33$).

Au lieu de l'équation de conservation de l'énergie servons-nous de la conséquence de cette équation et du théorème des forces vives, notamment de l'équation de la chaleur reçue, qui dans le cas général a pour expression

$$\frac{dE}{dt}+\frac{dA^{(i)}}{dt}=\frac{dQ^{(e)}}{dt}, \tag{2.5}$$

où E est l'énergie interne de la particule sans énergie potentielle interne de gravitation, $\frac{dA^{(i)}}{dt}$ le travail en unité de temps des forces des contraintes internes (le travail des forces gravitationnelles*) n'y entre pas), $\frac{dQ^{(e)}}{dt}$ l'apport extérieur de chaleur en unité de temps. En vertu des hypothèses faites précédemment, l'équation de la chaleur reçue peut se présenter sous la forme

$$c_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d}{dt}\frac{1}{\varrho}=\varepsilon, \tag{2.5'}$$

où c_v est la chaleur massique du gaz à volume constant, fonction de la composition chimique de la substance ; ε l'énergie totale dégagée dans une unité de masse gazeuse en unité de temps. La valeur ε peut différer de zéro par suite du rayonnement, de l'absorption, des réactions chimiques ou nucléaires ou de la conduction. Si l'étoile-gaz est en équilibre, le bilan de l'énergie se résume par l'équation

$$\varepsilon=0.$$

Etant donné que l'étoile émet de l'énergie dans l'espace environnant, il devrait y avoir à l'intérieur de l'étoile en équilibre des sources d'énergie. L'étude de l'équilibre des étoiles pour diverses lois de distribution des sources d'énergie montre que la répartition des pressions et de la densité à l'intérieur de l'étoile et, en particulier, leurs valeurs au centre de l'étoile dépendent très peu de la distribution des sources d'énergie. Les calculs effectués en posant la distribution des sources uniforme dans toute la masse de l'étoile ou en admettant que la même quantité d'énergie se dégage dans un point, centre de l'étoile, donnent des caractéristiques d'état voisines. Il convient d'ajouter que la quantité d'énergie dégagée par suite des transformations physico-chimiques dépend sensiblement de la température. La température au centre de l'étoile étant maximale, on peut dans certains cas admettre que la partie principale de l'énergie se dégage au voisinage du centre de l'étoile. Les calculs donnent à penser que cette hypothèse s'accorde bien avec la réalité**).

---

*) Le travail des forces gravitationnelles internes et l'accroissement de l'énergie gravitationnelle interne se simplifient dans le premier membre de l'équation (2.5).

**) Voir V. Ambartzoumian, E. Moustel, A. Séverny et V. Sobolev, *Astrophysique théorique* (en russe), M., Gostechizdat, 1952; voir également: S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Chicago, 1939.

Ceci nous autorise à utiliser occasionnellement des schémas dans lesquels on admet que l'énergie ne peut se dégager qu'au centre de l'étoile.

Actuellement on admet l'hypothèse scientifiquement motivée selon laquelle une dissipation continuelle d'énergie par l'étoile par rayonnement serait due soit à l'énergie gravitationnelle dégagée au cours de la compression de l'étoile (cf. p. 194, équation (3.13)), soit à des réactions nucléaires à l'intérieur de l'étoile.

Les types des réactions nucléaires dépendent sensiblement des températures et de la réserve du « combustible ».

On a établi à la base de considérations physiques et de données sur la composition chimique des étoiles que le type principal des réactions nucléaires est la transmutation des noyaux d'hydrogène en noyaux d'hélium. Les calculs montrent que pour les étoiles du type Soleil le bilan des apports et des dépenses énergétiques pendant l'existence de l'astre serait dû à des réactions nucléaires se déroulant avec combustion de l'hydrogène. Cette réaction affecte faiblement la masse de l'étoile, en tout 0,007 de la masse initiale, bien que le Soleil émette chaque seconde une énergie évaluée, en vertu de la formule $E=mc^2$ (c est la vitesse de lumière), à 4 millions de tonnes et cela dure déjà depuis au moins 5-6 milliards d'années.

L'énergie peut être transférée par émission du centre vers la périphérie de l'étoile ; étant donné l'absorption et l'émission propre, la distribution de l'énergie suivant le spectre de fréquences peut varier dans ce processus, mais en équilibre la somme d'énergies émise, absorbée et transmise par conduction*) est nulle. Adoptons en tant qu'hypothèse approximative que cette situation se conserve également lors des processus non stationnaires, en d'autres termes, envisageons les écoulements adiabatiques du gaz**) ($\varepsilon=0$).

On démontre sans peine que l'énergie totale émise par une céphéide pendant la période de variation de son éclat est petite par rapport à la réserve globale de l'énergie gravitationnelle et interne de l'étoile. Cela peut également expliquer la faible influence des lois de distribution des sources d'énergie stellaire sur la distribution de la densité et de la pression au sein de l'étoile pour le cas des étoiles ordinaires et des céphéides. Pour cette raison il est possible d'admettre que lors du mouvement non stationnaire de l'étoile toute entière, l'énergie émise au centre et envoyée dans l'espace extérieur durant chaque période d'oscillations ne joue pas un rôle essentiel. Pour les mouvements non stationnaires nous adoptons enfin que le poids moléculaire μ et le coefficient de conduction thermique c_v sont constants dans toute la masse de l'étoile.

---

*) L'énergie transmise par conduction est insignifiante par rapport à celle transmise par émission.

**) Par ailleurs, certains processus violents s'accompagnant d'une grande dépense d'énergie dégagée et de grandes températures permettent de supposer un échange thermique intense tant par radiation qu'autrement tel qu'on peut admettre que dans le champ des vitesses perturbé la température est uniforme mais éventuellement variable dans le temps. Voir les problèmes des explosions p. 258.

D'après les hypothèses faites ci-dessus on peut fonder la description des mouvements non stationnaires des modèles gazeux des étoiles sur le système d'équations suivant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \varrho v}{\partial r}+\frac{2\varrho v}{r}&=0,\\ \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{f\mathcal{M}}{r^2}&=0,\\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r}-4\pi r^2\varrho&=0,\\ \frac{\partial \frac{p}{\varrho^\gamma}}{\partial t}+v\frac{\partial \frac{p}{\varrho^\gamma}}{\partial r}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

où $\gamma=c_p/c_v$ est l'indice de Poisson. La dernière des équations (I) se déduit directement des équations (2.4') et (2.5') lorsque $\varepsilon=0$. Le système (I) se compose de quatre équations à quatre fonctions inconnues : ϱ, v, p, $\mathcal{M}$.

Si $\gamma\neq c_p/c_v$ et $\gamma=\text{const}$, le système (I) définit les écoulements de gaz polytropiques.

En cas d'équilibre les équations (I) se simplifient et se réduisent à une équation

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr}+\frac{4\pi f}{r^2}\int_0^r r^2\varrho\, dr=0,$$

contenant deux fonctions inconnues ϱ et p. Pour déterminer la distribution des températures il faut connaître la distribution des sources d'énergie au sein de l'étoile et utiliser les équations de la théorie du transfert de l'énergie rayonnante.

Dans le cas de la symétrie sphérique et en admettant la réversibilité thermodynamique du phénomène le système d'équations décrivant la distribution des caractéristiques d'état à l'intérieur de l'étoile en équilibre peut être écrit ainsi*) :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr}+\frac{f\mathcal{M}}{r^2}=0, \quad \mathcal{M}=4\pi\int_0^r r^2\varrho\, dr, \quad p=\frac{R\varrho T}{\mu}+\frac{a}{3}T^4,\\ &\frac{d}{dr}\frac{R^4T^4}{3}=-\frac{\varkappa_1\mathfrak{L}\varrho}{4\pi r^2}, \quad \varkappa_1=\frac{\varkappa R^4}{ac}, \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dr}=4\pi r^2\varrho\varepsilon^*, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

où $\varkappa$ est le coefficient d'absorption, c la vitesse de lumière, ε^* l'intensité des sources d'énergie émise par unité de masse de la matière stellaire en unité de temps, $\mathfrak{L}(r)$ le flux d'énergie à travers la sphère de rayon r.

*) Voir V. Ambartzoumian, E. Moustel, A. Séverny, V. Sobolev, *Astrophysique théorique* (en russe), M., Gostekhizdat, 1952, p. 5.

Pour obtenir les solutions des équations d'équilibre (II) on peut prendre la masse $\mathcal{M}$ en tant que variable indépendante et se servir des conditions aux limites suivantes :

au centre de l'étoile pour $\mathcal{M}=0$

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0, \tag{2.6}$$

à la surface de l'étoile pour $\mathcal{M}=\mathfrak{M}$

$$\varrho=0 \quad \text{et} \quad T=0. \tag{2.6'}$$

Si les sources sont distribuées continûment à l'intérieur de l'étoile, la quantité $\mathfrak{L}_0$ doit être posée nulle. S'il y a au centre de l'étoile une source concentrée d'énergie, on a $\mathfrak{L}_0 \neq 0$.

La température à l'intérieur de l'étoile dépassant de beaucoup celle à la surface, les astrophysiciens admettent ordinairement qu'à la surface de l'étoile $T=0$. Pour μ, $\varkappa$ et ε^* donnés la solution du système (II) dépend de trois constantes arbitraires soumises à une condition aux limites au centre (2.6) et à deux conditions (2.6') à la surface de l'étoile.

Si le poids moléculaire μ, le coefficient d'absorption $\varkappa_1$ et l'intensité des sources d'énergie ε^* sont donnés en fonction de ϱ et T, soit

$$\mu=\mu(\varrho, T), \quad \varkappa_1=\varkappa_1(\varrho, T) \quad \text{et} \quad \varepsilon^*=\varepsilon^*(\varrho, T), \tag{2.7}$$

le système d'équations (II) et les conditions aux limites (2.6) et (2.6') définissent complètement la solution qui a la forme

$$\left.\begin{aligned} \varrho&=\varrho(\mathcal{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \ldots), & T&=T(\mathcal{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \ldots),\\ \mathfrak{L}&=\mathfrak{L}(\mathcal{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \ldots), & r&=r(\mathcal{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

où a_1, a_2, ... sont des constantes physiques entrant dans le système (II) et les relations fonctionnelles (2.7).

Si $\mathfrak{L}_0=0$, on tire de (2.8) les formules suivantes pour la luminosité et le rayon de l'étoile :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}^*&=\mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, a_1, a_2, \ldots),\\ \mathfrak{R}&=r(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, a_1, a_2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Ainsi donc, la résolution du problème posé permet d'établir la relation entre la luminosité et la masse de l'étoile, entre son rayon et sa masse et par conséquent fournit la base à une analyse théorique des résultats empiriques décrits au § 1 du chapitre présent.

Les relations (2.9) dépendent paramétriquement des constantes a_1, a_2, ... dont les valeurs peuvent être différentes pour les différentes étoiles. Pour les groupes d'étoiles qui ont ces constantes identiques les relations (2.9) définissent la façon unique dont la luminosité dépend de la masse des étoiles.

Si $\mathfrak{L}_0 \neq 0$ et s'il est donné indépendamment de $\mathfrak{M}$, les fonctions (2.9) dépendent de $\mathfrak{L}_0$ comme d'un paramètre supplémentaire. Si toutes les

sources d'énergie sont concentrées au centre (modèle à source d'énergie, ponctuelle), aux formules (2.9) se sibstituent les formules de la forme

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}^* &= \mathfrak{L}_0, \\ \mathfrak{R} &= f(\mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Ainsi il n'est pas possible, pour le modèle à source d'énergie ponctuelle d'établir deux relations de la forme $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{M})$ et $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$ en résolvant le système d'équations (II). Ces relations peuvent être établies si l'on donne en outre la fonction $\mathfrak{L}_0(\varrho_0, T_0)$, où ϱ_0 et T_0 sont la densité et la température au centre de l'étoile.

§ 3. Formules théoriques des lois luminosité — masse et rayon — masse*)

Pour formuler le problème énoncé au paragraphe précédent on a besoin d'établir effectivement les régularités (2.9). Ce problème était traité par Strömgren**) dans les hypothèses suivantes :

1°. De l'équation d'état est éliminé le terme $aT^4/3$ correspondant à la pression du rayonnement.

2°. Le poids moléculaire μ est constant partout à l'intérieur de l'étoile.

3°. Le coefficient d'absorption et les sources d'énergie vérifient les formules

$$\varkappa_1 = B\varrho(RT)^{-3-s}$$

et

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 \varrho^\alpha (RT)^\beta,$$

où B, s, ε_0, α, β sont des constantes.

---

*) Certains des résultats théoriques qui suivent sur l'équilibre et les écoulements non stationnaires de gaz à symétrie sphérique compte tenu des forces gravitationnelles sont exposés dans les travaux de L. Sédov et M. Yavorskaia parus il y a quelque 15-20 années. Ces résultats ont trouvé une application par la suite, et à l'heure actuelle ils contribuent de plus en plus largement à notre compréhension et à une interprétation des phénomènes astrophysiques observés.

Les nouvelles applications de ces théories ainsi que leur développement sont donnés dans le livre de E. Dibai et S. Koplan, *Similitude et dimension en astrophysique* (en russe), Ed. Naouka, 1976. Voir également A. Solinger, S. Rappoport et J. Buff, *Isothermal blast wave model of Supernova Remnants*, The Astrophysical Journal, op. II, 1975; J. Castor, R. McCray and R. Weawer, *Interstellar Bubbles*. The Astrophysical Journal, 200 : L 107-L110, 1975 Sep. 1.

**) B. Strömgren, Handb. d. Astrophys., t. 7, p. 159, 1936; Erg. Exact. Naturwiss., t. 16, p. 465, 1937.

Un bon nombre de résultats sur la théorie des modèles gazeux d'étoiles est donné dans le livre de S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Chicago, 1939.

En s'appuyant sur ces hypothèses Strömgren a trouvé la formule

$$\mathfrak{L}^* = \mathfrak{D}\frac{1}{B}\frac{\mathfrak{M}^{5+s}}{\mathfrak{R}^s}\mu^{7+s}, \tag{3.1}$$

où la constante $\mathfrak{D}$ est fonction uniquement des f, s, α, β.

Or, il apparaît*) qu'à l'aide de la théorie dimensionnelle en conservant l'hypothèse 1° et dans les hypothèses plus générales que 2° et 3°, soit

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \mu_0\varrho^{1-\xi}(RT)^{1-\eta}, \\ \varkappa_1 &= B\varrho^w(RT)^v, \\ \varepsilon^* &= \varepsilon_0\varrho^\alpha(RT)^\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

où ξ, η, w, v, α, β sont des constantes, on peut indiquer deux relations simples de la forme (2.9) au lieu d'une relation (3.1).

Introduisons les nouvelles variables

$$p_1 = \frac{p}{f}, \quad \tau = \frac{RT}{(f\mu_0)^{1/\eta}}, \quad x = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}}$$

et les notations

$$\frac{a(f\mu_0)^{4/\eta}}{3fR^4} = \Omega$$

et

$$B\varepsilon_0(f\mu_0)^{\frac{v+\beta-4}{\eta}} = \omega.$$

On vérifie aisément que le système d'équations (II) et la condition aux limites (2.6) pour $\mathfrak{L}_0 = 0$ sont équivalents au système d'équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dx} = -\frac{x\mathfrak{M}^2}{4\pi r^4}, \quad r^3 = \frac{3}{4\pi}\mathfrak{M}\int_0^x \frac{dx}{\varrho}, \\ &p_1 = \varrho^\xi\tau^\eta + \Omega\tau^4, \quad \tau^3\frac{d\tau}{dx} = -\frac{3\omega\mathfrak{M}^2}{16\pi^3 r^4}\varrho^w\tau^v\int_0^x \varrho^\alpha\tau^\beta\,dx \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

et à la formule de calcul de la luminosité

$$\mathfrak{L} = \varepsilon_0\mathfrak{M}(\mu_0 f)^{\beta/\eta}\int_0^x \varrho^\alpha\tau^\beta\,dx. \tag{3.4}$$

*) Voir L. Sédov, « Doklady Academii Naouk » de l'U. R. S. S., t. 94, n° 4, 1954.

Ainsi donc le problème se ramène à la résolution du système (3.3) pour les conditions aux limites suivantes*) [voir les conditions (2.6')] :

à la surface de l'étoile pour $x=1$ on a

$$\varrho=0 \quad \text{et} \quad \tau=0. \tag{3.5}$$

D'où il suit que si la solution du problème mathématique posé existe et a une signification physique, alors les fonctions inconnues

$$\tau,\ \varrho,\ r,\ p_1\left([p_1]=\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{L}^4} \quad \text{et} \quad [\tau]=\mathrm{M}^{\frac{2-\xi}{\eta}}\,\mathrm{L}^{\frac{3\xi-4}{\eta}}\right)$$

se déterminent par les quantités

$$x,\ \mathfrak{M},\ \omega,\ \Omega$$

de dimensions

$$[\mathfrak{M}]=\mathrm{M},\ [\omega]=\mathrm{M}^{k_1}\mathrm{L}^{k_2},\quad [\Omega]=\mathrm{M}^{2-4\frac{2-\xi}{\eta}}\,\mathrm{L}^{-4-4\left(\frac{3\xi-4}{\eta}\right)}, \tag{3.6}$$

où

$$\left.\begin{aligned} k_1&=-2-w-\alpha+\frac{(4-v-\beta)(2-\xi)}{\eta},\\ k_2&=4+3\omega+3\alpha+\frac{(4-v-\beta)(3\xi-4)}{\eta}.\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

On prend ensuite $k_2\neq 0$. Si l'on admet que $\Omega=0$ (hypothèse 1°) ou si $\xi=\eta=1$ (hypothèse 2°), alors au cas où $k_2=0$ aucune grandeur de définition ne dépend des dimensions linéaires tandis que les quantités inconnues τ, ϱ, r, p_1 en dépendent. S'il en est ainsi, il faut poser le problème d'une autre manière.

Les paramètres de définition conduisent seulement à deux combinaisons abstraites indépendantes :

$$x=\frac{\mathcal{M}}{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad \delta=\frac{\Omega}{\mathfrak{M}^{k_3}}\,\omega^{\frac{4\eta+4(3\xi-4)}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}},$$

où

$$k_3=\frac{1}{\eta}\left\{2\eta+4(\xi-2)-\frac{[4\eta+4(3\xi-4)][(2+w+\alpha)\eta-(4-v-\beta)(2-\xi)]}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}\right\}.$$

Evidemment, pour $\mu=\text{const}$, i.e. pour $\xi=\eta=1$, on a

$$k_3=-2 \quad \text{et} \quad \delta=\Omega\mathfrak{M}^2.$$

---

*) Les conditions aux limites (3.5) peuvent être modifiées. Si elles ne contiennent pas de nouvelles constantes physiques dimensionnées, tous les résultats ultérieurs demeurent valables.

Si les égalités $\xi=1$ et $\eta=1$ ne sont pas remplies simultanément, alors, pour certaines valeurs des exposants ξ, η, α, β, w, v, on parvient à satisfaire l'égalité

$$k_3=0.$$

Pour $k_3=0$ il vient que le paramètre abstrait δ est indépendant de la masse $\mathfrak{M}$.

Des considérations dimensionnelles générales il découle que la solution cherchée a la forme

$$\left.\begin{aligned} r&=\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{\frac{1}{k_2}} r_1(x,\delta),\\ \varrho&=\mathfrak{M}\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{-\frac{3}{k_2}} \varrho_1(x,\delta),\\ \tau&=\mathfrak{M}^{\frac{2-\xi}{\eta}}\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{\frac{3\xi-4}{k_2\eta}} \tau_1(x,\delta),\\ p_1&=\mathfrak{M}^2\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{-\frac{4}{k_2}} (\varrho_1^{\xi}\tau_1^{\eta}+\delta\tau_1^4). \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

En substituant les formules (3.8) dans le système d'équations (3.3) et les conditions aux limites (3.5) on obtient les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\varrho_1^{\xi}\tau_1^{\eta}+\delta\tau_1^4)&=-\frac{x}{4\pi r_1^4},\\ r_1^3&=\frac{3}{4\pi}\int_0^x\frac{dx}{\varrho_1},\\ \tau_1^3\frac{d\tau_1}{dx}&=-\frac{3}{16\pi^2 r_1^4}\,\varrho_1^{w}\tau_1^{v}\int_0^x \varrho_1^{\alpha}\tau_1^{\beta}\,dx \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

et les conditions aux limites

$$\text{pour } x=1 \quad \varrho_1=0 \quad \text{et} \quad \tau_1=0. \tag{3.10}$$

Les équations (3.9) et les conditions (3.10) ne renferment pas de constantes dimensionnées $\mathfrak{M}$, ω et définissent les fonctions adimensionnées $\tau_1(x,\delta)$, $\varrho_1(x,\delta)$ et $r_1(x,\delta)$. Le paramètre δ s'élimine si l'on adopte l'hypothèse 1°. Dans le dernier cas les fonctions $r_1(x)$, $\varrho_1(x)$ et $\tau_1(x)$ sont des fonctions numériques universelles ne dépendant que des valeurs des exposants ξ, η, w, v, α, β.

Avec $\omega = B\varepsilon_0 (f\mu_0)^{\frac{v+\beta-4}{\eta}}$ les formules (3.8), (3.4) et (3.7) conduisent aux formules suivantes pour le rayon $\mathfrak{R}$ et la luminosité de l'étoile $\mathfrak{L}^*$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{R} = [(B\varepsilon_0)^{\eta}(f\mu_0)^{v+\beta-4}\mathfrak{M}^{(2+w+\alpha)\eta-(4-v-\beta)(2-\xi)}]^{\frac{1}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}} \times \\
&\quad \times r_1(1, \delta), \quad \mathfrak{L}^* = \varepsilon_0 (B\varepsilon_0)^{\frac{(3\xi-4)\beta-3\alpha\eta}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}} \times \\
&\quad \times (f\mu_0)^{\frac{\beta}{\eta}+\frac{v+\beta-4}{\eta}\left[\frac{(3\xi-4)\eta-3\alpha\eta}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}\right]} \times \\
&\quad \times \mathfrak{M}^{1+\alpha+\frac{2-\xi}{\eta}\beta+\frac{[(2+w+\alpha)\eta-(4-v-\beta)(2-\xi)][(3\xi-4)\beta-3\alpha\eta]}{[(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)]\eta}} \cdot \int_0^1 \varrho_1^{\alpha}\tau_1^{\beta}\, dx.
\end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

Si l'on néglige la pression de la lumière dans l'équation d'état (hypothèse 1°), on posera $\delta = 0$, alors les formules (3.11) définiront complètement $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{L}^*$ en fonction de ε_0, $f\mu_0$, B et de la masse de l'étoile $\mathfrak{M}$.

Si $\delta \neq 0$ mais $k_3 = 0$, alors δ ne dépend pas de la masse de l'étoile si bien que dans ce cas également les formules (3.11) définissent complètement $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{L}^*$ en fonction de la masse de l'étoile $\mathfrak{M}$.

En éliminant ε_0 des formules (3.11) on obtient la relation

$$B\mathfrak{L}^* = \mathfrak{D}(f\mu_0)^{\frac{4-v}{\eta}} \mathfrak{R}^{4+3w+(4-v)\frac{3\xi-4}{\eta}} \mathfrak{M}^{-1-w+(4-v)\frac{2-\xi}{\eta}}, \quad (3.12)$$

où $\mathfrak{D}$ est une constante abstraite qui pour $\delta = 0$ serait fonction des seuls ξ, η, α, β, w, v.

On remarquera que dans la formule (3.12) seule la constante $\mathfrak{D}$ peut dépendre de la loi d'émission de l'énergie.

La formule (3.1) s'obtient comme un cas particulier de la formule (3.12). L'on voit sans peine que la formule (3.12) reste valable pour un modèle d'étoiles à source ponctuelle d'énergie au centre lorsque la puissance de cette source ponctuelle $\mathfrak{L}^*$ est donnée arbitrairement.

Les formules (3.12) et (3.11) peuvent être utiles lorsqu'on interprète les données fournies par l'observation. La confrontation de ces formules avec les données empiriques peut dégager certains aspects des lois (3.2) ainsi que justifier la formulation proposée du problème.

§ 4. Quelques solutions simples du système d'équations d'équilibre des étoiles

En analysant les mouvements non stationnaires des masses gazeuses des étoiles dans la théorie des explosions des novae il faut adjoindre aux conditions initiales les données concernant la distribution des caractéristiques d'état du gaz à l'intérieur d'une étoile en équilibre. Utiliser dans ce but les solutions du système d'équations (II) aux conditions aux limites (2.6) et (2.7) est dépourvu d'intérêt non seulement parce qu'elles sont très complexes,

mais surtout parce qu'elles ne fournissent pas de solutions efficaces du problème des mouvements non stationnaires.

Par ailleurs, pour mieux comprendre le rôle des divers facteurs physiques il paraît utile d'analyser les solutions du système (II) non soumises aux conditions aux limites à la surface de l'étoile.

Considérons les solutions exactes des équations d'équilibre (II) en négligeant la pression de la lumière et en utilisant certaines hypothèses supplémentaires au lieu des conditions aux limites à la surface de l'étoile. En nous fondant sur la théorie dimensionnelle nous supposons que la distribution des caractéristiques d'état est régie, outre les forces de gravitation liées à la valeur de la constante de gravitation f, par une certaine loi physique dont l'influence est exprimée au moyen d'une constante physique caractéristique seulement que nous désignerons par a.

Plus exactement, considérons l'équilibre d'un gaz pour lequel la distribution de la densité et de la pression n'est fonction que des trois paramètres dimensionnés suivants :

$$[r]=\mathrm{L}, \quad [f]=\frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{MT}^2}, \quad [a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s. \tag{4.1}$$

La dimension du paramètre a (valeurs des constantes k et s) est fixée par l'hypothèse que nous venons d'avancer et que nous ne concrétiserons pas pour le moment. On envisagera le cas où la dimension de la constante physique supplémentaire a comprend le symbole de la masse. Evidemment, on peut admettre sans restreindre la généralité que la formule dimensionnelle de la constante a renferme la première puissance du symbole de la masse*).

Il est facile de vérifier que l'hypothèse (4.1) entraîne les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \varrho&=\alpha_1\frac{a^{\frac{2}{2-s}}f^{\frac{s}{2-s}}}{r^{\frac{2k+6}{2-s}}}, & \mathcal{M}&=\alpha_4 a^{\frac{2}{2-s}}f^{\frac{s}{2-s}}r^{-\frac{2k+3s}{2-s}},\\ p&=\alpha_2\frac{a^{\frac{4}{2-s}}f^{\frac{2+s}{2-s}}}{r^{\frac{8+2s+4k}{2-s}}}, & RT&=\alpha_3\frac{a^{\frac{2}{2-s}}f^{\frac{2}{2-s}}}{r^{2\frac{k+s+1}{2-s}}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont des constantes abstraites et $s\neq 2$. Si $s=2$ et $k\neq -3$, il est impossible d'établir la dépendance par rapport à r puisque dans ce cas on a la combinaison abstraite af/r^{k+3}; si $s=2$ et $k=-3$, les dimensions de f et de a ne sont pas indépendantes, le système (4.1) est alors incomplet et ne définit pas p et ϱ.

Comme par sa signification physique la masse $\mathcal{M}(r)$ est une quantité positive monotone non décroissante lorsque r augmente, on doit avoir

$$-\frac{2k+3s}{2-s}\geq 0. \tag{4.3}$$

*) Si la constante supplémentaire donnée a^* est une quantité cinématique, on peut prendre pour a une constante égale à a^*/f.

Les formules (4.2) montrent que le centre de symétrie est un point singulier où la densité, la pression et la température sont en général infinies. Dans un certain sens cette circonstance reflète la situation réelle, étant donné qu'au centre de l'étoile la densité, la pression et la température atteignent leurs valeurs maximales qui sont énormes. D'autre part, les considérations physiques incitent à croire que la densité, la pression et la température au centre de l'étoile sont essentiellement finies. D'où il découle que si au voisinage immédiat du centre de l'étoile on obtient des valeurs infinies pour les caractéristiques d'état, l'hypothèse que celles-ci dépendent uniquement de deux constantes physiques f et a est erronée. On doit penser à des facteurs physiques supplémentaires. Toutefois, si l'on admet que les corrections sont nécessaires uniquement au voisinage immédiat du centre de l'étoile, les formules (4.2) peuvent être utilisées pour la simulation de l'équilibre du gaz dans d'autres régions de l'étoile*).

Si $\omega=\frac{2k+6}{2-s}<3$, alors lorsque $r\to 0$, on a $\mathcal{M}\to 0$.

Les formules (4.2) montrent également que la pression et la densité ne peuvent s'annuler qu'à l'infini et que la masse tend vers l'infini avec r si $-\frac{2k+3s}{2-s}>0$. On voit par là que l'hypothèse avancée doit également être corrigée pour de grandes distances du centre de l'étoile.

Si $\frac{2k+3s}{s-2}=0$, alors $k=-\frac{3}{2}s$; dans ce cas la combinaison $a^{\frac{2}{2-s}}f^{\frac{s}{2-s}}=\mathcal{M}_0$ a la dimension de la masse. Cette constante peut être prise au lieu de a, alors les formules (4.2) prennent la forme**)

$$\varrho=\alpha_1\frac{\mathcal{M}_0}{r^3},\quad \mathcal{M}=\mathcal{M}_0,\quad p=\alpha_2\frac{\mathcal{M}_0^2 f}{r^4},\quad RT=\alpha_3\frac{\mathcal{M}_0}{r}f. \tag{4.4}$$

Evidemment, si dans ce cas $\varrho\neq 0$, l'équation

$$\mathcal{M}=4\pi\int_0^r r^2\varrho\,dr$$

n'est pas satisfaite, de sorte que ce cas ne fournit pas de solution exacte du système (II). On voit sans peine qu'on peut satisfaire les trois premières équations du système (II); soit

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr}+\frac{f\mathcal{M}}{r^2}=0,\quad \mathcal{M}=4\pi\int_0^r r^2\varrho\,dr,\quad p=\frac{\varrho RT}{\mu}, \tag{4.5}$$

*) Notons en passant qu'au voisinage du centre de l'étoile la constante gravitationnelle devient semble-t-il non essentielle explicitement, la résultante des forces d'attraction newtonienne étant voisine de zéro à proximité du centre de l'étoile. Toutefois, nous n'allons pas pousser plus loin ici l'examen des phénomènes au voisinage du centre de l'étoile. Au § 6, pp. 392-393, on verra que pour les solutions (4.2) l'énergie totale $H(r)$ est finie lorsque $\omega<2{,}5$ et $H(r)\to 0$ lorsque $r\to 0$.

**) Nous posons $\mathcal{M}=\mathcal{M}_0$ et par conséquent $\alpha_4=1$.

où μ est une constante, à condition de définir les constantes α_2, α_3 et α_4 au moyen de la constante α_1 conformément aux formules

$$\alpha_4 = -4\pi \frac{2-s}{2k+3s}\alpha_1, \tag{4.6}$$

$$\alpha_2 = -2\pi \frac{(2-s)^2\alpha_1^2}{(2k+3s)(4+s+2k)}, \tag{4.7}$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu\alpha_2}{\alpha_1} = -2\pi\mu \frac{(2-s)^2\alpha_1}{(2k+3s)(4+s+2k)}. \tag{4.8}$$

On voit aisément que l'exposant de r dans la formule (4.2) pour la pression $2\,\frac{4+s+2k}{2-s}$ doit être non nul sans quoi la pression serait uniforme suivant le rayon et l'équation d'équilibre ne pourrait plus être satisfaite.

Envisageons maintenant la solution du type recherché satisfaisant aux deux dernières équations du système (II), équations de la théorie du rayonnement :

$$\frac{d}{dr}\,R^4T^4 = -\frac{3\varkappa_1\mathfrak{L}\varrho}{4\pi r^2} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dr} = 4\pi r^2\varrho\varepsilon^*. \tag{4.9}$$

On saura satisfaire à ces équations en prenant la solution sous la forme (4.2) si les sources d'énergie sont accumulées au centre de l'étoile, $\varepsilon^*=0$ pour $r>0$ et si le coefficient d'absorption vérifie une formule de la forme

$$\varkappa_1 = B\varrho^w(RT)^v, \tag{4.10}$$

où v, w et B sont des constantes. Il est facile de vérifier que la dimension de la constante B est donnée par la formule $[B]=\mathrm{M}^{-(2+w)}\mathrm{L}^{10+3w-2v}\mathrm{T}^{2v-5}$.

Des équations (4.9) il vient

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 = \text{const} \quad \text{et} \quad \varkappa_1 = -\frac{4\pi}{3\mathfrak{L}_0}\,\frac{r^2}{\varrho}\,\frac{d}{dr}(RT)^4. \tag{4.11}$$

En confrontant (4.10) et (4.11) et en utilisant les formules (4.2) on trouve que les équations du rayonnement sont satisfaites si l'on a les relations

$$k(2w+2v-6)+s(2v-9)+6w+2v=0 \tag{4.12}$$

et

$$\frac{32\pi}{3}\,\frac{\alpha_3^{4-v}}{\alpha_1^{1+w}}\,\frac{s+k+1}{2-s} = \frac{B\mathfrak{L}_0}{a^{\frac{6-2w-2v}{2-s}}\,f^{\frac{8-s-sw-2v}{2-s}}}. \tag{4.13}$$

L'équation (4.12) établit la relation entre k, s, w et v. Les relations (4.6), (4.7), (4.12) et (4.13) permettent d'exprimer les coefficients α_1, α_2, α_3 et α_4 au moyen de B, $\mathfrak{L}_0$, μ, a, f, w et v. Portant ces expressions dans (4.2) on

trouve la solution exacte du système complet des équations d'équilibre du gaz (II) :

$$\left.\begin{aligned}
\varrho &= \left\{\frac{(3-w-v)}{16\pi(2w+3)}\left[\frac{(3w+v)(v-w-6)}{(3-w-v)^2 2\pi\mu f}\right]^{4-v}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{9-2v}}\right\}^{\frac{1}{3-w-v}},\\
\mathcal{M} &= 4\pi\frac{w+v-3}{3w+v}\left\{\frac{3-w-v}{16\pi(2w+3)}\left[\frac{(3w+v)(v-w-6)}{(3-w-v)^2 2\pi\mu f}\right]^{4-v}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{3w+v}}\right\}^{\frac{1}{3-w-v}},\\
p &= \left\{\frac{(3-w-v)\mu^{v-4}}{16\pi(2w+3)}\left[\frac{(3w+v)(v-w-6)}{(3-w-v)^2 2\pi f}\right]^{\frac{5+w-v}{2}}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{6+w-v}}\right\}^{\frac{3}{3-w-v}},\\
RT &= \left\{\frac{(3-w-v)}{16\pi(2w+3)}\left[\frac{(3w+v)(v-w-6)}{(3-w-v)^2 2\pi\mu f}\right]^{w+1}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{3+2w}}\right\}^{\frac{1}{3-w-v}}.
\end{aligned}\right\}\quad(4.14)$$

Dans cette solution exacte du problème de l'équilibre de la masse gazeuse soumise à la loi gravitationnelle de Newton les lois de variation de p, ϱ et RT suivant le rayon sont complètement définies au moyen des exposants w et v entrant dans la formule du coefficient d'absorption et au moyen du produit de la constante B, présente dans la formule du coefficient d'absorption, par la puissance $\mathfrak{L}_0$ de la source émissive située au centre de symétrie.

La constante a ne figure pas dans la solution (4.14); cela s'explique par le fait que les constantes α_1 et a n'entrent que dans la combinaison

$$\alpha_1 a^{\frac{2}{2-s}}$$

qui dans le problème considéré s'exprime au moyen du produit $B\mathfrak{L}_0$ en vertu des équations d'équilibre. La loi de puissance en fonction de $B\mathfrak{L}_0$ est obtenue sous forme explicite à l'aide des exposants w et v.

La solution (4.14) permet d'évaluer l'influence des lois du coefficient d'absorption $\varkappa$ sur l'équilibre des gaz en présence d'une source émissive.

En fixant la dimension de la constante a (exposants k et s), on définit par les formules (4.2) toutes les lois de variation des caractéristiques d'état en fonction du rayon; quant aux exposants w et v de la formule (4.10), ils peuvent être variés de manière à satisfaire la condition (4.12). Si les exposants w et v sont donnés, les lois de variation suivant le rayon se définissent également, les constantes k et s pouvant être variées de manière à satisfaire la même condition (4.12).

Selon la solution (4.14) le modèle gazeux de l'étoile occupe tout l'espace infini et a une masse infinie. Manifestement, la masse est finie à l'intérieur de toute sphère S de rayon fini à la surface de laquelle la pression p_S peut être extrêmement petite. Si p_S est fixée à la surface de S, la présence d'une masse infinie à l'extérieur de la sphère n'a aucune influence sur l'équilibre de la masse finie enfermée dans la sphère. Ainsi l'équilibre d'une masse

finie à l'intérieur de la sphère S n'est pas influencé de façon essentielle par les lois de distribution des caractéristiques en dehors de S. Si l'on veut obtenir des solutions approchées avec une masse finie, on peut utiliser la solution du type (4.14) valable pour l'intérieur d'une sphère S et prolonger cette solution au dehors de la sphère en admettant une variation continue de la pression*) et une loi de variation de la densité telle que soient assurées la finitude et la valeur donnée de la masse.

En particulier, si la constante a a la dimension de l'énergie, soit $[a]=$ $=\mathrm{ML^2T^{-2}}$ (d'où $k=2$ et $s=-2$), la conditon (4.12) donne

$$v=-3-5w. \tag{4.15}$$

Dans ce cas les formules (4.14) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}
\varrho&=\frac{1}{2^{2,5}}\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{7+5w}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{4\pi}\right]^{\frac{1}{6+4w}}\frac{1}{r^{2,5}},\\
\mathcal{M}&=2\pi\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{7+5w}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{2^{5+2w}\pi}\right]^{\frac{1}{6+4w}}r^{0,5},\\
p&=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{4+3w}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{\mu^{3+2w}4\pi}\right]^{\frac{1}{3+2w}}\frac{1}{r^3},\\
RT&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{1+w}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{4\pi}\right]^{\frac{1}{6+4w}}\frac{1}{r^{0,5}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

La solution est déterminée si l'on fixe la valeur de l'exposant w ou, conformément à (4.15), celle de l'exposant v.

Les formules (4.14) permettent d'écrire les solutions correspondant aux différentes formules du coefficient d'absorption en usage en astrophysique.

Si par exemple l'on prend le coefficient d'absorption sous la forme de Cramers

$$\varkappa_1=B\varrho T^{-7/2} \quad (w=1, \quad v=-3,5), \tag{4.17}$$

la solution prend la forme

$$\left.\begin{aligned}
\varrho&=0,00457\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{2/11}}{(\mu f)^{15/11}}\frac{1}{r^{32/11}}, \quad \mathcal{M}=0,6319\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{2/11}}{\mu f^{15/11}}r^{1/11},\\
p&=0,000756\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{4/11}}{\mu(\mu f)^{19/11}}\frac{1}{r^{42/11}}, \quad RT=0,1654\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{2/11}}{(\mu f)^{4/11}}\frac{1}{r^{10/11}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Envisageons encore le cas où $[a]=[\mathfrak{L}]=\mathrm{ML^2T^{-3}}$ ($k=2$, $s=-3$) ce qui revient à supposer que la distribution des caractéristiques d'état en fonction

*) Dans une position approchée du problème de l'équilibre d'une masse finie de gaz on peut admettre la discontinuité dans la distribution de la densité.

du rayon se détermine par la luminosité totale. Ce cas est singulier et il exige une analyse particulière. Il vient des formules (4.2), (4.6), (4.7) et (4.8)

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \alpha_1 \frac{a^{2/5} f^{-3/5}}{r^2}, \qquad \mathcal{M} = 4\pi\alpha_1 a^{2/5} f^{-3/5} r, \\ p &= 2\pi\alpha_1^2 \frac{a^{4/5} f^{-1/5}}{r^2}, \qquad RT = 2\pi\alpha_1 \mu (af)^{2/5} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

D'où il découle que la température est constante suivant le rayon. Dans ce cas si $\mathfrak{L} \neq 0$, l'équation

$$\frac{d(RT)^4}{dr} = -\frac{\varkappa_1 \mathfrak{L} \varrho}{4\pi r^2}$$

ne serait satisfaite qu'en supposant $\varkappa_1 = 0$. S'il en est ainsi, la seconde équation de la théorie du rayonnement

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dr} = 4\pi r^2 \varrho \varepsilon^*$$

peut toujours être satisfaite et servir à déterminer $\mathfrak{L}$ à condition de connaître ε^* en fonction de r, ϱ et T*).

En particulier, si $\varepsilon^* = 0$, alors $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 = \text{const}$. Les formules (4.19) ne contiennent qu'un seul paramètre essentiel, $\alpha_1 A^{2/5}$.

§ 5. Relation entre la période de variation de l'éclat et la densité massique moyenne des céphéides

Les données empiriques sur la période de variation de l'éclat et sur les vitesses des particules gazeuses rayonnantes témoignent de façon indubitable que les oscillations de luminosité observées sont dues à de très fortes pulsations radiales des masses gazeuses constituant l'étoile.

En s'appuyant sur les raisonnements exposés au § 2 on peut admettre que ces pulsations représentent une transformation adiabatique décrite par le système d'équations (I) du § 2.

Le mouvement en question peut être essentiellement non linéaire. Au sein du gaz peuvent exister des ondes de choc dirigées vers le centre ou bien vers la périphérie. Il se peut que pendant certains intervalles de temps la frontière de la photosphère lumineuse en expansion coïncide avec l'onde de choc. La vitesse de l'onde de choc étant supérieure à celle des particules gazeuses derrière le front d'onde, le diamètre maximal de la photosphère en expansion bordée par l'onde de choc sera très supérieur à la dimension transversale linéaire calculée par l'intégration des vitesses radiales mesurées lors des observations.

---

*) Ces considérations sont évidemment valables pour le cas plus général où

$$s + k + 1 = 0,$$

entrainant, conformément aux formules (4.2), la constance de la température.

Dans le cas d'ondes de choc dirigées vers le centre de l'étoile il peut apparaître, au moment de la réflexion sur le noyau central, les écoulements considérés au § 7, ch. IV, accompagnant la focalisation du flux gazeux dans un point. La variation de l'éclat des céphéides peut s'expliquer par de grandes variations du diamètre de la photosphère lors des pulsations par des variations de la température dans cette dernière ainsi que de l'absorption dans l'atmosphère gazeuse entourant la céphéide. Pour différents diamètres de la photosphère, le trajet du rayon lumineux sera différent.

On décrit les pulsations des sphères gazeuses — modèles des céphéides en faisant appel au système d'équations (I) avec les conditions aux sauts de même forme qu'en l'absence de forces gravitationnelles (cf. § 2, ch. IV), et en outre aux conditions aux limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\text{au centre de l'étoile pour } r=0 \quad \mathcal{M}=0 \quad \text{et} \quad v=0,\\ \text{à la surface de l'étoile } r=\mathfrak{R}+\Delta\mathfrak{R} \quad \mathcal{M}=\mathfrak{M}, \quad p=0 \quad \text{et} \quad \varrho=0.\end{array}\right\} \tag{5.1}$$

Supposons encore que le régime stationnaire des pulsations se définit complètement par les seules équations du mouvement, par les conditions aux sauts, les conditions aux limites et par d'autres conditions qui ne contiennent pas de nouvelles constantes dimensionnées. Dans ces hypothèses il est facile d'établir le système de paramètres de définition. Ce système est représenté par le tableau

$$r,\ t,\ \gamma, f,\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{M}. \tag{5.2}$$

Le rayon moyen $\mathfrak{R}$ et la masse $\mathfrak{M}$ de l'étoile sont considérés ici comme des paramètres indépendants; rappelons qu'en équilibre le rayon $\mathfrak{R}$ est une fonction de la masse $\mathfrak{M}$ (§ 2). Toutefois, lors des pulsations cette relation entre $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{M}$ peut ne pas exister*) ce qui pourrait être la cause des pulsations-

Ainsi posé, le problème mathématique non linéaire consistant à déters miner v, ϱ et p s'avère bien difficile. On n'en connaît que quelques solutions particulières obtenues en recourant à des hypothèses supplémentaire. fondées dans la plupart des cas sur la linéarisation des équations du mouvement**).

Et pourtant sans donner la solution du problème posé de la manière la plus générale on parvient à établir, grâce aux considérations dimensionnelles, un résultat fondamental qui relie la période des pulsations d'une céphéide à sa masse et à son rayon. En effet, désignons par τ la période des pulsations d'une céphéide; comme c'est une caractéristique du mouvement considéré dans son ensemble, le tableau de paramètres de définition (5.2) permet d'écrire

$$\tau=f(\gamma, f,\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{M}). \tag{5.3}$$

*) S'il existe une telle relation exprimée par la loi de puissance, on y aura, outre la masse $\mathfrak{M}$, une constante dimensionnée. Dans le système de paramètres de définition on peut prendre au lieu de la masse $\mathfrak{M}$ et de cette constante (différente pour les différentes séries des céphéides) tout simplement $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{R}$.

**) Ces résultats sont exposés dans S. Rosseland, *The Pulsation Theory of Variables Stars*, Oxford, 1949.

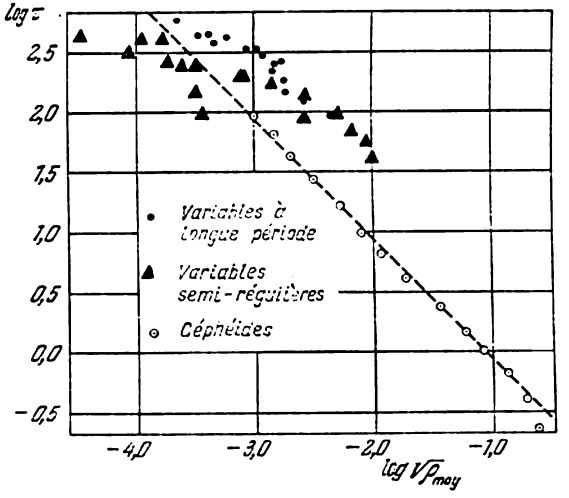


Fig. 133. Données expérimentales sur la relation période — densité pour différents types d'étoiles variables

Les dimensions de f, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{M}$ étant indépendantes, on aura

$$\frac{1}{\tau}=f_1(\gamma)\sqrt{3f\mathfrak{M}/4\pi\mathfrak{R}^3}=f_1(\gamma)\sqrt{f\varrho_{\text{moy}}}. \tag{5.4}$$

Telles sont les considérations simples permettant de justifier, dans les hypothèses assez générales et sans procéder à un calcul mathématique détaillé, la relation (5.4) établie tout d'abord expérimentalement.

La figure 133 présente à l'échelle logarithmique log τ et log $\sqrt{\varrho_{\text{moy}}}$ les résultats d'observations; les points isolés représentent les valeurs moyennes pour des groupes d'étoiles, la ligne droite en pointillé est tracée conformément à la formule théorique (5.4). On voit que les données d'observations des céphéides sont en parfait accord avec la théorie. La coïncidence des points fournis par les observations avec la droite théorique est remarquable.

La relation (5.4) reflète semble-t-il les lois fondamentales des pulsations des masses gazeuses constituant les étoiles variables.

Le dépouillement des données empiriques concernant les étoiles variables semi-régulières et les étoiles à longue période de variation montre que les points correspondants du diagramme analogue se placent le long de certaines droites parallèles à la droite correspondant aux céphéides.

§ 6. Sur la théorie de l'explosion des novae et des supernovae

1. Equations du mouvement et conditions aux limites. Il découle des données présentées au § 1 que les explosions des novae et des supernovae constituent des écoulements non stationnaires de grandes masses gazeuses qui s'accompagnent d'une croissance impétueuse de l'énergie émise.

Pour éclaircir le phénomène de l'explosion stellaire nous analyserons les exemples des solutions exactes des équations de l'écoulement non stationnaire du gaz compte tenu des forces de gravitation que l'on peut considérer comme des modèles schématiques traduisant certains traits essentiels du phénomène réel.

On peut envisager et proposer les solutions des trois types suivants :

1°. Propagation des ondes de détonation du sein de l'étoile vers sa surface s'accompagnant d'un dégagement d'énergie nucléaire sur le front d'onde. On a déjà étudié les mouvements de ce type au § 8, ch. IV. On a établi*) les effets de l'augmentation de la vitesse de détonation en fonction de la loi de la chute de densité et, lorsque la densité diminue assez rapidement, l'éparpillement complet des produits gazeux de détonation avec formation du vide au voisinage du centre de l'étoile**).

2°. Mouvement perturbé du type explosion engendré par un dégagement subit d'énergie à l'intérieur de l'étoile; cette énergie est portée vers la périphérie par une onde de choc.

3°. Mouvement du type explosion sans dégagement d'énergie***) provoqué par l'instabilité dynamique d'équilibre des masses gazeuses constituant l'étoile.

Dans ce paragraphe sont données les solutions des types 2° et 3° compte tenu des forces gravitationnelles. On montrera plus loin que dans certains cas ces mouvements peuvent également inclure des mouvements perturbés avec éparpillement complet des masses gazeuses initialement au repos****).

Considérons les solutions du système d'équations (I) étudié au § 2 décrivant les écoulements non stationnaires d'un gaz ayant la symétrie sphérique, soit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \varrho v}{\partial r}+\frac{2\varrho v}{r}=0, \qquad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r}=4\pi r^2\varrho, \\ &\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{f\mathcal{M}}{r^2}=0, \\ &\frac{\partial \frac{p}{\varrho^\gamma}}{\partial t}+v\frac{\partial \frac{p}{\varrho^\gamma}}{\partial r}=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

*) L. Sédov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 111, n° 4, 1956; I. Yavorskaïa, idem.

**) Les solutions automodèles correspondantes sont établies sans tenir compte des forces de gravitation. La présence des forces de gravitation et le fait de considérer les mouvements qui ne sont pas automodèles peuvent apporter des modifications quantitatives.

On peut rechercher des solutions analogues pour le problème sphérique de propagation d'un saut de détente avec dégagement d'énergie, saut du type front de flamme, à travers un gaz au repos de densité initiale variable.

***) L. Sédov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 112, n° 2, 1957.

****) Pour appliquer les résultats obtenus à l'interprétation des résultats d'observations il est aussi nécessaire d'étudier les effets non stationnaires dans les photosphères stellaires. Il faut également éclaircir le rôle et la valeur du champ électromagnétique dans les explosions stellaires.

Supposons que l'écoulement non stationnaire se crée à l'instant $t=0$ dans une masse de gaz au repos, provoqué par un dégagement d'énergie au centre de symétrie au cas d'un écoulement adiabatique, et par un dégagement supplémentaire d'énergie dans le domaine perturbé au cas d'un écoulement polytropique.

La distribution initiale des caractéristiques du gaz définie par les conditions d'équilibre doit vérifier les formules (4.2), (4.6), (4.7) et (4.8) qui après la substitution

$$\frac{2k+6}{2-s}=\omega$$

et

$$\alpha_1 a^{\frac{2}{2-s}} f^{\frac{s}{2-s}}=A>0$$

peuvent s'écrire sous la forme plus simple suivante :

$$\left.\begin{aligned} &v=0; \quad \varrho=\frac{A}{r^{\omega}};\\ &\mathcal{M}=\frac{4\pi A}{3-\omega}\, r^{3-\omega};\\ &p=\frac{2\pi A^2 f}{(\omega-1)(3-\omega)}\,\frac{1}{r^{2\omega-2}};\\ &RT=\frac{2\pi A f}{(\omega-1)(3-\omega)}\,\frac{1}{r^{\omega-2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Dans les formules (6.2) la constante A de dimension $[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}$ remplace la constante de définition a des formules (4.2) ayant la dimension $[a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s$. La famille de solutions (6.2) des équations d'équilibre dépend non seulement de la constante gravitationnelle f, mais aussi d'une constante dimensionnée A et d'un paramètre essentiel ω défini par la dimension de la constante A.

La condition de la finitude de la masse au voisinage du centre de symétrie entraîne $\omega<3$. Pour que la température et la pression soient positives il faut que $\omega>1$. Pour que la température augmente à l'approche du centre on doit avoir $\omega>2$; lorsque $\omega=2$, la température ne dépend pas de r : c'est le cas d'une masse gazeuse isotherme. Si la constante a possède la dimension de l'énergie ($k=2$, $s=-2$), alors $\omega=2{,}5$.

En accord avec la formule (3.12), ch. IV, l'énergie totale du gaz entre les sphères de rayons r' et r'' est donnée par la formule

$$\mathcal{E}=\int_{r'}^{r''}\left[\frac{\varrho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma^*-1}-\frac{\varrho f(\mathcal{M}-\mathcal{M}')}{r}\right]4\pi r^2\,dr,$$

où $\gamma^*=c_p/c_v$. En s'appuyant sur cette formule et sur les formules (6.2) il est

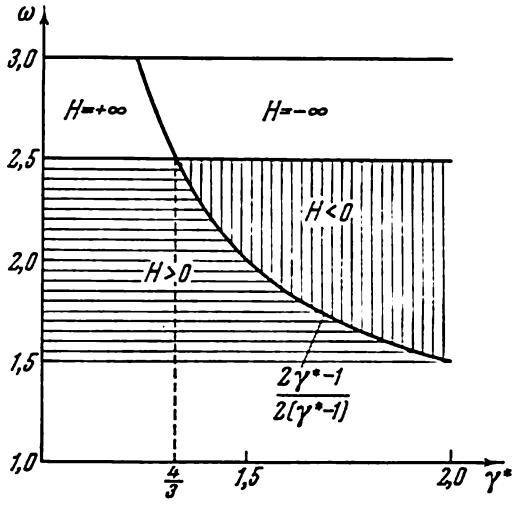


Fig. 134. Signe de l'énergie initiale H en fonction de ω et de γ^*. Dans les zones hachurées H est fini; H est infini pour $\omega>2{,}5$

aisé de calculer l'énergie initiale totale H contenue dans une sphère de rayon r. Pour $1<\omega<2{,}5$ on a

$$H=\frac{8\pi^2}{\gamma^*-1}\,\frac{1-2(\omega-1)(\gamma^*-1)}{(\omega-1)(3-\omega)(5-2\omega)}\,fA^2r^{5-2\omega}. \tag{6.3}$$

Si $\omega>2{,}5$ l'énergie initiale est alors égale à $\pm\infty$.

Si

$$1<\omega<\frac{2\gamma^*-1}{2(\gamma^*-1)}$$

et

$$\omega<2{,}5,$$

l'énergie initiale est finie et positive : $H>0$.

Pour

$$\frac{2\gamma^*-1}{2(\gamma^*-1)}<\omega<\frac{5}{2}$$

l'énergie initiale est finie et négative : $H<0$*) (fig. 134).

En effectuant l'intégration pour $\omega=2{,}5$ on a

$$\mathscr{E}_{r'}^{r''}=32\pi^2fA^2\left\{\frac{4-3\gamma^*}{3(\gamma^*-1)}\ln\frac{r''}{r'}+2-2\sqrt{\frac{r'}{r''}}\right\}, \tag{6.4}$$

*) Pour $H>0$ l'énergie thermique intérieure est supérieure et pour $H<0$ elle est inférieure au module de l'énergie gravitationnelle.

d'où il est clair que pour $\omega=2{,}5$ et $\gamma^*=\frac{4}{3}$ on a l'égalité

$$H=64\pi^2 f A^2. \tag{6.5}$$

Dans ce cas l'énergie initiale est finie, positive et indépendante du rayon r. Si $\omega=2{,}5$ et $\gamma^*>\frac{4}{3}$, alors $H=-\infty$.

Les écoulements non stationnaires du gaz soumis aux conditions initiales (6.2) sont automodèles si toutes les constantes dimensionnées entrant dans les conditions supplémentaires ont des dimensions dépendant de celle de la constante gravitationnelle f et de celle de la constante A.

Si un écoulement de perturbation automodèle est engendré par le dégagement de l'énergie au moment $t=0$, la loi de dégagement d'énergie est définie par trois grandeurs dimensionnées à dimensions indépendantes seulement t, A et f, donc

$$E=\alpha f^{\frac{5}{\omega}-1} A^{\frac{5}{\omega}} t^{\frac{2(5-2\omega)}{\omega}}, \tag{6.6}$$

où α est un coefficient abstrait indépendant du temps. Dans certains cas la valeur α peut être égale à l'infini. Si $\omega=2{,}5$, la formule (6.6) prend la forme

$$E=\alpha f A^2. \tag{6.7}$$

Le cas où α est fini correspond au dégagement instantané de l'énergie finie au centre de l'étoile. Si l'énergie instantanément dégagée est infiniment grande, c'est que le coefficient α est infini.

Pour $\omega<2{,}5$ et $\alpha>0$ il doit se produire, d'après (6.6), un dégagement continu de l'énergie si bien que E augmente avec le temps.

Le champ de l'écoulement perturbé du gaz est décrit par le système de paramètres dimensionnés

$$A, f, r, t; \tag{6.8}$$

de plus, l'écoulement peut éventuellement dépendre des paramètres constants abstraits que l'on se donne, tels que γ figurant dans l'équation du mouvement et α entrant dans la formule (6.6).

L'écoulement du gaz est automodèle en vertu de (6.8). Les lois d'écoulement du gaz peuvent se traduire par les formules de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\lambda=\frac{r}{(\beta A f)^{\frac{1}{\omega}} t^{\frac{2}{\omega}}}; \quad v=\frac{r}{t}V(\lambda); \quad \varrho=\frac{1}{f t^2}\mathcal{R}(\lambda); \\ &\mathcal{M}=\frac{r^3}{f t^2}M(\lambda); \quad p=\frac{r^2}{f t^4}P(\lambda) \quad \text{et} \quad z(\lambda)=\frac{\gamma P}{\mathcal{R}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

où V, $\mathcal{R}$, M, z sont des fonctions adimensionnées de λ qui en outre dépendent paramétriquement des constantes complémentaires abstraites données; β est une constante dont on peut disposer.

Les équations du mouvement (6.1) se ramènent, après la substitution de (6.9) et le remplacement de la fonction $P(\lambda)$ par $z(\lambda)$, au système d'équations différentielles ordinaires :

$$\left.\begin{aligned}
\lambda\left\{\left(\frac{2}{\omega}-V\right)V'-\frac{z}{\gamma}\left(\frac{z'}{z}+\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}\right)\right\}&=M+V^2-V+\frac{2z}{\gamma},\\
\lambda\left[V'-\left(\frac{2}{\omega}-V\right)\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}\right]&=2-3V,\\
\lambda\left(V-\frac{2}{\omega}\right)\left[\frac{z'}{z}-(\gamma-1)\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}}\right]&=-2(V+\gamma-2),\\
\lambda M'&=-3M+4\pi\mathcal{R}.
\end{aligned}\right\}\tag{6.10}$$

Les fonctions inconnues $V(\lambda)$, $\mathcal{R}(\lambda)$ et z sont analogues aux fonctions qu'on détermine à partir des équations (2.1), (2.2) et (2.3) du chapitre IV, de plus $\delta=2/\omega$; toutefois les équations (6.10) tiennent compte de la force d'attraction universelle et contiennent en outre une fonction $M(\lambda)$.

2. Diverses solutions exactes. D'après la théorie générale exposée au § 3, chap. IV, l'ordre du système (6.10) peut être abaissé de deux unités à l'aide des intégrales (3.7) et (3.9) du chapitre IV ayant lieu pour tout écoulement. Dans le cas envisagé il faut poser $\nu=3$, $\delta=2/\omega$ et $k=-3$, $s=2$, puisque

$$\left[\frac{1}{f}\right]=\mathrm{ML}^{-3}\mathrm{T}^2.$$

Ces intégrales sont représentées par les relations :

$$\lambda^3\left[\left(1-\frac{3}{\omega}\right)M-2\pi\mathcal{R}\left(V-\frac{2}{\omega}\right)\right]=C_1,\tag{6.11}$$

$$z=\mathcal{R}^{\gamma-1}M^{(\gamma+2/\omega-2)/(3/\omega-1)}\lambda^{(3\gamma-4)(3/\omega-1)}C_2.\tag{6.12}$$

En outre pour $\omega=2{,}5$ on a une intégrale de plus (3.15) (intégrale d'énergie, chap. IV) :

$$\lambda^5\left[\frac{Vz\mathcal{R}}{\gamma}+\left(V-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\mathcal{R}V^2}{2}+\frac{z\mathcal{R}}{\gamma(\gamma-1)}-\mathcal{R}M\right)\right]=C_3.\tag{6.13}$$

Comme on l'a vu au § 3, chap. IV, ces intégrales sont également valables pour les évolutions polytropiques lorsque l'énergie est variable dans la particule et lorsqu'il y a afflux de chaleur extérieur.

Lorsqu'au centre de l'étoile l'énergie se dégage instantanément, il se forme une onde de choc se déplaçant du centre vers la périphérie de l'étoile.

A la surface de l'onde de choc se propageant à travers un gaz au repos doivent se remplir les conditions de compatibilité suivantes :

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\, c\left(1-\frac{a_1^2}{c^2}\right), \\ \varrho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\varrho_1\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\,\frac{a_1^2}{c^2}\right)^{-1}, \\ \mathcal{M}_2 &= \mathcal{M}_1, \\ p_2 &= \frac{2\gamma}{\gamma+1}\, p_1\,\frac{c^2}{a_1^2}\left(1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{a_1^2}{c^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

Ici c est la vitesse de propagation du saut et $a_1^2=\gamma p_1/\varrho_1=RT_1$ le carré de la vitesse du son à l'état non perturbé. Le rayon de l'onde de choc r_2 se définit par trois grandeurs dimensionnées f, A, t à dimensions indépendantes :

$$r_2=C(\beta Af)^{\frac{1}{\omega}}t^{\frac{2}{\omega}} \quad \text{ou} \quad \lambda_2=C=\text{const.} \tag{6.15}$$

La valeur constante de λ sur l'onde de choc peut être posée égale à l'unité, ce qui permettra de déduire de cette condition le facteur constant β. Dans ce cas on a

$$\lambda_2=1 \quad \text{et} \quad \lambda=\frac{r}{r_2}. \tag{6.16}$$

Il vient de (6.15) que

$$c=\frac{dr_2}{dt}=\frac{2}{\omega}\,\frac{r_2}{t}=\frac{2}{\omega}(\beta Af)^{\frac{1}{\omega}}t^{\frac{2}{\omega}-1}=\frac{2}{\omega}(\beta Af)^{\frac{1}{2}}r_2^{\frac{2-\omega}{2}}. \tag{6.17}$$

Pour $\omega>2$ l'onde de choc ralentit avec le temps, pour $\omega<2$ elle accélère*). En particulier, pour $\omega=2{,}5$ il vient

$$r_2=(\beta Af)^{2/5}t^{4/5}; \quad c=\frac{4}{5}(\beta Af)^{1/4}\,\frac{1}{r_2^{1/4}}. \tag{6.18}$$

Dans les conditions au saut figure une quantité abstraite

$$q=\frac{a_1^2}{c^2}=\frac{\gamma p_1}{\varrho_1 c^2}.$$

Il découle des considérations dimensionnelles générales que la valeur

*) Les lois de la chute de densité ne définissent pas à elles seules le ralentissement ou l'accélération d'une onde de choc qui se propage dans un milieu de densité variable. Les lois de la chute de pression et les effets perturbateurs extérieurs se manifestant à l'intérieur de l'onde peuvent sensiblement altérer les lois du mouvement de l'onde.

Il a été montré au § 14, ch. IV, que pour les mouvements automodèles régis par les constantes $[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}$ et $[E]=\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$ et, en particulier, pour une forte explosion ponctuelle dans un milieu de densité initiale variable est vraie la formule $c=\text{const}/r_2^{(3-\omega)/2}$, de sorte que pour tous les $\omega<3$ on a un ralentissement.

Pour l'écoulement automodèle en question, défini par les constantes $[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}$ et $[f]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$ et considéré dans un milieu de densité initiale variable suivant la loi $\varrho_1=A/r^{\omega}$, l'onde de choc s'accélère pour $\omega<2$ et ralentit pour $\omega>2$.

abstraite q, fonction de trois grandeurs dimensionnées f, A, r_2 seulement, doit être constante. Des formules (6.2) et (6.17) on tire

$$q=\frac{\pi\gamma\omega^2}{2(\omega-1)(3-\omega)\beta}. \tag{6.19}$$

La valeur de ω étant fixée, celle de q se détermine par la constante β, et inversement.

Les conditions sur l'onde de choc (6.14) réduites à la forme adimensionnée à l'aide de (6.9) donnent

$$\left.\begin{aligned} V_2&=\frac{4}{\gamma+1}\,\frac{1-q}{\omega},\\ z_2&=\frac{4}{\omega^2}\,\frac{[2\gamma-(\gamma-1)q][\gamma-1+2q]}{(\gamma+1)^2},\\ \mathcal{R}_2&=\frac{2(\gamma+1)(3-\omega)(\omega-1)}{\pi\gamma\omega^2}\,\frac{q}{\gamma-1+2q},\\ M_2&=\frac{8(\omega-1)}{\gamma\omega^2}\,q, \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

avec

$$\lambda_2=1.$$

Si q est donné, les conditions (6.20) représentent les données de Cauchy pour le système d'équations (6.10) et elles définissent donc complètement l'écoulement du gaz dans son ensemble à l'intérieur de l'onde de choc. De la relation (6.19) on détermine β qui permet de préciser la formule de la variable λ. Il est clair qu'en donnant q on détermine la constante α, ce qui complète ainsi la loi de dégagement de l'énergie (6.6). On voit donc que choisir q revient à établir la loi de dégagement de l'énergie au centre de symétrie.

Les conditions aux limites (6.20) permettent aisément de déterminer les constantes dans les intégrales (6.11), (6.12) et (6.13). Après des opérations simples on obtient

$$C_1=0;$$

$$C_2=\frac{\pi\gamma^{-1}2^{\frac{\omega(3-2\gamma)-3(\gamma-1)}{3-\omega}}}{\omega^2(\gamma+1)^{\gamma+1}(3-\omega)^{\gamma-1}}\left[\frac{\gamma\omega^2}{q(\omega-1)}\right]^{\frac{3\gamma-1-\omega}{3-\omega}}[2\gamma-(\gamma-1)q][\gamma-1+2q]^{\gamma} \tag{6.21}$$

et pour $\omega=2{,}5$

$$C_2=\frac{384(3\gamma-4)}{3125\pi\gamma^2(\gamma-1)}\,q^2. \tag{6.22}$$

Si $\gamma=\frac{4}{3}$, $C_3=0$, ce qui élimine la variable λ de l'intégrale de l'énergie et de l'intégrale de l'adiabacité et le problème s'en trouve sensiblement simplifié. Si $\omega=2{,}5$ et $\gamma=\frac{4}{3}$, le problème de Cauchy indiqué ci-dessus se résout par une simple quadrature, cette dernière étant calculée sous la forme finie.

On donne plus loin les résultats des calculs numériques pour $\gamma=\frac{4}{3}$, $\omega=2{,}5$ et pour $\gamma=\frac{5}{3}$, $\omega=2{,}5$*).

Comme le montre l'analyse de la solution pour $\gamma=\frac{4}{3}$ et $\omega=2{,}5$, l'écoulement perturbé du gaz est engendré par une explosion ponctuelle libérant une énergie finie à l'instant $t=0$ au centre de symétrie. La valeur de l'énergie dissipée augmente à mesure que q diminue, i.e. avec l'augmentation de l'intensité de l'onde de choc. Pour $0<q<\frac{1}{36}$ il se forme, au voisinage du centre de symétrie, une sphère vide de rayon r^* telle que

$$r^*=\lambda^* r_2,$$

où la constante λ^* dépend uniquement de q et est égale à la valeur du paramètre λ à la frontière intérieure où la pression et la densité s'annulent. Si $q>\frac{1}{36}$, l'écoulement perturbé du gaz engendré par l'explosion occupe tout l'intérieur de l'onde de choc sphérique. Pour $q>\frac{1}{36}$ la densité et la pression au centre deviennent infiniment grandes. Lorsque $q=0$, la distribution des caractéristiques de l'écoulement du gaz coïncide avec celle des caractéristiques du gaz étudiées au § 15, ch. IV, pour une explosion ponctuelle au sein d'une masse impondérable de densité variable pour $p_1=0$.

On peut expliquer de diverses manières qu'un écoulement prolongeable jusqu'au centre de symétrie devient un écoulement amenant la formation au voisinage du centre d'une sphère vide en dilatation. On a vu au § 15, ch. IV, que cet effet peut se produire lorsque la densité diminue plus fortement, i.e. lorsqu'augmente l'exposant $\omega(\varrho_1=A/r^\omega)$, ou le coefficient γ si ω est fixe.

Dans le cas envisagé pour $\omega=2{,}5$ et $\gamma=\frac{4}{3}$ cet effet est dû à la variation du paramètre q qui détermine la quantité d'énergie libérée au centre de symétrie. Les distributions des caractéristiques de l'écoulement pour $\gamma=\frac{4}{3}$ et $\omega=2{,}5$ et pour q différents sont données figures 135 à 142.

On vérifie aisément que pour $\gamma=\frac{4}{3}$ le système d'équations différentielles ordinaires (6.10) admet pour solution

$$V=\frac{2}{3},\quad \mathcal{R}=\mathcal{R}_0=\text{const},\quad M=\frac{4\pi}{3}\mathcal{R}_0,\quad z=\frac{4}{27}-\frac{8\pi}{9}\mathcal{R}_0, \tag{6.23}$$

---

*) La solution du problème considéré pour $\gamma=\frac{5}{3}$ et $\omega=2{,}5$ obtenue par l'intégration numérique du système (6.10) est contenue dans l'article de P. Carrus, P. Fox, F. Gaas, Z. Kopal, The Astrophysical Journal, t. 113, 1951, pp. 496-519.

où $\mathcal{R}_0$ est une constante arbitraire positive. D'après les formules (6.9) la solution exacte des équations aux dérivées partielles (6.1) a la forme

$$\left.\begin{aligned} &v=\frac{2}{3}\frac{r}{t}; \quad \varrho=\frac{\mathcal{R}_0}{ft^2}; \quad \mathcal{M}=\frac{r^3}{ft^2}\frac{4\pi}{3}\mathcal{R}_0; \\ &p=\frac{r^2}{ft^4}\left[\frac{\mathcal{R}_0}{9}-\frac{2\pi}{3}\mathcal{R}_0^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.24}$$

Dans l'écoulement correspondant la densité ne dépend que du temps sans dépendre du rayon. La solution (6.24) est un cas particulier de la solution (15.24), ch. IV, pour $\gamma=\frac{4}{3}$ et $\beta=0$; les quantités $\varkappa$ et $\mathcal{R}_0$ sont liées par

$$\varkappa=\frac{1}{9\mathcal{R}_0}-\frac{2\pi}{3}.$$

Pour $\gamma=\frac{4}{3}$ et $\omega=2{,}5$ les formules (6.20) donnent

$$\left.\begin{aligned} &V_2=\frac{24}{35}(1-q); \quad \mathcal{R}_2=\frac{21}{50\pi}\frac{q}{\frac{1}{3}+2q}; \\ &M_2=\frac{36}{25}q; \quad r_2=\frac{16(8-q)(1+6q)}{25\cdot 49}. \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

Il découle des conditions sur l'onde de choc (6.25) que pour $q=\frac{1}{36}$ on a $V_2=\frac{2}{3}$. Si l'on pose maintenant $q=\frac{1}{36}$ et si l'on donne à la constante arbitraire $\mathcal{R}_0$ une valeur $\mathcal{R}_2$ égale à $3/\pi\cdot 100$ selon (6.25), on trouve que

$$z=\frac{4}{27}-\frac{8\pi}{9}\mathcal{R}_0=z_2 \quad \text{et} \quad \frac{4\pi\mathcal{R}_0}{3}=M_2.$$

Ainsi pour $\gamma=\frac{4}{3}$, $\omega=2{,}5$ et $q=\frac{1}{36}$ les formules représentent sous une forme simple la solution exacte du problème de l'explosion envisagé. Dans ce cas la solution (6.24) revêt une forme particulièrement simple

$$\frac{v}{v_2}=\lambda; \quad \frac{\varrho}{\varrho_2}=1; \quad \frac{p}{p_2}=\lambda^2; \quad \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_2}=\lambda^3; \quad \lambda=\frac{r}{r_2}. \tag{6.26}$$

La solution (6.26) sépare les solutions obtenues pour $q<\frac{1}{36}$ pour les écoulements avec le vide au centre de symétrie et les solutions applicables aux écoulements prolongeables jusqu'au centre de symétrie pour $q>\frac{1}{36}$. Les figures 134 à 141 donnent également les graphiques des courbes de la solution (6.26).

En utilisant la solution exacte (15.24) du chapitre IV on peut trouver des solutions exactes simples pour d'autres types de problèmes de l'explosion.

En effet, de la solution (15.24), ch. IV, et des conditions aux limites sur l'onde de choc (6.14) pour u_2, ϱ_2 et $\mathcal{M}_2$ on peut que ces dernières seront

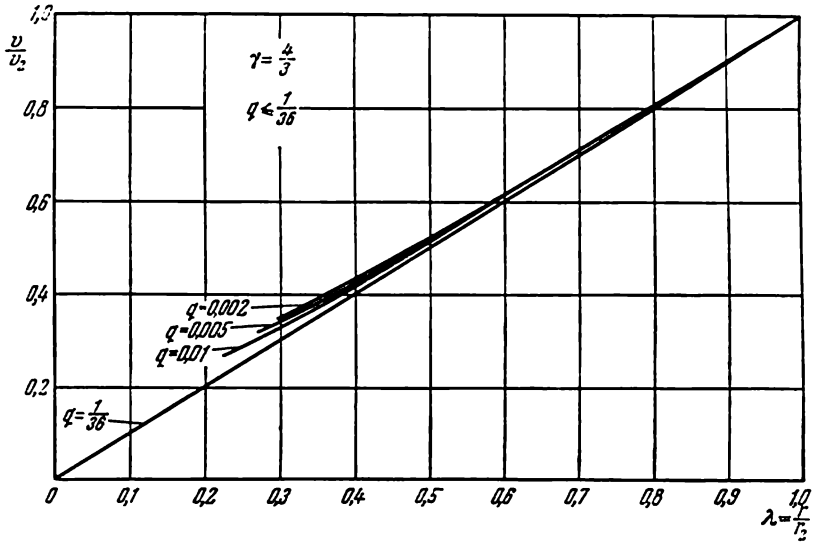


Fig. 135. Distribution des vitesses dans le champ de l'écoulement de gaz perturbé. Il se forme, au voisinage du centre, une sphère vide de rayon croissant $r^* = \lambda^*(q) r_2$

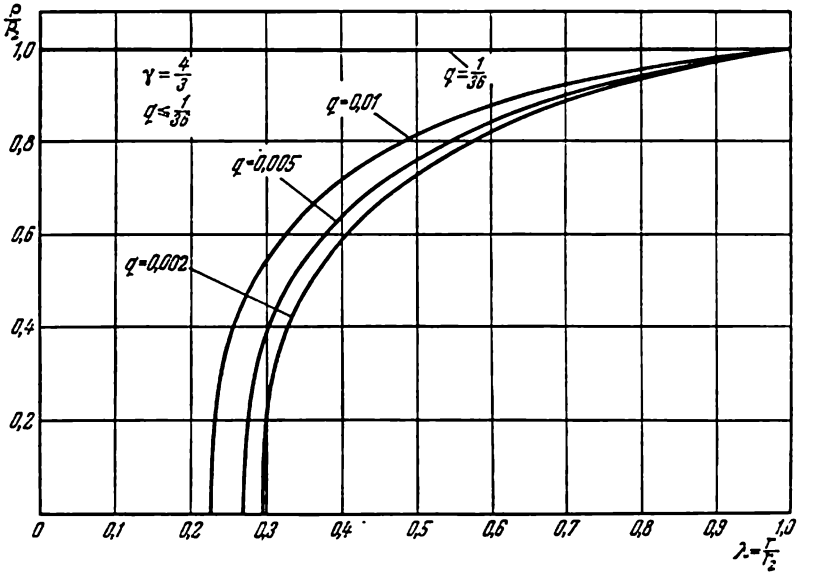


Fig. 136. Distribution de la densité dans le champ de l'écoulement de gaz perturbé. La densité est nulle à la frontière intérieure

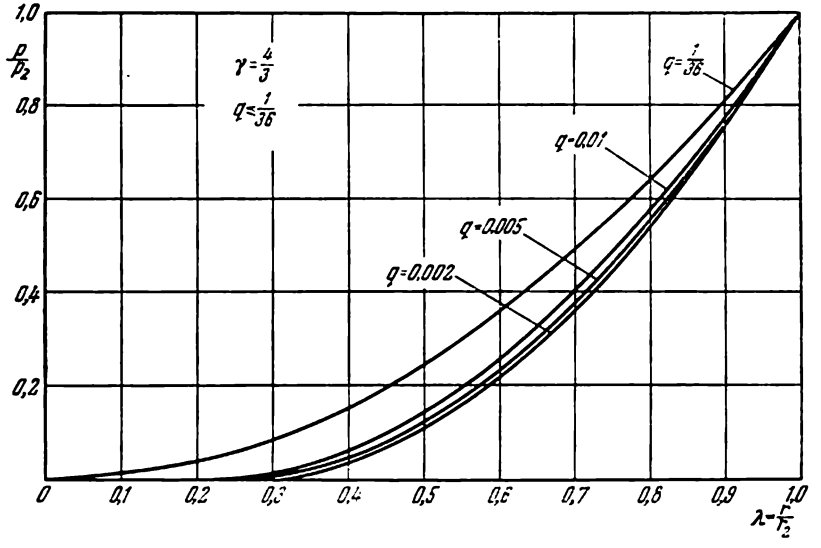


Fig. 137. Distribution de la pression dans le champ de l'écoulement de gaz perturbé. La pression est nulle à la frontière intérieure

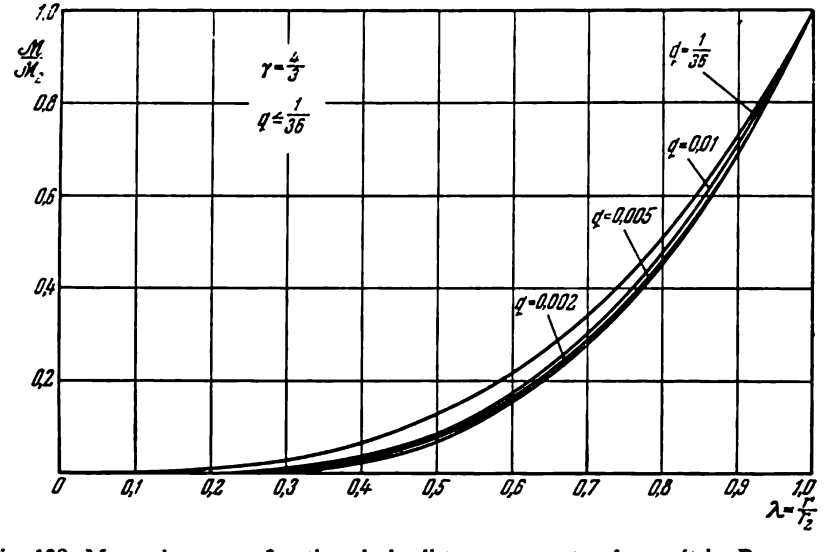


Fig. 138. Masse de gaz en fonction de la distance au centre de symétrie. Pour $r=r^*$ on a $M=0$

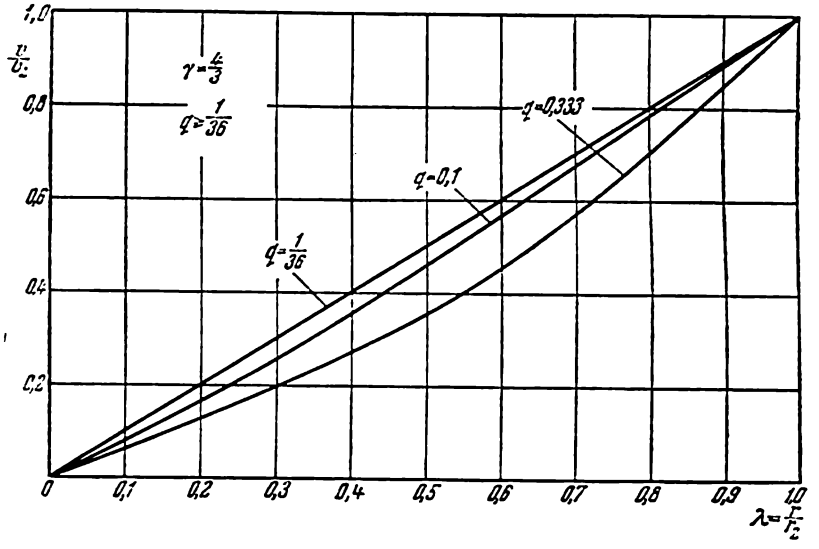


Fig. 139. Distribution des vitesses dans le champ de l'écoulement de gaz perturbé. Ecoulement est prolongeable jusqu'au centre de symétrie

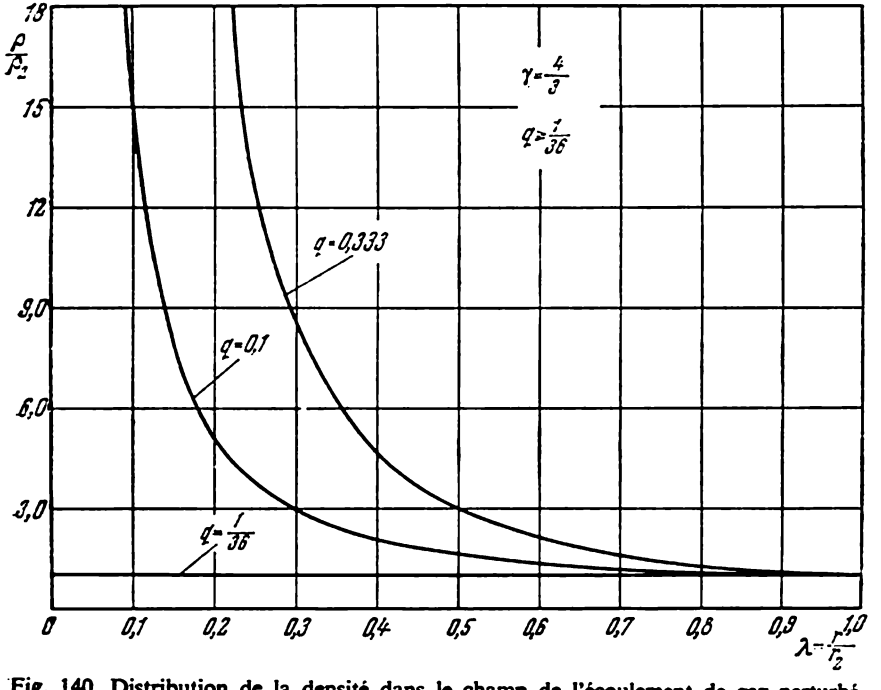


Fig. 140. Distribution de la densité dans le champ de l'écoulement de gaz perturbé. Au centre de symétrie la densité est infinie pour $q>\frac{1}{36}$

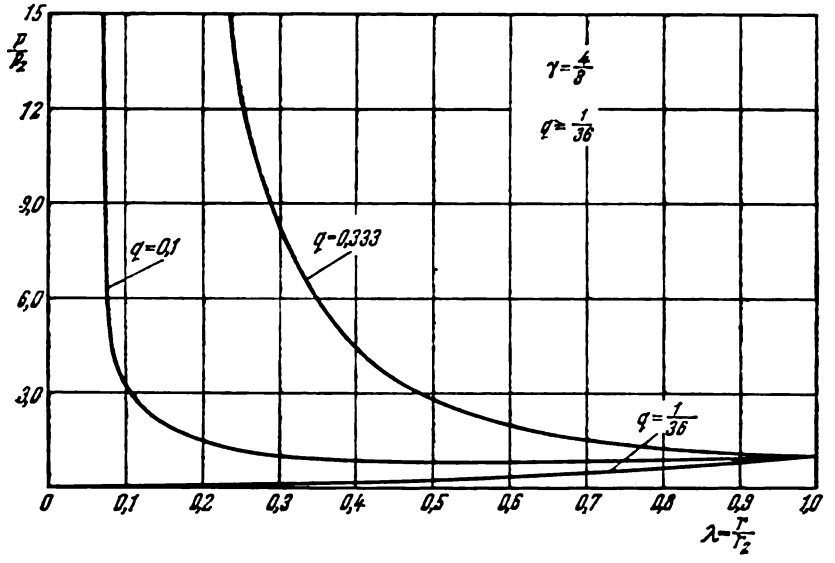


Fig. 141. Distribution de la pression dans le champ de l'écoulement de gaz perturbé. Au centre de symétrie la pression est infinie pour $q>\frac{1}{36}$

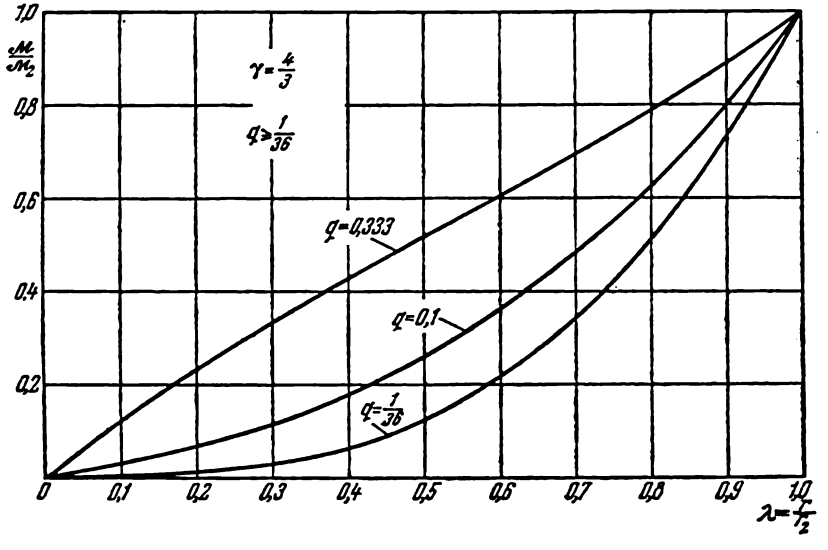


Fig. 142. Masse en fonction de la distance au centre de symétrie

remplies en vertu de (6.2) si les valeurs constantes q, $\mathcal{R}_0$, γ_1 et ω sont liées par*)

$$q=\frac{\gamma_1\omega^2\pi\mathcal{R}_0}{6(\omega-1)}, \quad q=1-\frac{(\gamma_1+1)\omega}{6}, \tag{6.27}$$

la loi du mouvement de l'onde de choc étant définie par la formule

$$r_0^{\omega}=\frac{3fA}{(3-\omega)\mathcal{R}_0}\,t^2. \tag{6.28}$$

La condition sur l'onde de choc pour p_2 en vertu de (15.24), ch. IV, (6.2), (6.14) et (6.28) fournit l'égalité

$$\varkappa\left(\frac{3fAt_0^2}{3-\omega}\right)^{\gamma-\frac{4}{3}}\frac{1}{r_2^{\omega\left(\frac{2}{3}+\gamma\right)}}+\beta r_0^2\left(\frac{3fAt_0^2}{3-\omega}\right)^{\gamma-2}\frac{1}{r_2^{\omega\gamma+2}}=$$

$$=\frac{2\pi}{9}\,\frac{(3-\omega)[6+(\gamma_1-1)\omega]}{(\omega-1)[6-(\gamma_1+1)\omega]}\,\frac{1}{r_2^{2\omega}}; \quad \left(\mathcal{R}_0=\frac{1}{3\left(2\pi+\frac{\varkappa}{\gamma-1}\right)}\right). \tag{6.29}$$

Si $\omega<3$, la relation (6.29) serait satisfaite dans deux cas :

$$\text{1.}\quad \left.\begin{aligned}&\beta=0;\quad \gamma=\frac{4}{3};\quad \omega=\frac{12(2+\gamma_1)}{4+9\gamma_1};\quad q=\frac{2\gamma_1(2-\gamma_1)}{4+9\gamma_1};\\ &\varkappa=\frac{2\pi}{9}\,\frac{(3-\omega)[6+(\gamma_1-1)\omega]}{(\omega-1)[6-(\gamma_1+1)\omega]}\end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

— l'on obtient la famille de solutions dépendant de γ_1; si $\gamma_1=\gamma=\frac{4}{3}$, la solution répondant aux relations (6.30) coïncide avec la solution (6.26) :

$$\text{2.}\quad \left.\begin{aligned}&\varkappa=0;\quad \gamma=2\left(1-\frac{1}{\omega}\right);\quad \gamma_1=\frac{6(\omega-1)(6-\omega)}{\omega(7\omega-6)};\\ &q=\frac{\omega(6-\omega)}{6(7\omega-6)};\\ &\beta r_0^2=\left(\frac{3fAt_0^2}{3-\omega}\right)^{\frac{2}{\omega}}\frac{2\pi}{9}\,\frac{(3-\omega)[6+(\gamma_1-1)\omega]}{(\omega-1)[6-(\gamma_1+1)\omega]}.\end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

Si $\gamma_1=\gamma$, alors

$$\gamma=\frac{7}{6};\quad \omega=2{,}4;\quad q=\frac{2}{15};\quad \beta r_0^2=(5fAt_0^2)^{\frac{5}{6}}\,\frac{16\pi}{21}. \tag{6.32}$$

Au cas 2 on a obtenu la famille de solutions particulières pour différents ω;

*) En établissant (6.27) et (6.28) on a remplacé la constante γ par γ_1 dans les conditions au saut (6.14).

Dans certains cas on peut considérer la valeur des équations (6.1) comme l'indice de la polytrope et poser dans les conditions au saut $\gamma_1=c_p/c_v\neq\gamma$.

toutefois pour chaque ω γ et γ_1 sont de valeurs inégales et c'est pour $\omega=2{,}4$ que $\gamma=\gamma_1=\frac{7}{6}$.

Au cas 1 la distribution des caractéristiques de l'écoulement gazeux à l'intérieur de l'onde de choc pour tous les γ_1 est représentée par les formules (6.26). Dans le cas 2 on a les formules :

$$\frac{v}{v_2}=\lambda; \quad \frac{\varrho}{\varrho_2}=1; \quad \frac{p}{p_2}=1; \quad \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_2}=\lambda^3; \quad \lambda=\frac{r}{r_2}. \tag{6.33}$$

Par conséquent, dans le cas 2 non seulement la densité mais aussi la pression sont constantes derrière le front d'onde.

Dans les deux cas l'écoulement est prolongeable jusqu'au centre de symétrie avec $p=0$ au centre dans le premier cas et $p=p_2(t)$ dans le second. Si $\gamma=\gamma_1=\frac{7}{6}$ est l'indice de l'adiabatique, la solution (6.33) correspond à une rupture de l'équilibre instable sans libération de l'énergie (explosion dynamique)*). L'énergie du gaz animé d'un mouvement perturbé à l'intérieur de l'onde d'explosion est égale à son énergie initiale à l'équilibre.

En utilisant les formules (15.24), (6.28), (6.31) et (6.32) écrivons la solution (6.33) sous la forme dimensionnée

$$\mathcal{M}=\frac{2}{9}\frac{r^3}{ft^2}, \quad \varrho=\frac{1}{6\pi ft^2}, \quad v=\frac{2}{3}\frac{r}{t},$$

$$p=\frac{K}{f}\frac{1}{t^{7/3}}, \quad K=\frac{1}{189\pi}(30\pi fA)^{\frac{5}{6}},$$

le rayon de l'onde de choc étant donné par la formule

$$r_2(t)=(30\pi fAt)^{\frac{5}{12}}.$$

Considérons maintenant le résultat d'une solution numérique pour $\gamma=\frac{5}{3}$ qui correspond au gaz monoatomique ou complètement ionisé.

Les résultats des calculs pour $\gamma=\frac{5}{3}$ et pour diverses valeurs numériques de q sont donnés figures 143 à 146.

Les extrémités de gauche des valeurs $\lambda=r/r_2$ correspondent pour les courbes de distribution à $\mathcal{M}=0$ si bien qu'on peut les considérer comme les frontières intérieures, surgissant au centre de symétrie au moment initial. L'écoulement perturbé du gaz peut être assimilé à celui résultant du déplacement du gaz pour un piston sphérique spécifique dont le rayon r^* croît à partir de zéro suivant la loi

$$r^*=\lambda^* r_2 \quad \text{où} \quad \lambda^*(\gamma, q, \omega)=\text{const}. \tag{6.34}$$

La fonction $\lambda^*(\gamma, q)$ pour $\gamma=\frac{4}{3}$ et $\gamma=\frac{5}{3}$, $\omega=2{,}5$ est donnée figure 147.

---

*) L. Sédov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 112, n° 2, 1957,

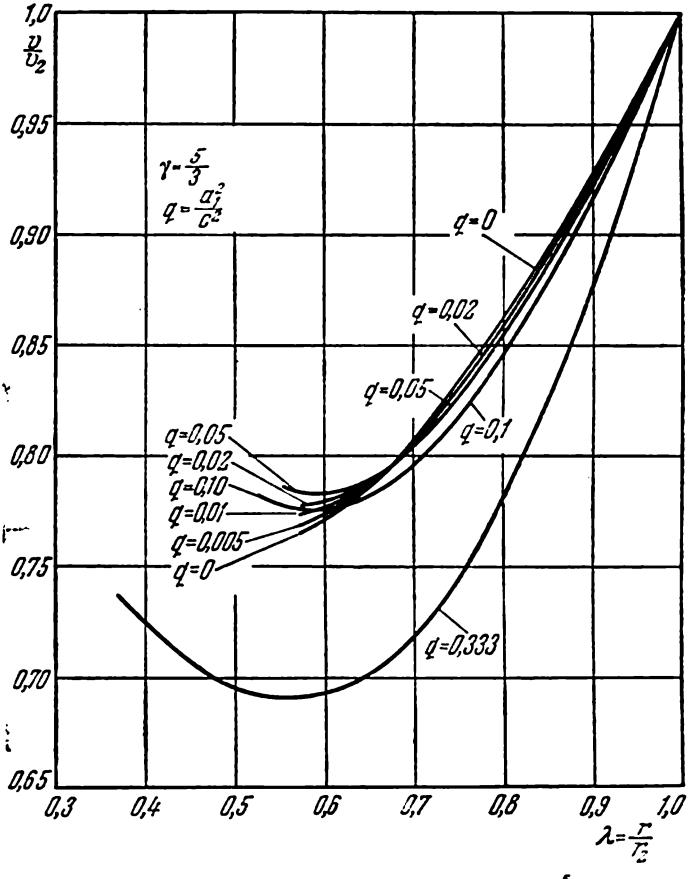


Fig. 143. Distribution des vitesses pour $\gamma=\frac{5}{3}$

Lorsque $q\to 0$, la solution envisagée tend vers celle établie au § 14, ch. IV, en l'absence de forces de l'attraction newtonienne.

Lorsque $q=0$, on a $\lambda^*\neq 0$ et λ^* n'est fonction que de γ; les valeurs limites correspondantes de $r^*/r_2=\lambda^*(0,\ \gamma)$ pour $\gamma=\frac{5}{3}$, $\gamma=\frac{4}{3}$ et $\omega=2{,}5$ sont également données figure 147.

Etudions le comportement asymptotique de la solution au voisinage de la frontière intérieure. Sur cette frontière $\mathcal{M}=0$ et, étant donné que $r=r^*$ est une valeur finie, il découle de (6.9) que lorsque $r\to r^*$, $M\to 0$. Si bien que les équations du mouvement (6.10) au voisinage de $r\approx r^*$ tendent vers les équations (5.10) et (5.11), ch. IV. Ceci s'explique par le fait que les forces de l'attraction newtonienne sont faibles au voisinage de la frontière intérieure et tendent vers zéro à la limite.

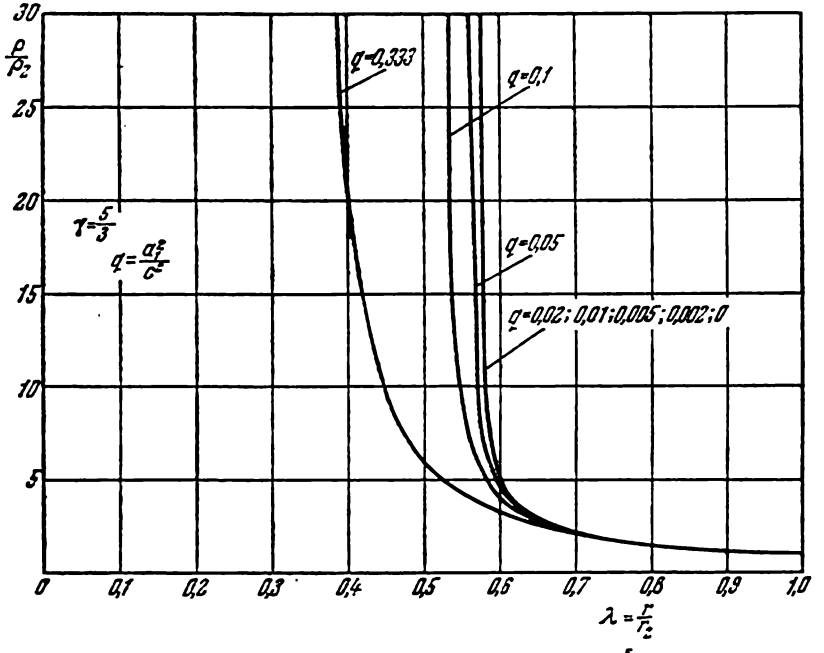


Fig. 144. Distribution de la densité pour $\gamma=\frac{5}{3}$

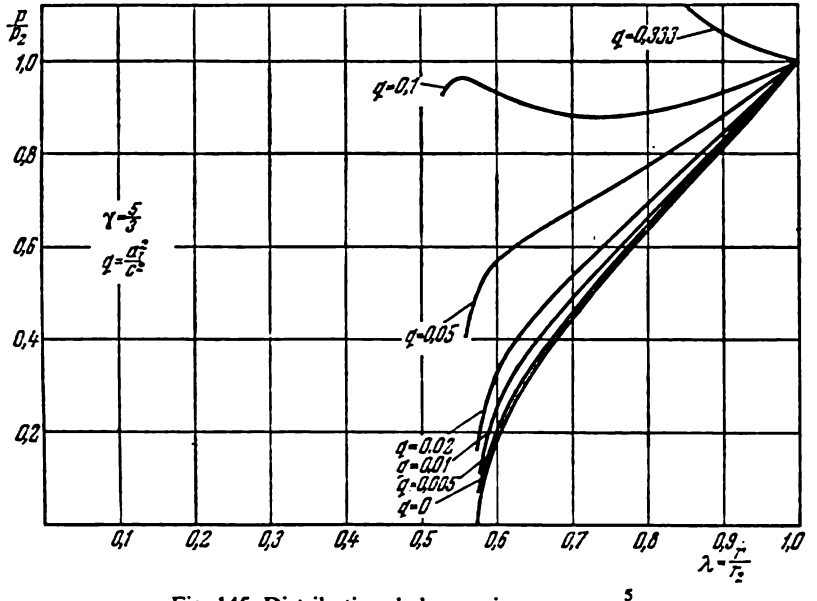


Fig. 145. Distribution de la pression pour $\gamma=\frac{5}{3}$

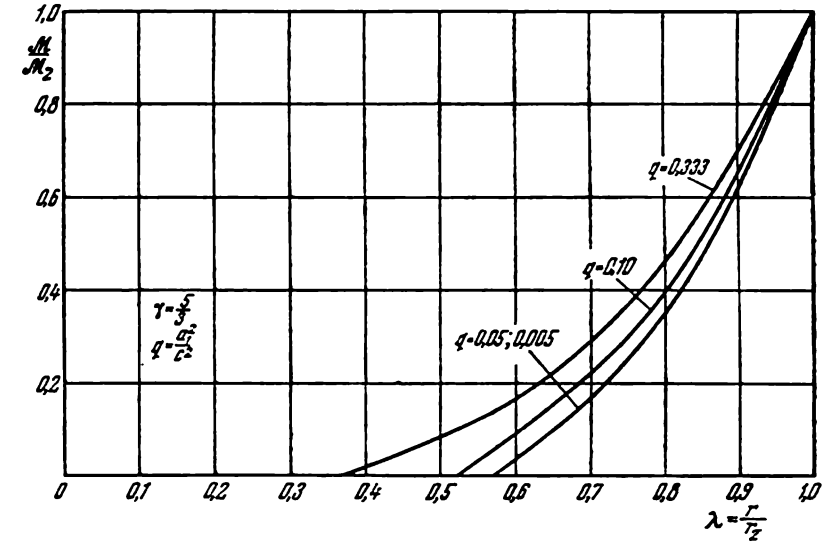


Fig. 146. Masse de gaz en fonction de la distance au centre de symétrie

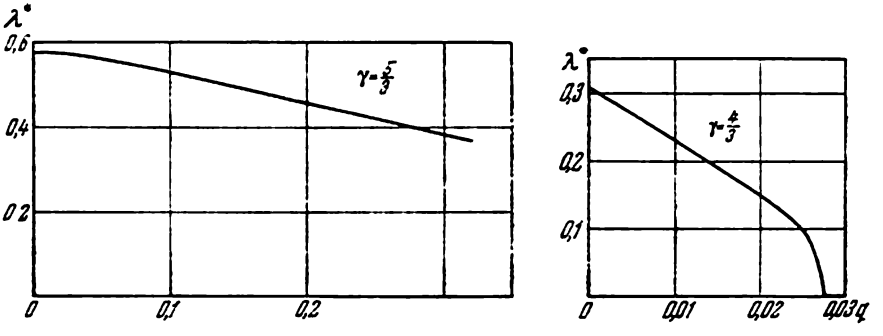


Fig. 147. Rayon de la frontière intérieure en fonction de $q=a_1^2/c^2$ pour $\gamma=\frac{5}{3}$ et $\gamma=\frac{4}{3}$

Pour établir les formules asymptotiques il suffit d'étudier les solutions des équations ordinaires (5.10) et (5.11), ch. IV, au voisinage du point singulier $V=\delta=2/(5-\omega)$, $z=0$. Dans le cas considéré $\omega=2{,}5$, de sorte que $\delta=\frac{4}{5}$. Le cas $q=0$ au voisinage de la frontière intérieure ($r\to r^*$) est traduit par les formules asymptotiques (14.17) (§ 14, ch. IV).

Il n'y a qu'une, et une seule, courbe intégrale entrant dans le point singulier $V=\frac{4}{5}$, $z=0$, notamment la courbe régie par la loi asymptotique

$$z=\frac{2}{5}\gamma\left(\frac{4}{5}-V\right). \tag{6.35}$$

Cette courbe correspond à la solution du type explosion ponctuelle pour $\omega=2{,}5$ et $q=0$. Mais elle entraîne aussi $C_3=0$, or, dans le cas considéré $q\neq 0$, $C_3\neq 0$; pour cette raison il faut avoir recours à d'autres solutions. Les équations asymptotiques des autres courbes intégrales situées dans le plan z, V et aboutissant au point singulier $V=\frac{4}{5}$, $z=0$ sont au voisinage de ce point de la forme

$$z=A\left(\frac{4}{5}-V\right)^{\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)}}, \tag{6.36}$$

où A est une constante. Il est manifeste que $\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)}<1$. Il est facile de vérifier directement la validité de la formule (6.36).

En s'aidant de (6.36) et des intégrales (6.11) et (6.13) on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{R}=B\left(\frac{4}{5}-V\right)^{-\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)}}, \qquad M=10\pi B\left(\frac{4}{5}-V\right)^{\frac{\gamma}{6(\gamma-1)}},\\ &P=\frac{zR}{\gamma}=AB\frac{1}{\gamma}, \qquad B=\frac{5\gamma C_3}{4A}\lambda^{*-5}. \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

L'intégrale (6.12) et les formules (6.21) et (6.22) permettent d'exprimer les constantes A, C_2 et C_3 au moyen de γ, q et λ^*. Les formules (16.37) deviennent incorrectes pour $\gamma=\frac{4}{3}$, car dans ce cas $C_3=0$. Ensuite, en utilisant la seconde équation (6.10) et (6.37) on obtient aisément la formule asymptotique

$$\frac{r-r^*}{r^*}=\frac{\lambda-\lambda^*}{\lambda^*}=\frac{5\gamma}{12(\gamma-1)}\left(\frac{4}{5}-V\right). \tag{6.38}$$

En vertu de (6.9), (6.20), (6.37) et (6.38) les formules asymptotiques correspondantes pour les valeurs dimensionnées lorsque $\gamma\neq\frac{4}{3}$ et $r\to r^*$ sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{v}{v_2}=\frac{\gamma+1}{2(1-q)}\frac{r^*}{r_2},\\ &\frac{\varrho}{\varrho_2}=\frac{25\pi\gamma(\gamma-1+2q)B}{6(\gamma+1)q\left[\frac{12(\gamma+1)}{5\gamma}\frac{r-r^*}{r^*}\right]^{\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)}}},\\ &\frac{p}{p_2}=\frac{625\pi\gamma(\gamma+1)AB}{96q[2\gamma-(\gamma-1)q]}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^3,\\ &\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_2}=\frac{\pi\gamma B}{0{,}192q}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^3\left[\frac{12(\gamma-1)}{5\gamma}\frac{r-r^*}{r^*}\right]^{\frac{\gamma}{6(\gamma-1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

Pour $q=0$ le comportement asymptotique de la solution a été étudié au

§ 14, ch. IV; on a montré qu'au cas considéré, pour $\omega=2{,}5<3$, la pression à la frontière intérieure est égale à zéro et la densité vérifie la formule asymptotique

$$\frac{\varrho}{\varrho_2}=A\left(\frac{r-r^*}{r_2}\right)^{\frac{2{,}5\gamma-3{,}5}{3\gamma-3{,}5}}.$$

Il découle de cette formule que lorsque $r\to r^*$ et $\gamma=\frac{4}{3}$, le rapport ϱ/ϱ_2 tend vers zéro. Pour $\gamma=1{,}4$ le rapport ϱ/ϱ_2 est fini et pour $\gamma=\frac{5}{3}$ il tend vers l'infini comme $A\left(\frac{r_2}{r-r^*}\right)^{4/9}$.

Selon les formules (6.39), pour $\omega=2{,}5$, $q>0$ et $\gamma\neq\frac{4}{3}$ la masse à la frontière intérieure est nulle et la pression est finie et diffère de zéro. Ceci s'explique par le fait que le travail des forces de pression à la frontière intérieure (accompli par le piston sphérique) diffère de zéro.

On peut déduire des solutions obtenues que l'énergie totale du champ de l'écoulement perturbé du gaz à l'intérieur de l'onde de choc est finie. Comme pour $\gamma>\frac{4}{3}$ et $\omega=2{,}5$ l'énergie initiale est égale à l'infini négatif, on doit admettre dans la position idéalisée du problème que ces écoulements sont engendrés par le dégagement, à l'instant zéro, d'une énergie infiniment grande au centre de symétrie. Cette énergie contribue d'une part à compenser l'énergie initiale négative infiniment grande et d'autre part à susciter l'écoulement perturbé du gaz. L'analyse dimensionnelle nous apprend que l'énergie de l'écoulement de perturbation est constante. L'énergie négative supplémentaire que possèdent les masses de gaz entraînées par l'onde de choc est compensée par l'apport d'énergie fourni par le travail des forces de pression sur la frontière sphérique intérieure.

Si $\gamma=\frac{4}{3}$, l'énergie initiale et celle de l'écoulement de perturbation sont finies et indépendantes du rayon de l'onde de choc; dans ce cas la pression à la frontière intérieure est nulle. Il n'y a dégagement instantané d'énergie qu'au centre de symétrie à l'instant zéro.

Si $\omega<2{,}5$ alors conformément à la formule (6.3) l'énergie initiale à l'intérieur de toute sphère de rayon r_2 est finie. L'analyse du problème et les calculs montrent que pour $\gamma=\frac{5}{3}$ et $\omega=1{,}4$ ou $\omega=2$ on obtient les écoulements correspondant à la présence d'un piston sphérique exerçant une pression non nulle, en outre le travail W fourni par le piston est comparable à l'énergie initiale du gaz H : $H>0$ pour $\omega=1{,}4$ et $H<0$ pour $\omega=2$.

Le rapport $\frac{W}{|H|}$ augmente à mesure que q diminue, i.e. avec l'augmentation de l'intensité de l'onde de choc.

Le rapport r^*/r_2, où r^* est le rayon du piston, augmente également lorsque q diminue. Il est à signaler que la pression p^* sur le piston est su-

périeure à la pression p_2 sur l'onde de choc, le rapport p^*/p_2 augmentant avec la diminution de q.

On peut construire dans le cadre des mouvements automodèles étudiés des modèles d'explosions stellaires pour petits γ, par exemple pour $\gamma=\frac{7}{6}$ ou $\gamma=\frac{4}{3}$. Les petites valeurs de γ peuvent être parfois considérées comme les indices de la polytrope lorsque les sources réparties dans le volume de gaz dégagent continûment de la chaleur.

Les écoulements dont il était question sont automodèles. En admettant une position linéarisée du problème il est possible d'envisager les différents mouvements non automodèles voisins des mouvements automodèles*). Dans ce cas aussi on peut exprimer les caractéristiques par lesquelles les solutions cherchées diffèrent de celles automodèles par des relations analogues aux intégrales réduites de masse, d'adiabacité et d'énergie qu'on a vues plus haut.

3. L'explosion dynamique de l'équilibre en cas de gradient de température nul. Considérons maintenant le problème de l'explosion dynamique de l'équilibre d'un gaz parfait pour le cas où l'on suppose la présence d'un échange intense d'énergie derrière le front de l'onde de choc, i.e. lorsque dans le domaine de l'écoulement perturbé du gaz le gradient de température est posé égal à zéro**). Les équations du mouvement dans le domaine de perturbation prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\frac{\partial\varrho v}{\partial r}+\frac{2\varrho v}{r}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}+f\frac{\mathcal{M}}{r^2}=0,\\ &\qquad\qquad \frac{\partial\mathcal{M}}{\partial r}-4\pi r^2\varrho=0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

Soit à l'instant zéro une sphère gazeuse au repos de densité répartie suivant la loi

$$\varrho_1(r)=Ar^{-\omega} \quad (A>0,\ 1<\omega<3). \tag{6.41}$$

Trouvons à partir des équations (6.40) la distribution des caractéristiques de l'écoulement à l'équilibre :

$$v_1=0, \quad \mathcal{M}_1=\frac{4\pi A}{3-\omega}r^{3-\omega}, \quad p_1=\frac{2\pi A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)}r^{2-2\omega}. \tag{6.42}$$

*) M. Lidov, *Sur la théorie des écoulements non stationnaires de gaz compte tenu des forces d'attraction*, « Prikladnaïa matematika i mekhanika », t. 19, op. 5, 1955.

**) E. Riazanov, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 126, n° 5, 1959.

Sur l'onde de choc se propageant à travers un gaz au repos doivent se remplir les conditions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_2=\mathcal{M}_1, \quad \varrho_2(c-v_2)=\varrho_1 c, \\ p_2+\varrho_2(c-v_2)^2=p_1+\varrho_1 c^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

On voit aisément que le système (6.40) admet la solution exacte suivante, limitée par l'onde de choc sur laquelle sont remplies les conditions (6.43) et (6.42) :

$$\left.\begin{aligned} & v=\frac{2}{3}\frac{r}{t}, \quad \varrho=\frac{1}{6\pi f}\frac{1}{t^2}, \quad \mathcal{M}=\frac{2}{9f}\frac{r^3}{t^2}, \\ & p=\frac{(13\omega-12)(3-\omega)^{1-\frac{2}{\omega}}(18\pi Af)^{\frac{2}{\omega}}}{162\pi f\omega(\omega-1)}\, t^{4\left(\frac{1}{\omega}-1\right)}, \\ & r_2=\left(\frac{18\pi Af}{3-\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}} t^{\frac{2}{\omega}}; \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

en outre, l'énergie initiale du gaz contenu dans la sphère de rayon r_2 est égale à l'énergie totale du gaz en mouvement derrière le front de l'onde de choc, de sorte qu'il n'y a aucune source supplémentaire d'énergie mécanique ou thermique susceptible d'engendrer l'écoulement envisagé si γ et ω sont liés par

$$\gamma=\frac{2(8\omega-15)}{3\omega} \tag{6.45}$$

dans le cas de $\omega<\frac{5}{2}$, $\omega\neq 2$ et si

$$\left.\begin{aligned} \gamma=\frac{5\sqrt{3}-4}{3}\simeq 1{,}55, \\ \omega=\frac{6}{13}(\sqrt{3}+4)\simeq 2{,}65 \end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

lorsque $\omega>\frac{5}{2}$.

On déduit de (6.45) que pour $\omega<\frac{5}{2}$ les valeurs de γ et ω qui nous intéressent se situent dans les intervalles $1<\gamma<\frac{4}{3}$, $\frac{30}{13}<\omega<\frac{5}{2}$.

On en conclut qu'un écoulement du type explosion sans dégagement d'énergie dans un gaz parfait dont la densité est initialement répartie suivant la loi (6.41) n'est possible que si ω et γ sont définis par les formules (6.45) et (6.46).

Pour $\omega=2{,}4$ on obtient de (6.45) que $\gamma=\frac{7}{6}$. Dans ce cas qui est décrit au point 2 du paragraphe présent, l'explosion dynamique de l'équilibre provoque des écoulements adiabatiques du gaz parfait. La condition d'adiabacité coïncide avec la quatrième équation (6.40).

Si $\omega=2{,}5$, $\gamma=\frac{4}{3}$ et si les équations du mouvement ont la forme (6.40), le dégagement de l'énergie $E_0=\frac{352}{15}\pi^2A^2f$ au centre de l'étoile engendre un écoulement non stationnaire régi par les formules (6.44) que l'onde de choc joigne avec le domaine de repos où les caractéristiques du gaz sont réparties selon (6.42).

Considérons encore le problème de l'explosion dynamique de l'équilibre sans dégagement d'énergie dans un certain milieu biparamétrique parfait compressible*) dont l'énergie interne est donnée par

$$\varepsilon(p,\varrho)=\frac{p}{\varrho}\left\{\frac{1}{\gamma-1}+B_1\mathcal{R}^{n_1}+B_2\mathcal{R}^{n_2}+C_1P^m+C_2P^{-1}+\right.$$
$$+\int_{q_0}^{q_k}D(q)\mathcal{R}^qP^{s(q)}\,dq+\int_{h_0}^{h_k}\left[B(h)\mathcal{R}^h+C(h)P^{-\frac{\omega}{2(1-\omega)}h}+\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=1}^{l}D_i(h)\mathcal{R}^{q_i}P^{-\frac{\omega}{2(1-\omega)}(h-q_i)}\right]dh\right\}\left(\mathcal{R}=\frac{\varrho}{\varrho_0},\ P=\frac{p}{p_0}\right) \qquad (6.47)$$

dans l'hypothèse que les équations du mouvement dans le domaine de l'écoulement perturbé ont la forme (6.40) et que la distribution initiale de la densité est donnée par la relation (6.41) avec $1<\omega<2{,}5$. Une solution de ce problème satisfaisant aux conditions (6.42) et (6.43) est donnée par les formules (6.44). En égalant l'énergie initiale du gaz enfermé dans la sphère de rayon r_2 à l'énergie totale du gaz en mouvement derrière le front de l'onde de choc on établit l'équation (6.45) définissant la constante γ, les équations transcendantes permettant de déterminer les constantes n_1, n_2, m et la fonction $s(q)$ pour q donné, soit

$$\left.\begin{aligned}
&5-(2+n)\omega=\frac{3\omega}{13\omega-12}\left(\frac{3-\omega}{3}\right)^n,\\
&5-2\omega+2(1-\omega)m=\left(\frac{\omega}{13\omega-12}\right)^{m+1},\\
&5-2\omega-\omega q+2(1-\omega)s(q)=3^{1-q}(3-\omega)^q\left(\frac{\omega}{13\omega-12}\right)^{s(q)+1}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.48)$$

et la condition imposée aux fonctions $B(h)$, $C(h)$ et $D_i(h)$ $(i=1, 2, \ldots, l)$

$$\alpha(\omega,h)B(h)+\beta(\omega,h)C(h)+\sum_{i=1}^{l}\delta_i(\omega,h)D_i(h)=0, \qquad (6.49)$$

*) N. Kotchina, « Doklady Academii naouk » de l'U. R. S. S., t. 148, n° 1, 1963.

où l'on a désigné

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(\omega, h) &= \frac{8\pi^2 A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)} \left(\frac{A}{\varrho_0}\right)^h \times \\
&\qquad \times \left\{\frac{13\omega-12}{3\omega}\left(\frac{3}{3-\omega}\right)^h - \frac{1}{5-\omega(2+h)}\right\}, \\
\beta(\omega, h) &= \frac{8\pi^2 A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)} \left[\frac{2\pi A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)p_0}\right]^{-\frac{\omega}{2(1-\omega)}h} \times \\
&\qquad \times \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{13\omega-12}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{2(1-\omega)}h+1} - \frac{1}{5-\omega(2+h)}\right\}, \\
\delta_i(\omega, h) &= \frac{8\pi^2 A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)} \left(\frac{A}{\varrho_0}\right)^{q_i} \left[\frac{2\pi A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)p_0}\right]^{\frac{\omega}{2(\omega-1)}(h-q_i)} \times \\
&\qquad \times \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3-\omega}\right)^{q_i}\left(\frac{13\omega-12}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{2(\omega-1)}(h-q_i)+1} - \frac{1}{5-\omega(2+h)}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

Les quantités q_0, q_k, h_k de la formule (6.47) doivent satisfaire à certaines inégalités. Les constantes B_1, B_2, C_1, C_2 et les fonctions $D(h)$, $B(h)$, $C(h)$, $D_i(h)$ $(i=1, 2, \ldots, l-1)$ sont arbitraires, mais si l'on veut que l'écoulement soit physiquement réalisable, ces constantes et ces fonctions doivent être soumises à certaines restrictions supplémentaires. La température T est déterminée par l'intégration de l'équation différentielle linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

$$T + \frac{\partial T}{\partial p}\left(\varrho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} - p\right) - \varrho^2 \frac{\partial T}{\partial \varrho}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} = 0,$$

où $\varepsilon(p, \varrho)$ est définie par l'expression (6.47).

Si les conditions (6.45), (6.48) à (6.50) sont remplies, l'explosion dynamique dans un milieu au repos ayant une énergie interne de la forme (6.47) se produit sans dégagement d'énergie.

INDEX DES NOMS

Abramovitch G. 359
Ambartzoumian V. 373, 375

Bam-Zélikovitch G. 222, 228, 258
Barenblatt G. 166
Batchelor G. 148, 150
Bechert K. 166
Berthelot M. 182
Biot 23
Birkhoff G. 9
Blasius H. 117
Boltzmann L. 17
Bournova N. 267
Boussinesq J. 50
Brahé T. 371
Bridgman P. 50, 51
Brode H. 235, 272
Brouchlinski D. 269
Bucky G. 58
Buff J. 377

Carrus P. 397
Castor J. 377
Cauchy A. L. 95
Chandrasekhar S. 373, 377
Chapman S. 182
Chatelier (Le) H. 182
Clapeyron B. P. E. 33, 65, 345
Compte-Bellot G. 148
Corrsin S. 148
Coulomb C. A. 23
Cramers 386
Crussard L. 182, 322

Darcy H. 155
Davidenkov N. 58
Dibaï E. 377
Doppler 367
Doyère Ch. 75
Drobot S. 9
Dukalov A. 114
Durand W. 161

Emdé F. 99, 130
Epstein L. 72, 81

Fox P. 397
Friedmann A. 126
Fritsch W. 155
Froude W. 73

Gaas F. 397
Galerkine 365
Goldstine H. 272, 274
Goodrike J. 365
Grib A. 182, 184, 216
Grigorian S. 209
Grodzovski G. 114, 209, 242

Hagen G. 42, 43
Hansen M. 119
Hilsenrath J. 65
Hoode R. 21
Howarth L. 126, 134, 137
Huang T. T. 148-152
Hugoniot H. 214, 319

Iossélévitch V. 165

Jahnke E. 99, 130
Jonquières E. 86
Jouguet E. 182

Karlikov V. 260
Kármán Th. 126, 134, 137, 164

Katanski V. 60
Kazakova P. 272
Keller L. 120, 126
Kibel I. 106, 11, 119
Kolmogorov A. 136
Kondracheva I. 272
Kopal Z. 397
Koplan S. 377
Kornéev A. 135, 145, 152
Korobeïnikov V. 195, 258-260, 273, 292, 297
Kotchina N. 198, 209, 212, 242, 260, 272, 284, 412
Kotchine N. 80, 95, 106, 111, 119, 227
Kracheninnikova N. 208
Kreps R. 91
Kvachnina S. 217

Landau L. 112, 227, 274, 322
Laplace P. S. 25
Lidov M. 10, 190, 195, 305, 410
Lifchitz E. 112, 227
Ling S. C. 148-152
Lipschitz R. 166
Loïtsianski L. 117, 128, 131
Lokhine V. 125
Lubimov G. 166, 330
Lykoudis P. 164

Mallard E. 182
Massévitch A. 365
Maxwell C. 15
McCray R. 377
Melnikova N. 10, 209, 212, 242, 260, 267, 272, 273, 284, 292
Michelson V. 183
Milliontchikov M. 119, 131
Moustel E. 373, 375

Navier H. 49,
Neumann J. 272
Newton I. 21
Nikuradzé J. 155

Okhotsimski D. 272

Pannel 41
Parénago P. 365
Pilipenko V. 165
Poiseuille J. L. 42, 160
Poisson S. D. 57
Pokrovski G. 59
Prandtl L. 74, 115, 160, 161

Rappoport S. 377
Rayleigh J. W. 7, 50
Reynolds O. 38
Riabouchinski D. 50
Riazanov E. 10, 260, 273, 292, 410
Riccati 112
Riemann B. 322
Ritz 321
Rosé N. 106, 111, 119
Rosseland S. 305, 368, 388
Ryjov O. 259

Salamakhine T. 273
Savart 23
Schlichting H. 74
Sédov L. I. 80, 81, 85, 89, 90, 95, 114, 115, 125, 128, 179, 191, 208, 217, 228, 240, 258, 269, 309, 321, 330, 344, 377, 378, 390, 404
Séverny A. 373, 375
Shephter G. 329
Sidorkina S. 10, 256, 280
Sleuzkine N. 112
Sobolev V. 373, 375
Solinger A. 377
Solomakhova T. 269
Stanton Th. 41, 155
Stanukovitch K. 166, 199, 305
Stefan J. 372
Stewart R. 148, 152
Stokes G. 48
Strömgren B. 377, 378
Strouhal V. 69, 72
Sutherland C. 64

Taganov G. 259
Taylor G. 75, 126, 134, 235
Tchaplyguine Y. 80
Tcherny G. 217, 330
Tchuchkine P. 273
Tolstyh A. 114
Töpfer K. 117
Touloucian Y. 65
Townsend A. 150, 152

Vassetskaïa N. 165
Vassiliev V. 10
Vieille P. 182
Vladimirov A. 81, 85, 90
Vlassov O. 214
Vlassova Z. 272
Vorobiev A. 60

Wagner H. 95
Wan C. A. 148-152
Warmus M. 9
Weawer R. 377
Weber W. 23, 363

Yakimov J. 329
Yatséev V. 113
Yavorskaïa I. 10, 217, 377, 390
Young T. 57

Zanster 369
Zeldovitch J. 214, 322

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Accélération de la pesanteur 15
Angle
— de carénage 82
— de différence 79
— de marche 79
Apesanteur 13
Autosimilitude de l'explosion ponctuelle 259
Avance d'une hélice 67

Brillance d'une étoile 363

Caractéristiques intégrales d'un flux gazeux dans les machines à gaz 340
Centrifugeuse 58
Céphéides 363, 366
Choc sur l'eau 86
Chute verticale sur l'eau 90
Coefficient
— de la capacité calorifique 17
— de corrélation 129
— de frottement 74
— de Poison 57
— prismatique de finesse 75
— de résistance d'un tube 40
— de viscosité 39
Combustion 170
Compresseur 330
—, critères de similitude 334
—, paramètres de définition 334
Conditions
— au front de détonation 180
— au front de flamme 180
— d'Hugoniot 214
— aux sauts de compression 177
Conduction thermique 251
Constante
— de Boltzmann 17
— des gaz parfaits 17
— gravitationnelle 17
Constante de Stefan 372
— de Sutherland 64
Convergence d'un gaz vers un point 170, 212

Décomposition d'une discontinuité dans un mélange de combustion 171, 227
Défaut de vitesse 154
Détonation 170, 180
— sphérique 214
Déversoir 38
Diffuseur 330
Diffusion des tourbillons dans un fluide visqueux 106
Dimension 15
Divergence du gaz à partir d'un point 170, 212

Eclat d'une étoile 363
— apparent 363
Ecoulement
— automodèle du gaz 166
— d'un fluide dans un tube 38
— de Gagen-Poiseuille 42
— gazeux dans une étoupille à percussion 231
— — unidimensionnel 309
— laminaire 40
— d'un liquide pesant par-dessus un déversoir 38
— d'une masse gazeuse gravitante 390
— tendant vers un écoulement automodèle 196
— turbulent 40, 119, 153
— — à grandes pulsations 134
— — isotrope 119
— — dans une soufflerie 133
— — stationnaire 153
Effet
— Doppler 367

Effet d'échelle 54
Energie
— cinétique 24
— de l'explosion d'une bombe atomique 255
— gravitationnelle 392
— potentielle 24
— totale d'un gaz en mouvement 191
Entonnoirs d'explosion 281
Equation
— de la chaleur reçue 64, 373
— de Clapeyron 33, 64
— de conservation de l'énergie 193
— de continuité 64
— de l'énergie 333
— d'équilibre et de mouvement d'une masse de gaz simulant une étoile 371
— d'état en explosion 257
— de l'impulsion 333
— de Navier-Stokes 48, 63
— de Riccati 112
Equivalent mécanique de la chaleur 17, 52
Etat d'arrêt (de freinage) 334
Etoile
— naine 369
— nova 368, 389
— supernova 369
— variable 365
Etoupille à percussion 231
Explosion
— dans une atmosphère poussiéreuse 256
— de l'équilibre, dynamique 410
— forte 172, 199, 232
— — compte tenu de la conductibilité thermique 257
— — dans un milieu de densité variable 286
— périphérique 242
— ponctuelle 172
— — dans les milieux parfaits 259
— — en présence d'une contre-pression 263
— — au sein d'un fluide parfait incompressible 260

Finesse 73
Flutter d'aile d'avion 70
Flux
— de l'enthalpie totale 331
— de l'entropie 332
— de gaz, canonique 331, 334
— d'impulsion 331
— massique 331
— du moment cinétique 331
— turbulent 119
— — isotrope 122
Flux turbulent uniforme 122
Force 22
— électromagnétique 23
— de frottement entre les corps solides 23
— d'interaction des charges électriques 23
— de tension superficielle 23
Forces d'inertie 25
Formule
— de Blasius 159
— de Darcy 155
— de dimension 19
— de Prandtl-Schlichting 74
— de Sutherland 64
Frontière
— de ricochet 90
— de stabilité 90

Glissement 79
— des plaques carénées 82, 83
Grandeur (s)
— adimensionnées 12
— dimensionnées 12

Hélice parfaite 355, 359
Hydroplanage 79

Immersion d'un cône et d'un coin dans un liquide 93
Impulsion maximale en explosion 277
Indice de Poisson 246
Instabilité longitudinale de l'hydroplanage 90
Intégrale
— d'adiabacité 190, 198
— d'énergie 191, 198
— d'impulsion 195
— des masses 188, 198
Invariant Λ 128

Loi
— de Biot et Savart 23
— de conservation de l'énergie 193
— — — mécanique 24
— de Coulomb 24
— de frottement de Coulomb 23
— de Hagen-Poiseuille 43
— de Hooke 21
— de similitude de Froude 74
— de Stokes 48
— de Weber 23
— de Weber-Fechner 363

Lois
— asymptotique d'amortissement des ondes de choc 322
— de dégénérescence de la turbulence 137
— de Kepler 21
Longueur dynamique 264, 274
Luminosité d'étoiles 376

Machines à gaz 330
Magnitude 363
— absolue 364
— apparente 364
— photoélectrique 363
— photographique 363
— radioélectrique 363
— visuelle 363
Maquette hydrostatique de l'aérostat 60
Masse 22
— d'une étoile 364
Micro-échelle linéaire de Taylor 142
Module de Young 57
Mouvement
— automodèle 103
— d'un corps dans un fluide 43
— — —, non stationnaire 67
— — —, stationnaire 63
— d'un navire 72

Nombre
— de degrés de liberté 64
— de Froude 72
— de Reynolds 40, 55, 73
— —, critique 42
— de Strouhal 69, 72
Nova 368, 389
— naine 369
— récurrente 369

Onde
— de choc 177, 185, 235
— de détente 229
Ondes sur une nappe de liquide incompressible 95
Oscillations
— d'une aile élastique dans un fluide 70
— harmoniques cinématiquement semblables 69
— des sphères gazeuses sous l'action des forces gravitationnelles 308

Paradoxe de D'Alembert-Euler 356
Paramètres définissant une classe de phénomènes 30
Parcours de mélange 161
Parsec 364
Pendule simple 34
Période de pulsations de céphéides 366
Pression maximale en explosion 277
Principe de l'attraction universelle 21
— fondamental de la mécanique 21
Problème
— de Boussinesq 50, 105
— de la convergence et de la divergence d'un gaz 170, 212
— de la décomposition d'une discontinuité dans un mélange de combustion 171
— de l'écoulement du gaz (de Cauchy) 168
— de l'explosion forte 172, 199, 232
— du piston 169
Propagation du front de flamme 170
— — de détonation 170
Propulseurs d'avions 78, 79
— —, encombrement rationnel 78
— —, poids spécifique 79
— —, poussée 79
Puissance efficace 76

Rayons d'étoiles 376
Réacteur 330, 355
— parfait 355
Régime d'écoulement
— — laminaire 40
— — turbulent 40, 199, 153
Règle de Chapman-Jouguet 182
Rendement
— propulsif 77
— de propulsion parfait 355
— — réel 355
Résistance de frottement 74, 81
— résiduelle 74
Ricochet sur l'eau 86

Similitude
— cinématique 67, 68
— dynamique 53
— mécanique 53
— physique 53
Simulation
— des aérostats 60
— sur une centrifugeuse 58
— de l'équilibre des structures élastiques 57
— d'explosions 277
— — dans les sols 288
— des phénomènes 53

Soufflerie 55, 56, 133
Stabilité de l'écoulement autour d'une aile élastique 71
— de l'hydroplanage 90
Statoréacteur 355
Supernovae 369
Surcharge 13
Système d'unités
— — international 14
— — physique 14
— — technique 14
— — universel 18

Température
— derrière le saut de compression 184
— à l'intérieur d'une étoile 372
— à la surface d'une étoile 372
Temps dynamique caractéristique 264
Théorème des produits de puissances (Π-théorème) 29
Transmission de chaleur du corps au courant fluide 50
Tube de courant 332
Turbine 330
Turbomoteur 355
Turbopropulseur 355
Turbulence 40, 119, 150, 153
— isotrope 122
— dans une soufflerie 133
— stationnaire 153
— uniforme 122
Tuyère d'éjection 330

Ventilateur parfait 359
Vide au centre d'une détonation sphérique 216, 218
— — d'une explosion 243
— — de symétrie dans le cas d'une onde de flamme 227
Vitesse
— de contrainte tangentielle de frottement 153
— derrière le saut de compression 184
— du flutter, critique 72
— de propagation de l'onde de choc 233, 235

Unités de mesure
— — de base 14-19, 27, 30
— — dérivées 14, 15

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir,
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U. R. S. S.